POTENCIAS Y RADICALES

1. Indica la base, el exponente y calcula el valor de las siguientes potencias:

a) $\left(-\frac{3}{5}\right)^2$ b) $\left(\frac{1}{7}\right)^8$ c) $\left(-\frac{17}{3}\right)^6$ d) $\frac{1}{2}$

2. Calcula las siguientes potencias, paso a paso, expresando el Solución en forma de fracción:

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$ b) $\left(\frac{1}{3}\right)^0$ c) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$ d) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}$

e) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-4}$ f) $\left(-\frac{2}{7}\right)^{-1}$ g) $\left(\frac{1}{7}\right)^{-2}$ h) $-\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$

3. Escribe en forma de una sola potencia, usando las propiedades de las potencias:

a) $\left(\frac{1}{10}\right)^5\left(\frac{1}{10}\right)^4\left(\frac{1}{10}\right)$

b) $\left(\frac{2}{5}\right)^{20}\left(\frac{2}{5}\right)^0\left(\frac{2}{5}\right)^5$

c) $\left(-\frac{1}{6}\right)^2\left(-\frac{1}{6}\right)^4\left(-\frac{1}{6}\right)^{-4}$

d) $\left(\frac{4}{5}\right)^{10}\left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right)^3$

e) $\left(-\frac{2}{3}\right)^6:\left(-\frac{2}{6}\right)^4$

f) $\left(\frac{1}{5}\right)^4:\left(\frac{1}{5}\right)^3$

g) $\left[\left(\frac{1}{9}\right)^5:\left(\frac{1}{9}\right)^3\right]:\left(\frac{1}{9}\right)^{-4}$

h) $\left[\left(-\frac{4}{3}\right)^6:\left(-\frac{4}{3}\right)^{-2}\right]:\left(-\frac{4}{3}\right)^3$

4. Reduce a una sola potencia:

a) $\left[\left(-\frac{3}{2}\right)^2\right]^3$

b) $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^5\right]^2$

c) $\left[\left(-\frac{1}{3}\right)^3\left(-\frac{1}{3}\right)\right]^4$

d) $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}:\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}\right]^4$

5. Efectúa las siguientes operaciones usando las propiedades de las potencias y simplifica el Solución:

a) $\left\{\left[\left(\frac{1}{5}\right)^2\left(\frac{1}{5}\right)^5\right]:\left(\frac{1}{5}\right)^3\right\}:\left(-\frac{1}{25}\right)$

b) $\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^6\left(-\frac{4}{8}\right)^{-2}\right]:(-2)^2$

c) $\left[\left(-\frac{3}{2}\right)^2\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)^2\right]^2$

d) $\left[\left(\frac{1}{9}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)^2\left(\frac{5}{2}\right)\right]^{-2}$

e) $\left[\left(\frac{1}{3}\right)^4:\left(\frac{2}{3}\right)^2\right]\left(-\frac{9}{5}\right)$

6. Efectúa las siguientes operaciones usando las propiedades de las potencias y simplifica el Solución:

a) $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^4:\left(\frac{1}{2}\right)^3\right]^{-4}:\left[\left(\frac{1}{3}\right)^2\right]^{-2}$

b) $\left[\frac{1}{3}\frac{2}{5}\left(-\frac{3}{2}\right)\right]^4:\left[\left(\frac{1}{5}\right)^2\right]^2$

c) $\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}\left(1+\frac{1}{3}\right)^{-2}$

d) $\left[\left(\frac{1}{3}\right)^2\right]^{-2}:\left(\frac{3}{2}\right)^2$

e) $\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^2\left(-\frac{1}{2}\right)^2\right]:\left\{(-2)^0\left[\left(\frac{1}{3}\right)^2\right]^3\right\}$

f) $\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(2-\frac{4}{3}\right)\right]:\left[\left(\frac{7}{6}\right)^2\right]^{-1}$

g) $\left\{\left[(-1)^3\right]^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)^{-4}\right\}:\left[\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2}\right]^3$

h) $\left[121\cdot\frac{1}{11}\right]^2(-3)^{-2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2$

