POLINOMIOS Y FRACCIONES ALGEBRAICAS

1. Di cuál es el coeficiente y la parte literal de cada monomio:

$a) -3x^2t$ $b)\ 7x^2yz^3$ $c)\frac{1}{2}x^2t$

$d)\ 5x^4y^3$ $e)-3ym^2$ $f)3yzt^2$

2. Indica qué expresiones son polinomios y decir el grado del polinomio, el término independiente y el coeficiente del término de mayor grado:

$a)\frac{1}{5}x^3-x+1$ $b)\frac{7x^5}{2}$ $c)\frac{x^2+1}{2}$

$d)\ \sqrt{x+2}$ $e)5x^4-3x^2y+7$ $f)-x^6-x^2+\frac{1}{2}x-3$

3. a) Inventa un trinomio de segundo grado con término independiente igual a 4

b) Inventa un polinomio de grado 5 con coeficiente de x^5 igual a 2 y término independiente igual a 5.

c) Inventa un polinomio de grado 6 que sea un binomio y cuya parte literal sean potencias de las variables t y u.

d) Inventa un polinomio de 4º grado que sea un trinomio, cuya parte literal sean potencias de la variable z y con todos los coeficientes fraccionarios y menores que 1.

4. Calcula el valor numérico de las siguientes expresiones para los valores que se indican:

a) x^2+y^2 para $x=2,\ y=5$

b) a^2-b^2 para $a=15,\ b=5$

c) $(1-2x)(1-2x)x$ para $x=0.2$

d) πr^2 para $r=5,\ r=10,\ r=100$

5. Decir cuáles de los siguientes monomios son semejantes:

$a)\ 7x^2yz^3$ y $-3yx^2z^3$

$b)7xyz^2$ y $7x^2yz$

$c)\ -3zt^2$ y $5zt^2$

$d)\ -3yx^3$ y $5x^3y$

6. Dados los monomios $A(x)=5x^2,\ B(x)=3x,\ C(x)=7x^3$ y $D(x)=2x^2$, efectúa las siguientes operaciones:

a) $A(x)+D(x)$ c) $A(x)+B(x)$ e) $A(x)D(x)$

b) $A(x)-D(x)$ d) $A(x)C(x)$ f) $B(x)D(x)$

7. Dados los polinomios $P(x)=5x^2-3x+2,\ Q(x)=2x^3-1$ y $R(x)=x+1$, efectúa las siguientes operaciones:

a) $P(x)+Q(x)$ c) $P(x)Q(x)$ e) $R(x)-Q(x)$

b) $P(x)-Q(x)$ d) $P(x)-R(x)$ f) $P(x)R(x)$

8. Calcula las siguientes sumas o restas:

a) $P(x)+Q(x)$ donde $P(x)=3x^2-5x+1$ y $Q(x)=x^2-7x-3$

b) $P(x)-Q(x)$ donde $P(x)=3x^2-5x+1$ y $Q(x)=x^2+7x-2$

c) $P(x)+Q(x)$ donde $P(x)=3x^2-1$ y $Q(x)=x^3-7x-5x^2-3$

d) $P(x)-Q(x)$ donde $P(x)=7x^3-5x^8+6x^2-1$ y $Q(x)=x-5x^4-3x^2-1$

e) $P(x)-Q(x)$ donde $P(x)=2-3x+5x^4-3x^2$ y $Q(x)=8x^3+5-x^4+x$

9. Dados los polinomios

$$P(x)=3x^2-4x+1 \quad y \quad Q(x)=4x^2+2$$

Efectúa las siguientes operaciones:

a) $P(x)+Q(x)$ b) $P(x)-Q(x)$ c) $P(x)\cdot Q(x)$

10. Efectúa las sumas y diferencias que se indican y reduce los términos semejantes:

a) $(a-b)-(b+c-d)+(2b-a)$

b) $x+\left[(y-x)-(y-z)\right]$

c) $a^2-(b^2-c^2)+b^2-(a^2+c^2)-c^2-(a^2-b^2)$

d) $(a+2b-6a)-\left[3b-(6a-6b)\right]$

e) $(x+y-z)-(x-y+z)+(-x+y+z)-(-x-y+z)$

f) $(4x^3-2x^2+x+1)-(3x^3-x^2-x-7)-(x^3-4x^2+2x+8)$

11. Calcula las siguientes potencias:

a) $x\cdot x$ c) $(x^2)^5$ e) $\left[(a^2)^3\right]^8$

b) $x^2\cdot x^3$ d) $\left[(-a^2)^3\right]^4$ f) $(a^3b^3)^7$

12. ¿Verdadero o falso? Razónalo.

