

PARTE A

Pregunta 1 – Distribución Binomial [Estadística - obligatoria]

$$\begin{cases} X = \text{número de motores defectuosos} \\ n = 10 \\ p = 0,15 \text{ y } q = 0,85 \end{cases} \Rightarrow X \longrightarrow \mathcal{B}(10, 0.15)$$

La función masa de probabilidad de una distribución binomial es:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

a) Probabilidad de que no haya ningún motor defectuoso

$$P(X = 0) = \binom{10}{0} \cdot 0,15^0 \cdot 0,85^{10} = 1 \cdot 1 \cdot 0,85^{10} \approx 0,1969 \text{ (este valor también aparece en la tabla)}$$

b) Probabilidad de que haya exactamente 3 motores defectuosos

$$P(X = 3) = \binom{10}{3} \cdot 0,15^3 \cdot 0,85^7 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{3! \cdot 7!} \cdot 0,15^3 \cdot 0,85^7 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2} \cdot 0,15^3 \cdot 0,85^7 \approx 0,1298$$

(también está en la tabla que nos dan)

c) Probabilidad de que al menos la mitad de los motores funcionen correctamente

«Al menos la mitad» significa que al menos 5 de los 10 motores funcionan correctamente, que es exactamente lo mismo que decir «a lo sumo la mitad son defectuosos», es decir, $P(Y \leq 5)$, donde

$Y = \text{número de motores defectuosos}$, $Y \longrightarrow \mathcal{B}(10, 0.15)$:

$$\begin{aligned} P(Y \leq 5) &= P(Y = 0) + P(Y = 1) + P(Y = 2) + P(Y = 3) + P(Y = 4) + P(Y = 5) = \\ &= 0,1969 + 0,3474 + 0,2759 + 0,1298 + 0,0401 + 0,0085 \approx 0,9986 \end{aligned}$$

Pregunta 2 – Modelo exponencial de enfriamiento [Análisis Matemático - obligatoria]

La temperatura viene dada por:

$$T(t) = 20 + 160e^{-0,3t}$$

donde T está en $^{\circ}\text{C}$ y t en horas.

a) Temperatura a las 2 horas

$$T(2) = 20 + 160 \cdot e^{-0,3 \cdot 2} \approx 107,81 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

Conclusión: al cabo de 2 h la temperatura es de 107,81 $^{\circ}\text{C}$.

b) Tiempo en alcanzar los 50 $^{\circ}\text{C}$

Hay que resolver la ecuación:

$$\begin{aligned} 50 &= 20 + 160e^{-0,3t} \Rightarrow e^{-0,3t} = \frac{50-20}{160} \Rightarrow e^{-0,3t} = \frac{3}{16} \Rightarrow \log e^{-0,3t} = \log \frac{3}{16} \Rightarrow -0,3t = \log \frac{3}{16} \Rightarrow \\ t &= \frac{\log \frac{3}{16}}{-0,3} \approx 5,5799 \end{aligned}$$

donde $\log$ representa el logaritmo natural (neperiano).

Conclusión: para alcanzar los 50 $^{\circ}\text{C}$ tienen que transcurrir 5,58 horas.

c) Pendiente de la recta tangente en $t = 1$ (rapidez de enfriamiento)

Derivamos $T(t)$:

$$T'(t) = 160e^{-0,3t} \cdot (-0,3) = -48e^{-0,3t}$$

Evalúamos en $t = 1$:

$$T'(1) = -48e^{-0,3} \approx -35,56 \text{ °C/h}$$

El signo negativo indica que la temperatura está disminuyendo.

Conclusión: la rapidez de enfriamiento al cabo de 1 hora es de $-35,56 \text{ °C}$.

