

INSTRUCCIONES: El estudiante deberá resolver los cuatro ejercicios propuestos. En **los ejercicios 3 y 4** deberá contestar solamente a **UNO** de los dos apartados propuestos. Si resuelve más, se corregirá solo el primero de los dos apartados resueltos. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Solo están permitidas **las calculadoras de tipo 1 y 2**. **Cada ejercicio completo puntuará 2.5 puntos**.
Duración de la prueba: 90 minutos.

Ejercicio 1.- En una ciudad, el 40% de los desplazamientos laborales se hacen en transporte público, el 45% en transporte privado y el 15% restante, caminando. En estos tipos de desplazamientos, las mujeres suponen el 55% en el transporte público, el 40% en el privado y el 60% entre las personas que se desplazan caminando.

- a) Calcula la probabilidad de que un desplazamiento laboral, elegido al azar, corresponda a una mujer. **(1 punto)**
- b) Si dicho desplazamiento laboral es realizado por una mujer, calcule la probabilidad de que haya sido hecho caminando. **(1 punto)**
- c) Si se seleccionan al azar dos desplazamientos laborales, calcule la probabilidad de que uno sea en transporte público y otro en transporte privado. **(0.5 puntos)**

Ejercicio 2.- Una determinada compañía de teatro presenta una obra en el Recinto Ferial de Albacete, dando sólo tres representaciones. Se sabe que el número de espectadores que asiste a la segunda representación se incrementó en un 12 % respecto a la primera, que en la tercera representación asistieron 336 espectadores menos que a la segunda y que el número de espectadores de la primera superó en 36 espectadores el de la tercera. Calcular el número de espectadores que asistieron a cada representación. **(Planteamiento: 1.5 puntos. Resolución: 1 punto)**

Ejercicio 3.- Elige y resuelve **sólo uno** de los dos apartados siguientes:

Apartado a) Se considera la función $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 3x + 10 & \text{si } x \leq k \\ x^2 - 4x + 9 & \text{si } x > k \end{cases}$

- a.1) ¿Para qué valores de k la función $f(x)$ es continua en $x = k$? **(1 punto)**
- a.2) Si $k = 1$, calcula los máximos y mínimos relativos de la función $f(x)$. **(0.5 puntos)**
- a.3) En ese mismo supuesto, determina en qué intervalos la función es creciente y en cuáles es decreciente. **(0.5 puntos)**
- a.4) Determina el área encerrada entre las dos curvas que definen la función $f(x)$. **(0.5 puntos)**

Apartado b) El índice de popularidad de cierto gobernante era de 2.5 puntos cuando inició su mandato. A los 50 días alcanzó el máximo índice de popularidad con 7.2 puntos. Sabiendo que durante los primeros 100 días de su mandato dicho índice fue cambiando de acuerdo con la expresión $I(t) = At^2 + Bt + C$ con $0 \leq t \leq 100$,

b.1) Determina, de forma justificada, el valor de las constantes A, B y C. **(1.5 puntos)**

b.2) Halla todas las matrices de la forma $A = \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$, donde $a, b \in \mathbb{R}$, distinta de $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ tales que

$$A^2 - A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad \textbf{(1 punto)}$$

Ejercicio 4.- Elige y resuelve **sólo uno** de los dos apartados siguientes:

Apartado a) El café mezcla se compone de la mezcla de otros dos, natural y tostado. Se tienen 500 kg de café natural y 500 kg de café tostado. En la mezcla, el doble de la cantidad de tostado debe ser menor o igual que el triple de la cantidad de natural. Para satisfacer la demanda, la producción debe ser mayor o igual a 600 kg de café. Sabiendo que cada kg de café natural cuesta 5 € el kg y cada kg de tostado cuesta 4 €,

a.1) Expresa la función objetivo, escribe mediante inecuaciones las restricciones del problema y representa gráficamente el recinto definido. **(1.5 puntos)**

a.2) Determina los kg de café tostado y natural que deben emplearse para hacer un café mezcla de coste mínimo que cumpla con los requisitos anteriores y obtén ese coste mínimo. **(1 punto)**

Apartado b) Una empresa envasa agua mineral en botellas de 1 litro. La cantidad de agua que la máquina embotelladora inyecta en cada botella sigue una distribución normal con una desviación típica de $\sigma = 0.05$ litros. Se toma una muestra aleatoria de 16 botellas y se observa que el contenido medio es de 0.98 litros. Con un nivel de confianza del 95%,

b.1) Obtén un intervalo de confianza para el contenido medio poblacional de una botella. **(1 punto)**

b.2) Explica, justificando la respuesta, cuál sería la amplitud del intervalo de confianza anterior si se aumenta la muestra a 64 botellas. **(0.75 puntos)**

b.3) Si se quiere que un contenido medio de 0.96 litros no esté contenido en el intervalo del primer apartado, justifique si se debe aumentar o disminuir el nivel de confianza. **(0.75 puntos)**