a) $x\cdot x=2x$ c) $x^3=3x$ e) $x^2\cdot x^3=x^5$

b) $(a^2)^4=a^6$ d) $x^2+x^3=x^5$ f) $(x+y)^2=x^2+y^2$

13. Calcular los siguientes productos de polinomios:

a) $(2x^2+1)\cdot(3x-2)=$

b) $(3x^4+5x^3-2x+3)\cdot(2x^2)=$

c) $(3x^4+5x^3-2x+3)\cdot(2x^2-x+3)=$

d) $(7x^3-2x+11)\cdot(-3x^2-1)=$

e) $(x+1)\cdot(x+1)=$

f) $(x+2)\cdot(x-2)=$

14. Haz los productos que se indican aplicando la propiedad distributiva y reduce los términos semejantes:

a) $(a+b)(a+b)$

b) $(a+b)(a-b)$

c) $(a+b+c)(a+b-c)$

d) $(a+b-c)(a-b+c)$

e) $(x-a)(x-b)(x-c)$

15. Opera y simplifica las siguientes expresiones:

a) $(x-a)(x-b)+(x-c)(x-d)$

b) $(a+b)(b+c)-(c+d)(d+a)$

c) $(a+b)x+(b+c)y-\left[(a-b)x-(b-c)y\right]$

d) $(a+b-c)(a+b)+(a-b+c)(a+c)$

e) $(a-b)(a+b-c)+(b-c)(b+c-a)$

16. Efectuar las siguientes divisiones de polinomios:

a) $\left(3x^5+2x^4-7x^3+2x-3\right):\left(x^2\right)=$

b) $\left(3x^4+5x^3-2x+3\right):\left(x^2-3x+2\right)=$

c) $\left(3x^5-2x^3+7x^2-2x\right):\left(x^3+3x^2-1\right)=$

d) $\left(4x^4-5x^3+x-2\right):\left(x^2-2x+1\right)$

e) $\left(x^5-5x^4+20x^2-16x\right):\left(x^2-2x+8\right)$

f) $\left(x^4-1\right):\left(x^2-1\right)$

17. Efectúa las siguientes divisiones:

a) $\left(x^3+4x^2+6x\right):x$

b) $\left(x^3+3x^2+2x-1\right):x$

c) $\left(4x^3-8x^2-6x\right):2x$

18. Efectúa las siguientes divisiones:

a) $\left(x^4-6x^3+2x^2+3x-4\right):\left(x^2+x+2\right)$

b) $\left(x^4-5x^3+11x^2-12x+6\right):\left(x^2-x+2\right)$

c) $\left(6x^4-x^3+5x^2+3x-14\right):\left(2x^2-3x+7\right)$

19. Calcula los cuadrados de los binomios que se indican y reduce luego los términos semejantes:

a) $(x+a)^2$ c) $(2a+9b)^2$ e) $\left(x^6+a\right)^2$ g) $(7+x)^2$

b) $(x-m)^2$ d) $(x^2+8)^2$ f) $(3a^3-10)^2$ h) $(a^m+y^n)^2$

20. Calcula directamente los productos de las sumas por diferencias:

a) $(a+b)(a-b)$ c) $(3x+1)(3x-1)$

b) $(x+2a)(x-2a)$ d) $(x^3y^3+2)(x^3y^3-2)$

21. Calcula los cuadrados de los binomios que se indican:

a) $(x+3)^2$ b) $(2x+4)^2$ c) $(3x-2)^2$ d) $(2x^2-x)^2$

22. Realiza las siguientes operaciones simplificando el resultado todo lo posible:

a) $(m+p)^2-(m-p)^2$ b) $(2x-3)(2x+3)$ c) $(2x+3)^3$

23. Calcula el valor de la siguiente expresión sin realizarla (tempo 15 s). Observa cómo son entre sí los paréntesis. Si no lo ves, puedes hacer las operaciones indicadas.