7. Clasifica los siguientes números reales, indicando todos los conjuntos a los que pertenecen:

$-12,25 \quad \frac{5}{8} \quad \sqrt{7} \quad -3,75 \quad \tau=2\pi \ (\text{tau}) \quad 2\sqrt{36} \quad 0,\widehat{4} \quad -\frac{2}{9} \quad \sqrt{\pi} \quad e \quad \sqrt{1,21} \quad \sqrt[3]{5}$

8. Dados los radicales: $\sqrt{36},\ \sqrt{-36},\ -\sqrt{\frac{4}{9}},\ \sqrt{-81},\ \sqrt[3]{8},\ \sqrt[3]{27},\ \sqrt[3]{-8},\ \sqrt{5}$. ¿Cuáles tienen solución en $\mathbb{Q}$? ¿Cuáles no tienen solución en $\mathbb{R}$?

9. Calcula:

a) $\sqrt{100}$ b) $\sqrt{10000}$ c) $\sqrt{1000000}$ d) $\sqrt{100000000}$

e) $\sqrt{2^2}$ f) $\sqrt{3^2}$ g) $\sqrt{2^4}$ h) $\sqrt{3^4}$

10. Escribe en forma de potencia:

a) $\sqrt[3]{5^2}$ b) $\sqrt{5^3}$ c) $\sqrt{a^3}$ d) $\sqrt[4]{a}$ e) $\sqrt[3]{a^{-2}}$

11. Escribe en forma de radical los siguientes números:

a) $2^{1/2}$

b) $7^{2/3}$

c) $5^{0,5}$

d) $12^{0,2}$

e) $7^{-1/2}$

f) $9^{-1/3}$

g) $5^{-5/10}$

h) $8^{-2/3}$

12. Escribe en forma de raíz y calcula:

a) $8^{-\frac{1}{3}}$ b) $9^{-\frac{1}{2}}$ c) $32^{-\frac{2}{5}}$ d) $256^{\frac{3}{4}}$ e) $4^{\frac{3}{2}}+16^{-\frac{1}{2}}$

13. Simplifica las siguientes potencias y escríbelas en forma de radical:

a) $2^{4/8}$

b) $5^{6/12}$

d) $1024^{1/5}$

e) $625^{2/10}$

c) $125^{1/6}$ f) $225^{1/2}$

14. Simplifica los siguientes radicales:

a) $\sqrt[8]{2^4}$ d) $\sqrt[8]{5^4}$

b) $\sqrt[6]{125}$ e) $\sqrt[9]{27}$

c) $\sqrt[4]{3^2}$ f) $\sqrt[5]{1\ 024}$

15. Simplifica los siguientes radicales:

a) $\sqrt[34]{a^{17}}$ b) $\sqrt[39]{a^{13}}$ c) $\sqrt[42]{a^{14}}$ d) $\sqrt[108]{a^{54}}$ e) $\sqrt[360]{a^{240}}$

16. Señala verdadero o falso y justifica tu respuesta:

Igualdad	✓ o ✗	Justificación
$\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{a+b}$		
$\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}=a$		
$\sqrt{a^2+b^2}=a+b$		
$\sqrt{a^2\cdot b^2}=a\cdot b$		
$\sqrt{\frac{a^2}{b^2}}=\frac{a}{b}$		

17. Calcula y simplifica:

a) $\sqrt[6]{32}:\sqrt[6]{2}$ b) $\left(\sqrt[4]{2^3}\right)^2$ c) $\sqrt[4]{2^3}\cdot\sqrt[4]{2}$

d) $\sqrt[3]{2a}\cdot\sqrt[3]{4a^2}$ e) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}$

18. Extrae del radical todo lo que se pueda:

a) $\sqrt{2^6\cdot a^4\cdot b^6}$ b) $\sqrt{2^4\cdot 3^4\cdot 5^2}$ c) $\sqrt{2^8\cdot 3^2\cdot 5^2}$