Pregunta 3 – Sistema de ecuaciones lineales con parámetro [Álgebra - obligatoria]

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x + ay + 3z = 7 \\ x + 2y + (a-1)z = a \end{cases}$$

a) Discusión del sistema según el valor de a

Matriz de coeficientes y matriz ampliada:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & a & 3 \\ 1 & 2 & a-1 \end{pmatrix} \text{ y } \bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & a & 3 & 7 \\ 1 & 2 & a-1 & a \end{pmatrix}$$

Determinante de A :

$$\det A = a(a-1) - 6 - [2(a-1) - 3] + (4-a) = a^2 - 4a + 3 = 0 \Rightarrow a = \begin{cases} 1 \\ 3 \end{cases}$$

Caso 1: $a \neq \begin{cases} 1 \\ 3 \end{cases} \Rightarrow \text{rango}(A) = \text{rango}(\bar{A}) = 3 = \text{número de incógnitas} \Rightarrow \text{S.C.D.}$

Caso 2: $a = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[-F_1+F_3]{-2F_1+F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2+F_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow 0 = -1 !! \text{ (Contradicción)}$$

Sistema Incompatible (SI): no tiene solución.

Caso 3: $a = 3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[-F_1+F_3]{-2F_1+F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-F_2+F_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow 0 = -1 !!$$

Sistema Incompatible (SI): no tiene solución.

Discusión: (aplicando el teorema de Rouché-Fröbenius)

Si $a \neq \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \Rightarrow \text{S.C.D. (solución única)}$

Si $a = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \Rightarrow \text{S.I. (no tiene solución)}$

b) Rango de M^2

Como $\det M = 12$ se tiene que $\det M^2 = \det M \cdot \det M = 12 \cdot 12 = 144 \neq 0 \Rightarrow \text{rango}(M) = 4$

PARTE B

Pregunta 4.1 – Recta, plano y punto en $\mathbb{R}^3$ [Geometría – optatividad]

Plano: $\pi \equiv 2x - y + 3z - 6 = 0$

Recta: $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{3}$

Punto: $P(2, 1, -1)$

a) Posición relativa entre r y π , y punto de corte

El vector director de r es $\vec{u}_r = (2, -1, 3)$ y el vector normal de π es $\vec{n}_\pi = (2, -1, 3)$.

Como $\vec{u}_r = \vec{n}_\pi$ (son iguales, y, por tanto, proporcionales), la recta es perpendicular al plano.

Para hallar el punto de corte, parametrizamos la recta:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -2 - \lambda \\ z = 3\lambda \end{cases} \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}$$

Sustituimos en la ecuación del plano:

$$2(1 + 2\lambda) - (-2 - \lambda) + 3 \cdot 3\lambda - 6 = 0 \Rightarrow 14\lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{7}$$

Sustituimos $\lambda = \frac{1}{7}$ en la ecuación de la recta:

$$\begin{cases} x = 1 + \frac{1}{7} = \frac{9}{7} \\ y = -2 - \frac{1}{7} = -\frac{15}{7} \\ z = \frac{3}{7} \end{cases} \Rightarrow \text{El punto de corte es } \left(\frac{9}{7}, -\frac{15}{7}, \frac{3}{7} \right)$$

Conclusión: la recta y el plano son perpendiculares y el punto de corte es $\left(\frac{9}{7}, -\frac{15}{7}, \frac{3}{7} \right)$

b) Distancia del punto $P(2, 1, -1)$ a la recta r :

Sabemos que la distancia de un punto a una recta viene dada por:

$$d(P, r) = \frac{|\vec{u}_r \times \vec{AP}|}{|\vec{u}_r|} \text{ donde } A \in r$$

$$\left. \begin{array}{l} A(1, -2, 0) \\ \vec{u}_r = (2, -1, 3) \\ \vec{AP} = (2, 1, -1) - (1, -2, 0) = (1, 3, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{u}_r \times \vec{AP} = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} = (8, -5, -7)$$

Módulos:

$$|\vec{u}_r| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

$$|\vec{AP}| = \sqrt{8^2 + (-5)^2 + (-7)^2} = \sqrt{138}$$

Distancia:

$$d(P, r) = \frac{\sqrt{138}}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{483}}{7} \text{ u}$$

Conclusión: la distancia pedida es $d(P, r) = \frac{\sqrt{483}}{7} \text{ u}$

Pregunta 4.2 – Recta y plano en $\mathbb{R}^3$ [Geometría – optatividad]

a) Ecuación general de la recta que pasa por $P(2, 0, -1)$ y $Q(3, 2, 0)$

Vector director: $\vec{u}_r = \overrightarrow{PQ} = (1, 2, 1)$

Ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases} \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

Despejamos λ de cada ecuación e igualamos:

- De la 1ª y 2ª: $\lambda = x - 2 = \frac{y}{2} \Rightarrow 2x - 4 = y \Rightarrow 2x - y - 4 = 0$
- De la 2ª y 3ª: $\lambda = \frac{y}{2} = z + 1 \Rightarrow y = 2z + 2 \Rightarrow y - 2z - 2 = 0$

$$r \equiv \begin{cases} 2x - y - 4 = 0 \\ y - 2z - 2 = 0 \end{cases}$$

Conclusión: la ecuación general de la recta que pasa por P y Q es $r \equiv \begin{cases} 2x - y - 4 = 0 \\ y - 2z - 2 = 0 \end{cases}$

b) Ecuación del plano que pasa por $P(2, 0, -1)$ y es paralelo a r y s

Vector director de r : $\vec{u}_r = (-1, 2, 0)$

Vector director de s : dada por la intersección de dos planos con vectores normales $\vec{n}_{\pi_1} = (1, -1, 2)$ y $\vec{n}_{\pi_2} = (1, 0, 1)$. Su vector director es:

$$\vec{u}_s = \vec{n}_{\pi_1} \times \vec{n}_{\pi_2} = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (-1, 1, 1)$$

El vector normal del plano (paralelo a ambas rectas) buscado es:

$$\vec{n}_\pi = \vec{u}_r \times \vec{u}_s = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (2, 1, 1)$$

Ecuación del plano:

$$2(x - 2) + 1(y - 0) + 1(z + 1) = 0 \Rightarrow \pi \equiv 2x + y + z - 3 = 0$$

Conclusión: la ecuación del plano pedido es $\pi \equiv 2x + y + z - 3 = 0$

Pregunta 5.1 – Continuidad y derivabilidad de una función a trozos [Análisis Matemático – optatividad]

$$f(x) = \begin{cases} ax^3 - 2x^2 + 5x - 1 & \text{si } x < 1 \\ bx^2 - 3x + 4 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Continuidad en $x = 1$: ¿ $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$?

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax^3 - 2x^2 + 5x - 1) = a + 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} (bx^2 - 3x + 4) = b + 1 = f(1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow a + 2 = b + 1 \Rightarrow a - b = -1 \quad [1]$$

Derivabilidad en $x = 1$: ¿ $\exists f'(1)$?

$$\left. \begin{aligned} x < 1 &\Rightarrow f'(x) = 3ax^2 - 4x + 5 \Rightarrow f'(1) = 3a + 1 \\ x > 1 &\Rightarrow f'(x) = 2bx - 3 \Rightarrow f'(1) = 2b - 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 3a + 1 = 2b - 1 \Rightarrow 3a - 2b = -4 \quad [2]$$

Resolvemos el sistema formado por las ecuaciones [1] y [2]:

$$\left. \begin{aligned} a - b &= -1 \\ 3a - 2b &= -4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow (a, b) = (-2, -1)$$

Conclusión: la función que cumple las condiciones dadas es $f(x) = \begin{cases} -2x^3 - 2x^2 + 5x - 1 & \text{si } x < 1 \\ -x^2 - 3x + 4 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

Pregunta 5.2 – Integral y límite [Análisis Matemático – optatividad]

a) Cálculo de $\int x \ln x dx$

Aplicamos integración por partes:

$$\int x \ln x dx = \left[\begin{array}{ll} u = \ln x & \xrightarrow{\text{derivando}} du = \frac{1}{x} dx \\ dv = x dx & \xrightarrow{\text{integrando}} v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right] = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x}{2} dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C$$

Conclusión: la primitiva pedida es $F(x) = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C$

b) Cálculo de $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}{2x^3 - 3x^2 + x}$

Primera forma:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}{2x^3 - 3x^2 + x} = \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{(1)}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2(x-2)}{x(2x-1)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-2)}{x(2x-1)} = 0$$

donde en (1) hemos factorizado numerador y denominador.

Segunda forma:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}{2x^3 - 3x^2 + x} = \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{(2)}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 8x + 5}{6x^2 - 6x + 1} = \frac{0}{1} = 0$$

donde en (2) hemos usado la regla de L'Hôpital.

Conclusión: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}{2x^3 - 3x^2 + x} = 0$