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

Ejercicio 1 – Probabilidad [Obligatorio]

Definimos los sucesos relacionados con el tipo de transporte:

Pu = Transporte público

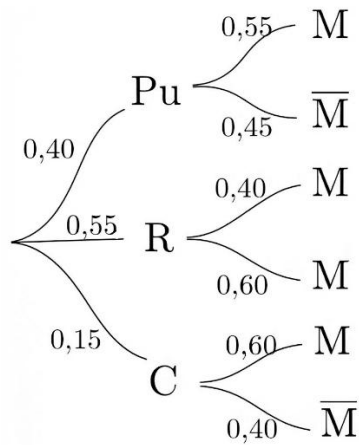
R = Transporte privado

C = Caminando

Y el suceso relacionado con el género:

M = Mujer

Construimos el árbol de probabilidades:



a) Probabilidad de que un desplazamiento sea realizado por una mujer

Aplicamos el Teorema de la Probabilidad Total:

$$P(M) = P(Pu)P(M/Pu) + P(R)P(M/R) + P(C)P(M/C) = 0,40 \cdot 0,55 + 0,55 \cdot 0,40 + 0,15 \cdot 0,60 = 0,49$$

La probabilidad es del 49 %.

b) Probabilidad de que haya sido caminando, sabiendo que lo realizó una mujer

Aplicamos el Teorema de Bayes:

$$P(C/M) = \frac{P(C \cap M)}{P(M)} = \frac{P(C)P(M/C)}{P(M)} = \frac{0,15 \cdot 0,60}{0,49} = \frac{9}{49} \approx 0,1837$$

La probabilidad es del 18,37 %.

c) Probabilidad de que, en dos desplazamientos, uno sea público y otro privado

Al ser una selección al azar (consideramos los sucesos independientes por ser una población grande), la probabilidad de que el primero sea público y el segundo privado, O BIEN el primero privado y el segundo público, es:

$$P[(Pu \cap R) \cup (R \cap Pu)] = P(Pu)P(R) + P(R)P(Pu) = 2 \cdot 0,40 \cdot 0,45 = 0,36$$

La probabilidad es del 36 %.

Ejercicio 2 – Sistema de ecuaciones lineales [Obligatorio]

Definimos las incógnitas:

x = número de espectadores de la primera representación.

y = número de espectadores de la segunda representación.

z = número de espectadores de la tercera representación.

Planteamos el sistema:

$$\begin{cases} y = x + 0,12x \\ z = y + 336 \\ x = z + 36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 112x - 100y = 0 \\ y - z = 336 \\ x - z = 36 \end{cases}$$

Lo resolvemos por el **método de Gauss**:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 36 \\ 0 & 1 & -1 & 336 \\ 112 & -100 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{-112F_1 + F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 36 \\ 0 & 1 & -1 & 336 \\ 0 & -100 & 112 & -4032 \end{array} \right) \xrightarrow{100F_2 + F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 36 \\ 0 & 1 & -1 & 336 \\ 0 & 0 & 12 & 29568 \end{array} \right) \begin{matrix} [1] \\ [2] \\ [3] \end{matrix}$$

$$\text{De [3]: } z = \frac{29568}{12} = 2464$$

$$\text{Sustituimos en [2]: } y - 2464 = 336 \Rightarrow y = 2800$$

Sustituimos en [1]: $x - 2464 = 36 \Rightarrow x = 2\ 500$

Conclusión: en la primera representación hay 2 500 espectadores, en la segunda, 2 800 y en la tercera, 2 464 espectadores.

Lo resolvemos ahora por la **Regla de Cramer**:

$$A = \begin{pmatrix} 112 & -100 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 0 \\ 336 \\ 36 \end{pmatrix} \Rightarrow AX = B \text{ con } |A| = \begin{vmatrix} 112 & -100 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -12 \neq 0$$

$$x = \frac{\det \begin{pmatrix} 0 & -100 & 0 \\ 336 & 1 & -1 \\ 36 & 0 & -1 \end{pmatrix}}{-12} = \frac{-30\ 000}{-12} = 2\ 500 \quad y = \frac{\det \begin{pmatrix} 112 & 0 & 0 \\ 0 & 336 & -1 \\ 1 & 36 & -1 \end{pmatrix}}{-12} = \frac{-33\ 600}{-12} = 2\ 800$$

$$z = \frac{\det \begin{pmatrix} 112 & -100 & 0 \\ 0 & 1 & 336 \\ 1 & 0 & 36 \end{pmatrix}}{-12} = \frac{-29\ 568}{-12} = 2\ 464$$

Conclusión: en la primera representación hay 2 500 espectadores, en la segunda, 2 800 y en la tercera, 2 464 espectadores.