19. Utiliza la descomposición factorial y extrae factores:

a) $\sqrt[3]{216}$ b) $\sqrt[3]{3375}$ c) $\sqrt[4]{1296}$ d) $\sqrt[5]{7776}$

20. Reduce a índice común los siguientes radicales:

a) $\sqrt[3]{7}$, $\sqrt[5]{4}$ y $\sqrt[5]{2}$

b) $\sqrt[5]{7}$, $\sqrt[3]{4}$ y $\sqrt[15]{2}$

21. Efectúa, paso a paso, las siguientes operaciones con radicales:

a) $3\sqrt{5}-2\sqrt{5}+4\sqrt{5}-7\sqrt{5}$ b) $6\sqrt{2}-2\sqrt{2}+3\sqrt{2}-4\sqrt{2}$

c) $\sqrt{2}+\sqrt{8}+\sqrt{18}-\sqrt{32}$ d) $\sqrt[3]{54}-\sqrt[3]{16}$

22. Efectúa, paso a paso, las siguientes operaciones con radicales:

a) $\sqrt{3}+\sqrt{12}+\sqrt{27}-\sqrt{75}$ f) $\sqrt[3]{54}-\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{250}$

b) $\sqrt{20}+\sqrt{5}+\sqrt{500}-\sqrt{80}$
c) $\sqrt{24}-5\sqrt{6}+\sqrt{486}$
d) $5\sqrt{3}-2\sqrt{3}+\sqrt{3}$
e) $\sqrt[3]{40}-2\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{135}$
g) $\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{54}-\sqrt[3]{128}$
h) $2\cdot\sqrt[3]{24}-\sqrt[3]{81}+\sqrt[3]{375}$
i) $2\sqrt{8}+5\sqrt{18}-\sqrt{200}+3\sqrt{98}$
j) $5\cdot\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{250}-3\cdot\sqrt[3]{2}$

23. Expresa como potencia de exponente fraccionario:

a) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}$ b) $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$ c) $\sqrt[3]{x\sqrt{x\cdot\sqrt[3]{x}}}$

24. Extrae todos los factores posibles: a) $\sqrt{300x^{18}y^6z^9}$ b) $\sqrt[5]{96}$

25. Introduce todos los factores dentro del radical y simplifica:

a) $5\sqrt{3}$ b) $\frac{3}{5}\sqrt{\frac{5}{3}}$ c) $5x\sqrt[3]{xy}$

26. Calcula la raíz por el método de extraer factores: $\sqrt{23\ 433\ 600}$

27. Opera y expresa el Solución con un solo radical simplificado:

a) $\sqrt[9]{12}\ :\ \sqrt[9]{4}$
b) $\left(\sqrt[5]{4}\cdot\sqrt[5]{6}\right)^4$
c) $\sqrt[3]{\sqrt{7\sqrt{20}}}$
d) $3\sqrt{5}\cdot 7\sqrt{10}$
e) $\sqrt[4]{27z^3}\cdot\sqrt[4]{3z}$
f) $\sqrt[3]{t^5b^3}\ :\ \sqrt[3]{t^2b^2}$
g) $\sqrt[3]{x^2}\ :\ \sqrt[4]{x^3}$
h) $\left(\left(\sqrt{3}\right)^2\right)^2$
i) $\sqrt[8]{2}\cdot\sqrt[4]{4}\cdot\sqrt{8}$

28. Calcula, usando radicales y el numero pi, el número que se obtiene en cada caso, e indica si es racional o irracional:

a) La diagonal de un cuadrado de lado 1 cm.
b) El área de un círculo de radio 1 cm.

29. ¿Cuánto mide el área de la cara de un cubo cuyo volumen es 9 cm^3? Expresa el Solución como radical y como potencia.

30. Halla el lado de un cuadrado de diagonal 8 cm. Expresa el Solución en forma de potencia.

31. Una escalera está apoyada sobre la fachada de un edificio. Si la escalera mide 13 m de longitud y el pie de la escalera está a 5 m de la pared, ¿a qué altura de la pared llega la escalera?