$$(a+b-c-d)^2-(c+d-a-b)^2$$

24. Halla el valor numérico de las siguientes expresiones para los valores que se indican, realizando el cálculo:

a) Directamente b) Después de reducir la expresión

1) $a^2+2ab+b^2$ para $a=7,\ b=3$
2) $a^2-2ab+b^2$ para $a=7,\ b=3$
3) a^2-b^2 para $a=15,\ b=5$
4) $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ para $a=13,\ b=3$
5) $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ para $a=13,\ b=3$

25. En las siguientes relaciones hay errores muy graves en la utilización de la regla de los signos. ¿Cuáles son?

a) $-(x^2+x-2)=-x^2+x-2$ b) $-\dfrac{3x^2-9x}{3}=-x^2-3$

26. En las siguientes relaciones hay errores muy graves en la utilización de la propiedad distributiva. ¿Cuáles son?

a) $x(x+y)=x^2+y$

b) $(3a+2)(1-b)=3a-2b$

c) $(a+b)^2=a^2+b^2$

d) $(a-b)^2=a^2-b^2$

e) $2x+3(3x-1)=6x-2x+9x-3$

27. Completa las siguientes expresiones para que sean cuadrados perfectos:

a) $9x^2+24x+...$ d) $x^2-6x+...$

b) $x^2+2x+...$ e) $4x^2+...+9$

c) $x^2-2x+...$ f) $9x^2+...+16$

28. Saca factor común en las siguientes expresiones algebraicas:

a) $3x^2-5x^4$ d) $a^2+ab+ac+bc$

b) $5x-25x^2y$ e) $ax-ay-bx+by$

c) $7x^3-14x^6$ f) $a^2-c^2+acd+abc$

29. En el trinomio ax^2+bx+c, calcula b^2-4ac en los siguientes casos:

a) x^2-5x+6 c) $3x^2-8x+5$

b) $9x^2-24x+16$ d) $x^2+3x-10$

30. Observa que:

$$8\cdot 8-1=7\cdot 9 \qquad 15\cdot 15-1=14\cdot 16 \qquad 31\cdot 31-1=30\cdot 32$$

Comprueba si es cierto para otros valores y trata de expresar mediante una identidad algebraica esta situación.

31. Con 40 cm de cuerda se quieren construir distintos rectángulos. ¿Cuál será la expresión general del área de estos rectángulos?

32. La diferencia de los cuadrados de dos números consecutivos, ¿es par o impar? Razónalo.

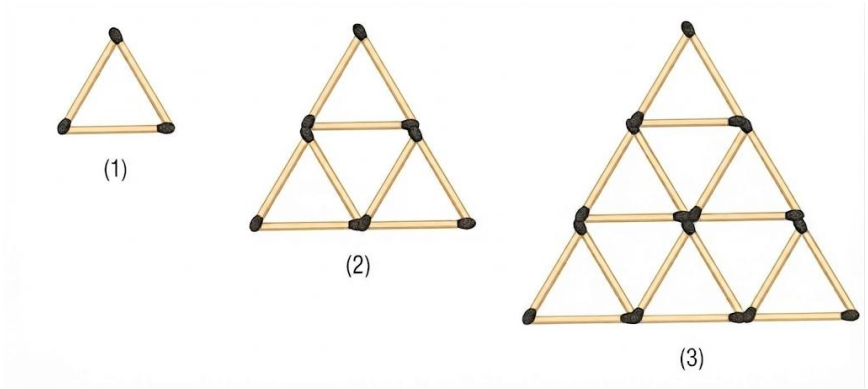
33. Demuestra que la diferencia de los cuadrados de dos números impares consecutivos es par.

34. Si dos números se diferencian en 7 unidades, la diferencia de sus cuadrados es igual a 7 veces la suma. Razónalo.

35. Observa en un calendario un mes cualquiera; por ejemplo, el siguiente:

En cada uno de los recuadros señalados, u otros análogos, trata de hallar las sumas cruzadas y los productos cruzados. ¿Qué observas? Expresa mediante identidades algebraicas los resultados obtenidos.

36. Observa las siguientes figuras. ¿Cuántas cerillas se necesitarán para construir una figura análoga que ocupe el lugar enésimo?



37. La figura siguiente sirve para demostrar la identidad algebraica:

$$4ab+(a-b)^2=(a+b)^2$$

¿Qué representan a y b?