Ejercicio 3.- Análisis y Álgebra [Optatividad]

Apartado a)

a.1) Valores de k para que $f(x)$ sea continua en $x = k$: $\lim_{x \rightarrow k} f(x) = f(k)$?

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow k^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow k^-} (-x^2 - 3x + 10) = -k^2 - 3k + 10 = f(k) \\ \lim_{x \rightarrow k^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow k^+} (x^2 - 4x + 9) = k^2 - 4k + 9 \end{aligned} \right\} \Rightarrow -k^2 - 3k + 10 = k^2 - 4k + 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2k^2 - k - 1 = 0 \Rightarrow k = \begin{cases} 1 \\ -1/2 \end{cases}$$

Conclusión: para $k = \begin{cases} 1 \\ -1/2 \end{cases}$ la función es continua en $x = k$.

a.2) Máximos y mínimos relativos si $k = 1$:

$$\bullet \quad x < 1 \Rightarrow f'(x) = -2x - 3 \Rightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ -2x - 3 = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

$f''(x) = -2 \Rightarrow f''\left(-\frac{3}{2}\right) < 0 \Rightarrow f$ tiene en $x = -\frac{3}{2}$ un máximo relativo de coordenadas

$$\left(-\frac{3}{2}, f\left(-\frac{3}{2}\right)\right) = \left(-\frac{3}{2}, \frac{49}{4}\right)$$

$$\bullet \quad x > 1 \Rightarrow f'(x) = 2x - 4 \Rightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2 \end{cases}$$

$f''(x) = 2 \Rightarrow f''(2) > 0 \Rightarrow f$ tiene en $x = 2$ un mínimo relativo de coordenadas $(2, f(2)) = (2, 5)$

a.3) Intervalos de crecimiento y decrecimiento (para $k = 1$):

$$\bullet \quad x < 1 \Rightarrow f'(x) = -2x - 3 > 0 \Rightarrow -2x - 3 > 0 \Rightarrow x < -\frac{3}{2}$$

$$\bullet \quad x > 1 \Rightarrow f'(x) = 2x - 4 > 0 \Rightarrow 2x - 4 > 0 \Rightarrow x > 2$$

Conclusión: $f(x)$ es $\begin{cases} \text{creciente en } \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) \cup (2, +\infty) \\ \text{decreciente en } \left(-\frac{3}{2}, 2\right) \end{cases}$

a.4) Área encerrada entre las dos curvas

Puntos de corte: igualamos ambas ramas (ya lo tenemos de la continuidad)

$$2x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Calculamos el área:

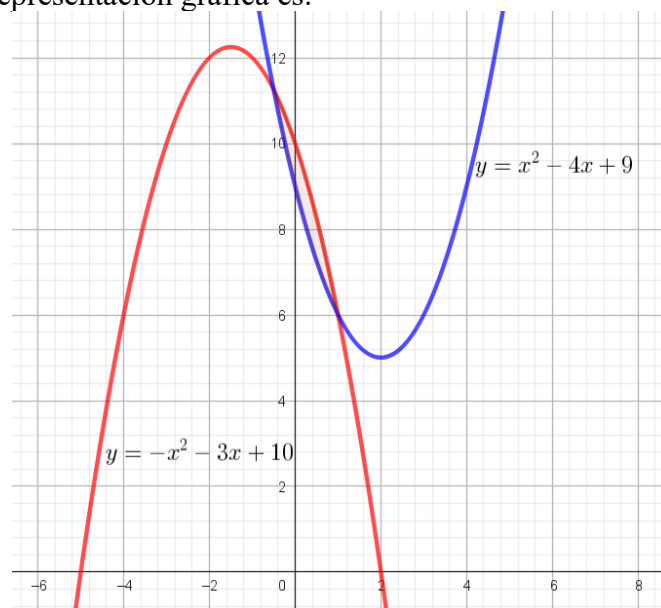
$$A = \left| \int_{-1/2}^1 (-x^2 - 3x + 10) - (x^2 - 4x + 9) dx \right| = \left| \int_{-1/2}^1 (-2x^2 + x + 1) dx \right| =$$

$$= F(1) - F\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{20}{24} - \left(-\frac{7}{24}\right) = \frac{27}{24} u^2$$

donde $F(x) = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + C$.