32. El volumen de un cubo es 2 m^3. ¿Cuánto mide la arista? Expresa el Solución en forma de potencia y de radical.

33. Resuelve los siguientes problemas geométricos simplificado el Solución:

a) Halla la diagonal de un cuadrado cuyo lado mide $\sqrt{18}$ cm.
b) Calcula la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden $\sqrt{7}$ cm y $\sqrt{2}$ cm.
c) Un rectángulo tiene de base $\sqrt{50}$ cm y de altura $\sqrt{8}$ cm. Calcula su perímetro.
d) Halla el volumen de un cubo cuya arista mide $\sqrt{5}$ cm.

34. La luz viaja en el vacío a una velocidad aproximada de $3\cdot10^5$ km/s. Sabiendo que un año tiene $3{,}1536\cdot10^7$ segundos, calcula cuántos kilómetros recorre la luz en un año (lo que conocemos como un «año luz»). Expresa el Solución en notación científica.

35. El grosor de un cabello humano es de aproximadamente 10^{-4} m. El diámetro de un glóbulo rojo es de $8\cdot10^{-6}$ m. ¿Cuántos glóbulos rojos podríamos colocar en fila, uno al lado del otro, para cubrir exactamente el grosor de un cabello?

36. El superordenador Frontier (ubicado en el Laboratorio Nacional de Oak Ridge, EE. UU.) es capaz de realizar $1{,}19\cdot10^{18}$ operaciones por segundo (1,19 ExaFLOPS). Por su parte, el superordenador Fugaku (ubicado en el Instituto RIKEN, Japón) realiza $4{,}42\cdot10^{17}$ operaciones por segundo. Si conectamos ambos para trabajar en conjunto en un proyecto de investigación climática global, ¿cuántas operaciones por segundo serán capaces de realizar en total?

37. En un laboratorio están diseñando una nanopartícula con forma de cubo. Si la longitud de la arista de este cubo es de $2\cdot10^{-8}$ m, ¿cuál será su volumen en metros cúbicos (m^3)? Expresa el Solución en notación científica.

38. La masa de la Tierra es de aproximadamente $5{,}97\cdot10^{24}$ kg. Si una sola gota de agua tiene una masa de $2{,}5\cdot10^{-5}$ kg, ¿cuántas gotas de agua necesitaríamos para igualar la masa de la Tierra?

39. Un país tiene una población de $4{,}7\cdot10^7$ habitantes y una deuda nacional total de $8{,}46\cdot10^{11}$ euros. ¿A cuánto ascendería la deuda por cada habitante (deuda *per cápita*)? Expresa el Solución en notación científica.

40. Un grifo mal cerrado gotea a un ritmo de $2{,}5\cdot10^{-2}$ litros por hora. Sabiendo que un año bisiesto tiene 366 días, calcula cuántos litros de agua se habrán desperdiciado al finalizar ese año. Expresa el Solución en notación científica.

41. Un videógrafo profesional adquiere un disco duro SSD externo de 2 Terabytes (TB). Según la convención de los fabricantes, 1 TB equivale a 10^{12} bytes, por lo que su disco tiene una capacidad total de $2\cdot10^{12}$ bytes. Sabiendo que una foto en alta resolución de su cámara ocupa $4\cdot10^6$ bytes (4 MB) y que un minuto de vídeo en resolución 4K ocupa $3{,}5\cdot10^8$ bytes (350 MB):

a) Si dedicara el disco entero solo a guardar fotos, ¿cuántas fotos podría almacenar?
b) Si en su primer trabajo graba y guarda $2\cdot10^3$ minutos de vídeo en 4K, ¿cuántos bytes libres le quedarán en el disco? (Expresa ambas soluciones en notación científica).

Para repasar:

42. Un depósito cúbico tiene una capacidad de $15{,}625$ m^3. El ayuntamiento quiere saber cuánto mide la arista del depósito para encargar una valla perimetral.

a) Calcula la arista (raíz cúbica).
b) Si la valla cuesta 12,5 €/m, ¿cuánto costará vallar todo el perímetro de la base?