38. Efectúa las siguientes divisiones efectuando la división ordinaria y el método de Ruffini:

a) $(3x^5+2x+1):(x+1)$

b) $(x^6+x^2-3):(x+3)$

c) $(x^9+x^5+1):(x-2)$

39. Utilizando el valor numérico, halla el resto de:

a) $(x^3-2x^2-3):(x-1)$

b) $(x^3-1):(x-1)$

c) $(2x^4-2x^3+3x^2+5x+10):(x+2)$

40. Utilizando el valor numérico, comprueba si son exactas las siguientes divisiones:

a) $(x^4-16):(x+2)$

b) $(x^6+64):(x-2)$

c) $(x^{99}+1):(x-1)$

41. Dados los polinomios siguientes, hallad los valores numéricos que se indican:

a) $P(3)$ para $P(x)=x^2+x-2$

b) $Q(-2)$ para $Q(x)=-x^3+x-5$ x

c) $R(-1)$ y $R\left(\frac{1}{2}\right)$ para $R(x)=x^3-3x^2+4x+8$

d) $S(2)$, $S(-1)$ y $S(-2)$ para $S(x)=(x-2)\cdot(x+2)$

42. Utilizando el valor numérico, halla el valor de m en los polinomios siguientes, sabiendo que:
a) $5x^4+mx^3+2x-3$ es divisible por $x+1$
b) $3x^2-mx+10$ es divisible por $x-5$
c) $3x^3-7x^2-9x-m$ es divisible por $x-3$

43. Utilizando el valor numérico, comprueba si son ciertas las afirmaciones:
a) x^3-1 tiene por factor a $x-1$
b) x^3+1 tiene por factor a $x+1$
c) x^4-17x^2+16 tiene por factor a $x-4$

44. Factoriza los siguientes trinomios:
a) x^2-x-2
b) $x^2-11x+30$
c) $42-x-x^2$
d) $66+5x-x^2$
e) $3x^2+10x+3$
f) $2x^2-x-1$

45. ¿Qué valor ha de tomar k para que $x+3$ sea un factor de $x^3-4x+12k$?

46. Utilizando el valor numérico, halla el valor de m para que el polinomio $5x^4-7x^3+2x^2+4x+m$ tenga por resto 130 al dividirlo por $x+2$.

47. Factoriza los siguientes polinomios:
a) x^3-x^2-4
b) x^3+2x^2+2x+1
c) $2x^3-6x^2-8x+24$
d) x^3-5x^2+6x
e) $x^4-6x^3-11x^2+96x-80$
f) $2x^4-5x^3+5x-2$
g) $x^4+2x^3-3x^2-4x+4$

48. Determina el polinomio cociente y el resto aplicando la **regla de Ruffini**:
a) $(x^4-2x^2+3x^3-1):(x+2)$
b) $(x^2-6x+3):(x-3)$
c) $(4x^3-2x+1):\left(x-\frac{1}{2}\right)$
d) $(x^5-3x^4+2x^2-6x+1):(x+2)$

49. Utilizando la **regla de Ruffini**, halla el valor numérico de:
a) x^4-2x^2+x+2 para $x=3$
b) x^4-4x^3-125 para $x=5$
c) x^3-3x^2+3x-1 para $x=1$

