Múltiplos

¿Cuándo un número es múltiplo de otro?

Un número es múltiplo de otro si es el resultado de multiplicar el segundo por un número natural o cuando al dividir el primero entre el segundo la división es exacta.

Ejemplo: 18 es múltiplo de 3 porque $18=3\cdot 6$ o porque $18:3$ es exacta.

¿Cómo se calculan los múltiplos de un número?

Multiplicando ese número por todos los números naturales.

Ejemplo:

Múltiplos de 4: 4, 8, 12, 16, …

$4\cdot 1,\ 4\cdot 2,\ 4\cdot 3,\ 4\cdot 4,\ldots$

Divisores:

¿Cuándo un número es divisible por otro?

Un número D es divisible por otro número d, cuando $D:d$ es exacta. En este caso, diremos que entre D y d hay relación de divisibilidad.

Un número d es divisor de otro número D, cuando $D:d$ es exacta.

Ejemplo: 4 es un divisor de 20 porque $20:4$ es exacta

¿Cómo se calculan los divisores de un número? (Sin factorizarlo)

Los divisores de un número se obtienen dividiendo ese número entre los sucesivos números naturales hasta que el cociente de la división sea menor o igual que el divisor.

Ejemplo:

$Div(30)=\{1,5,7,35\}$

$Div(40)=\{1,2,4,5,8,10,20,40\}$

Número primo

Número que tiene exactamente dos divisores.

Número compuesto

Número que tiene más de dos divisores.

¡Importante! El 1 no es ni primo ni compuesto.

Primeros números primos

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, …

Criba de Eratóstenes (s. III a.C)

~~1~~	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60

Criterios de divisibilidad

$\boxed{2}$ Un número es divisible por 2 cuando termina en cifra par.

Ejemplo: 2 568 es divisible por 2, porque termina en cifra par.

$\boxed{3}$ Un número es divisible por 3 cuando la suma de sus cifras es múltiplo de 3.

Ejemplo: 2 568 es divisible por 3, porque $2+5+6+8=21$ es múltiplo de 3.

$\boxed{5}$ Un número es divisible por 5 cuando termina en 0 o en 5.

Ejemplo: 25 665 es divisible por 5, porque termina en 5.

$\boxed{7}$ Un número es divisible por 7, cuando al restar (en el orden en que se pueda) el número sin la cifra de las unidades y el doble de la cifra de las unidades, se obtiene 0 o $\dot{7}$.

Ejemplo: 1 750 es divisible por 7, porque $175-2\cdot 0=175$ es múltiplo de 7, ya que $17-2\cdot 5=7$, que es múltiplo de 7.

$\boxed{11}$ Un número es divisible por 11, cuando al restar (en el orden en que se pueda) la suma de las cifras que ocupan lugar par y la suma de las cifras que ocupan lugar impar, se obtiene 0 o $\dot{11}$.

Ejemplo: 1 760 es divisible por 11, porque $1+6=7$, $0+7=7$ y $7-7=0$.

Descomposición en factores primos: factorización

Descomponer un número en factores primos consiste en escribir dicho número como producto (potencias) de números primos.

Ejemplos:

324	2
162	2
81	3
27	3
9	3
3	3
1	

$324=2^2\cdot 3^4$

1540	2
770	2
385	5
77	7
11	11
1	

$1540=2^2\cdot 5\cdot 7\cdot 11$

Máximo común divisor

Es el mayor de los divisores comunes a dos o más números.

¿Cómo se calcula?

1ª forma: calculando los divisores de los números y eligiendo el mayor de los que sean comunes (de los que se repitan).

Ejemplo: $m.c.d.(35,40)$

Calculamos los divisores:

$Div(30)=\{1,5,7,35\}$

$Div(40)=\{1,2,4,5,8,10,20,40\}$

1 y 5 son comunes

$$m.c.d.(35,40)=5$$

2ª forma: óptima

1) Factorizando los números.
2) Tomando los factores comunes con el menor exponente.

Ejemplo: $m.c.d.(35,40)$

Factorizamos

$35=5\cdot 7$

$40=2^3\cdot 5$

Tomamos los comunes de menor exponente:

$$m.c.d.(35,40)=5$$

Mínimo común múltiplo

Es el menor de los múltiplos comunes a dos o más números.

¿Cómo se calcula?

1ª forma: calculando los múltiplos de los números y eligiendo el menor de los que sean comunes.

Ejemplo:

Calculamos algunos múltiplos

$35\rightarrow$35, 70, 105, 140, 175, 210, 245, 280, …

$40\rightarrow$40, 80, 120, 160, 200, 240, 280, …

El primer múltiplo que se repite es 280.

$$m.c.d.(35,40)=280$$

2ª forma: óptima

1) Factorizando los números.
2) Tomando los factores comunes y no comunes con el mayor exponente.

Ejemplo:

Factorizamos

$35=5\cdot 7$

$40=2^3\cdot 5$

Tomamos los comunes y los no comunes de mayor exponente:

$$m.c.d.(35,40)=2^3\cdot 5\cdot 7=280$$

Problema de m.c.d.

Una floristería tiene 18 rosas rojas y 24 rosas blancas. Quiere preparar el mayor número posible de ramos idénticos, de manera que en cada ramo haya el mismo número de rosas rojas y el mismo número de rosas blancas, y que no le sobre ninguna rosa.

¿Cuántos ramos idénticos puede hacer como máximo?

¿Cuántas rosas de cada color habrá en cada ramo?

a) Cuando tenemos que repartir o agrupar cosas en partes iguales lo más grande posible sin que sobre nada, ¡siempre usamos el **m.c.d.**!

Factorizamos los números:

$$18=2\cdot 3^2 \text{ y } 24=2^3\cdot 3$$

Máximo común divisor

$$m.c.d.(18,24)=2\cdot 3=6$$

b) Rosas rojas por ramo:

$$18:6=3 \text{ rosas rojas.}$$

Rosas blancas por ramo:

$$24:6=4 \text{ rosas blancas.}$$

Problema de m.c.m.

En una estación de tren, el Tren Azul sale cada 35 minutos y el Tren Rojo sale cada 55 minutos. Si a las 10:00 de la mañana han salido ambos trenes a la vez... ¿Cuántos minutos pasarán como mínimo para que vuelvan a salir juntos y a qué hora exacta ocurrirá?

Solución:

Cuando necesitamos encontrar la primera cantidad o el primer momento en que dos cosas que se repiten se juntan, ¡siempre usamos el **m.c.m.**!

Factorizamos los números.

$$35=5\cdot 7 \text{ y } 55=5\cdot 11$$

Mínimo común divisor:

$$m.c.m.(35,55)=5\cdot 7\cdot 11=385$$

Como mínimo tienen que pasar 385 minutos (6 h y 25 min), es decir, vuelven a coincidir a las 16:25 h.

Nota histórica:

Eratóstenes de Cirene (c. 276 a. C. - 194 a. C.) fue uno de los polímatas más brillantes de la antigüedad griega. Destacó como astrónomo, geógrafo, matemático, filósofo y poeta, y llegó a ser el director de la prestigiosa Biblioteca de Alejandría. Es universalmente conocido por ser la primera persona en calcular la circunferencia de la Tierra con una precisión asombrosa para su época.