43. Una bacteria se duplica cada 20 minutos. A las 8:00 hay 2^3 bacterias en un cultivo.

a) ¿Cuántas bacterias habrá a las 11:00?
b) Exprésalo como potencia de base 2 y luego como número.

44. Se construye un cubo formado por 3^6 cubitos pequeños.
a) ¿Cuántos cubitos hay en cada arista?
b) Si cada cubito pesa 0,0025 kg, ¿cuál es la masa total en notación decimal?

45. Una finca rectangular mide 3^4 m de largo y 3^2 m de ancho.
a) Calcula el área como potencia de 3.
b) Calcula el perímetro.
c) Si se quiere dividir en parcelas cuadradas lo más grandes posible, ¿cuánto medirá el lado de cada parcela?

46. Un televisor tiene una pantalla rectangular de $0{,}8$ m de alto y 1,5 m de ancho.
a) Calcula la diagonal usando radicales y simplifica.
b) ¿Cuánto mide la diagonal en cm (redondea a las décimas)?

47. Una receta usa $\left(\frac{2}{3}\right)^3$ litros de leche y $\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}$ litros de nata.
a) Expresa ambas cantidades como fracciones irreducibles.
b) ¿Cuánto líquido total se usa?

48. Un taller construye un cubo de cartón de arista $\sqrt[3]{27}$ cm de largo y lo llena con 2^3 dados iguales.
a) ¿Cuál es el volumen del cubo?
b) ¿Cuánto mide la arista de cada dado si ocupan todo el volumen?

49. Un motor trabaja con una potencia de $2{,}5\cdot10^3$ W durante $4\cdot10^2$ s.
a) Calcula la energía consumida ($E = P\cdot t$) en notación científica.
b) Exprésala también en kWh ($1\text{ kWh} = 3{,}6\cdot10^6$ J).

50. Un jardín cuadrado tiene un área de $10\,000$ m^2. Se divide en 16 parcelas cuadradas iguales.
a) ¿Cuál es el lado del jardín?
b) ¿Cuál es el área de cada parcela? Exprésala como potencia.
c) ¿Cuál es el lado de cada parcela?

51. Una piscina cúbica contiene 64 000 litros de agua.
a) Calcula la arista en metros ($1\text{ m}^3 = 1\,000$ L).
b) Si se quiere llenar otra piscina cúbica cuya arista es $\sqrt[3]{8}$ veces la anterior, ¿cuántos litros cabrán?

52. La distancia media Tierra–Sol es $1{,}496\cdot10^8$ km.
a) Exprésala en metros en notación científica.
b) ¿Cuántos segundos tarda la luz en llegar si viaja a $3\cdot10^5$ km/s ? (Usa $d = v\cdot t$)

53. Un paquete de 500 hojas tiene un grosor de $5\cdot10^{-2}$ m.

a) ¿Cuál es el grosor de una hoja en notación científica (en metros)?
b) ¿Cuántas hojas se necesitan para alcanzar 1 km de altura?

54. Una célula mide $2,5\cdot10^{-5}$ m de diámetro y un microscopio aumenta $4\cdot10^{3}$ veces.
a) ¿Qué diámetro aparente se ve? Expresa el Solución en notación científica en metros.
b) Pásalo a mm.

55. Un móvil consume $3,2\cdot10^{-2}$ A y funciona $1,5\cdot10^{4}$ s.
a) Calcula la carga total $Q = I \cdot t$ en culombios, en notación científica.
b) Si la batería tiene una carga de $2,4\cdot10^{3}$ C, ¿cuántas horas durará aproximadamente?

56. Un disco duro tiene $2\cdot10^{12}$ bytes y cada foto ocupa $4\cdot10^{6}$ bytes.
a) ¿Cuántas fotos caben? Expresa el Solución en notación científica.
b) Si se guardan $3,5\cdot10^{5}$ fotos, ¿cuántos bytes quedan libres?