50. Comprobar si las siguientes afirmaciones son ciertas:

a) 3 es una raíz de $x-3$

b) 1 es una raíz de x^4-3x^3+2x-5

51. Descomponer en factores los siguientes polinomios:

a) $9x^2-25$

b) $4x^6+12x^3+9$

c) x^3+x^2-x-1

d) x^3-2x^2+x

e) x^3-2x^2+2x-4

f) $2x^3-2x^2+x-1$

52. Hallad el m.c.d. y el m.c.m. de los siguientes polinomios:

a) $P(x)=x^4-3x^3+3x^2-x$ y $Q(x)=2x^3-2x^2+x-1$

b) $P(x)=2x^5-5x^2+4x-4$ y $Q(x)=2x^3-3x^2+3x-2$

c) $P(x)=(x-2)^3(x-1)^2$ y $Q(x)=(x-1)(x-2)^4(x+2)^2$

53. Determina el valor de *a* para que 3 sea raíz del polinomio $q(x)=x^3-6x^2+ax-2$.

54. Determina *a* y *b* para qué x^3+ax^2+bx+5 sea divisible por x^2+x+1.

55. Desarrolla las siguientes igualdades notables:

a) $(x+3y)^2$

b) $(2x-3y)^2$

c) $(3x^3+3y)^2$

d) $(3x^3-a^2)^2$

e) $(x+x^3)(x-x^3)$

f) $(2x+x^3)(2x-x^3)$

56. Desarrolla las siguientes igualdades:

a) $(x+2y)^2$

b) $(6a-4y)^2$

c) $(7x+x^4)(7x-x^4)$

d) $(3x^3+3)^2$

e) $(y+x^2)(y-x^2)$

f) $(5x^4-2)^2$

57. Calcula mentalmente estas diferencias de cuadrados (utiliza la definición del producto de una suma y una diferencia):

a) 100^2-99^2 *b*) 53^2-52^2 *c*) 96^2-4^2

58. Averigua los desarrollos de $(a+b)^3$ y $(a-b)^3$.

59. Expresa los siguientes polinomios como un binomio:

a) $x^2+14x+49$

b) $x^2-14x+49$

c) $x^2-18x+81$

d) $x^2-20x+100$

e) $x^2+22x+121$

f) x^2+6x+9

60. El desarrollo $(x+3y)^2$ es:

a) $x^2-6xy+9y^2$ *c*) $x^2+3xy+3y^2$

b) $2x+6y$ *d*) $x^2+6xy+9y^2$

61. El desarrollo de $(2x-4y)^2$ es:

a) $2x^2-8xy+4y^2$ *c*) $4x^2-8xy+16y^2$

b) $4x^2+8xy+16y^2$ *d*) $4x^2-16xy+16y^2$

62. El producto de $(2x-3y)(2x+3y)$ es:

a) $4x^2-6y^2$ *c*) $4x^2-9y^2$

b) $4x^2+6y^2$ *d*) $4x^2+9y^2$

63. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\dfrac{x^3}{x^2+x^3}$ b) $\dfrac{x-1}{x^2-1}$ c) $\dfrac{x+1}{x^2+2x+1}$

64. Transformar en una sola fracción algebraica las siguientes sumas:

a) $2x-1+\dfrac{x}{x-2}$ d) $\dfrac{x}{x-1}-x-1$

b) $\dfrac{x-3}{x-2}-\dfrac{2}{x}$ e) $\dfrac{x+3}{x-3}-\dfrac{x-3}{x+3}$

c) $\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{x+1}{x}$

65. Transformar en una sola fracción algebraica los siguientes productos y divisiones:

a) $\dfrac{2x-1}{x+2}\cdot\dfrac{x}{x-2}$ c) $\dfrac{\dfrac{x}{x-1}}{\dfrac{x+1}{x}}$

b) $\dfrac{x-3}{x-2}\cdot\dfrac{2}{x}$ d) $\dfrac{\dfrac{x}{x-1}}{x+1}$

66. Reduce a común denominador, opera y simplifica:

a) $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x^2}$ b) $\dfrac{x+1}{x-1}+\dfrac{x-1}{x+1}$

c) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}$ d) $\dfrac{3-x}{x}-\dfrac{x-1}{x^2}$

67. Efectúa las siguientes operaciones:

a) $\dfrac{x^2+2}{x^3-1}-\dfrac{2x^2+1}{(x-1)^2}$ b) $\dfrac{x^2-4}{x^3+1}:\dfrac{x^3-8}{x+1}$

c) $\dfrac{3x^2-5x+2}{x^3+1}\cdot\dfrac{x^2+5x+4}{2x^2-3x+1}$

d) $\dfrac{x^2+x+1}{x^3-x^2+x-1}:\dfrac{x+1}{x-1}$

68. Efectúa las operaciones y simplifica:

a) $\dfrac{3xy}{x-y}\cdot\dfrac{x^2-y^2}{6x^2y}\cdot\dfrac{x}{x+y}$

b) $\dfrac{x-1}{3}\cdot\dfrac{9}{x^2-1}$

c) $\dfrac{4}{x^2-1}:\dfrac{2}{x-1}$

d) $\left(x-\dfrac{4}{x}\right):\left(1-\dfrac{2}{x}\right)$