Conclusión: el área pedida es de $\frac{27}{24} u^2$

Aunque no se pide, la representación gráfica es:



Apartado b)

b.1) Determinar de las constantes A, B y C

$$\begin{cases} \text{Al inicio del mandato 2,5 puntos} \Rightarrow I(0) = 2,5 \\ \text{A los 50 días alcanzó el máximo de popularidad con 7,2 puntos} \Rightarrow \begin{cases} I'(50) = 0 \\ I(50) = 7,2 \end{cases} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C = 2,5 \\ 100A + B = 0 \\ 2500A + 50B + 2,5 = 7,2 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} 100A + B = 0 \\ 2500A + 50B + 2,5 = 7,2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 100A + B = 0 \\ 2500A + 50B = 4,7 \end{cases} \Rightarrow (A, B) = \left(-\frac{47}{25\,000}, \frac{47}{250} \right) \approx (-0,0019 ; 0,188)$$

Conclusión: para que la función verifique lo que nos dicen, $(A, B, C) = \left(-\frac{47}{25\,000}, \frac{47}{250}, \frac{5}{2} \right)$

b.2) Matrices $A = \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ tales que $A^2 - A = 0$

$$A^2 - A = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a^2 - a & a^2 + ab - a \\ 0 & b^2 - b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 - a = 0 \Rightarrow a(a-1) = 0 \Rightarrow a = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \\ a^2 + ab - a = 0 \quad [*] \\ 0 = 0 \\ b^2 - b = 0 \Rightarrow b(b-1) = 0 \Rightarrow b = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \end{cases}$$

Si $a = 0 \Rightarrow$ la ecuación $[*]$ se verifica $\Rightarrow b = \begin{cases} 0 \text{ (no vale, porque obtendríamos la matriz nula)} \\ 1 \end{cases}$

Si $a = 1 \Rightarrow$ (sustituyendo en $[*]$) $b = 0$

Conclusión: las matrices buscadas son: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Ejercicio 4.- Programación Lineal y Estadística [Optatividad]

Apartado a)

a.1) Planteamiento del problema

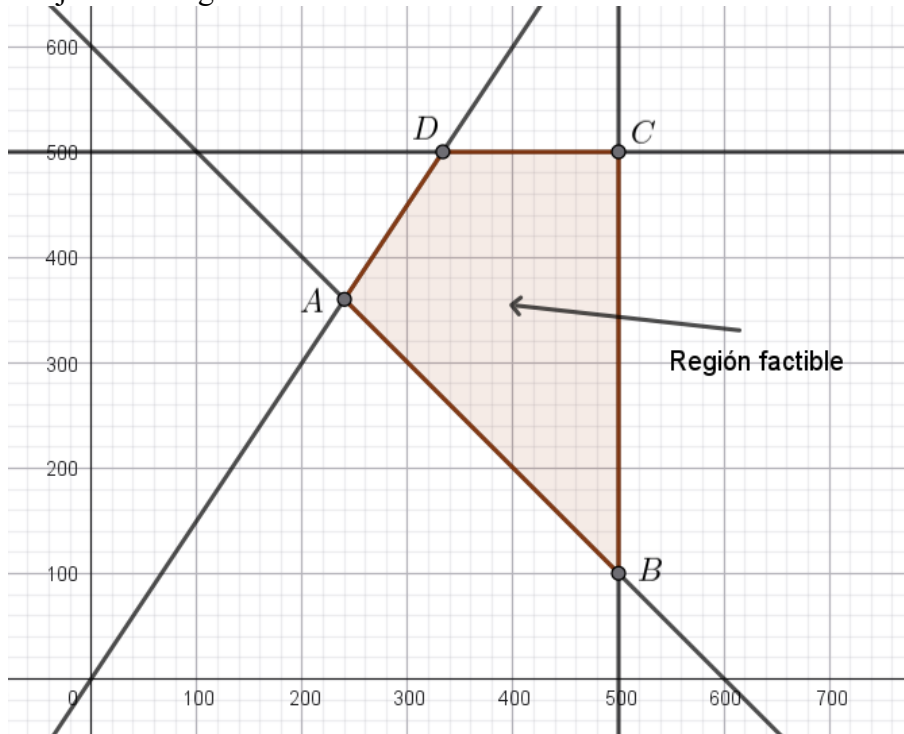
Variables: x = kg de café natural, y = kg de café tostado.

Función objetivo (minimizar coste): $C(x, y) = 5x + 4y$

Restricciones:

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 500, 0 \leq y \leq 500 \\ 2y \leq 3x \\ x + y \geq 600 \end{cases}$$

Dibujamos la región factible:



$$2y \leq 3x$$

$$2x - 3y = 0$$

x	y
0	0
300	200

(200,100) verifica la inecuación

$$x + y \geq 600$$

$$x + y = 600$$

x	y
0	600
600	0

(400,300) verifica la inecuación

Los vértices del recinto factible se obtienen de las intersecciones de las rectas frontera. Resolviendo los sistemas, los vértices son:

$$A \begin{cases} 3x - 2y = 0 \\ x + y = 600 \end{cases} \Rightarrow A(240, 360)$$

$$B(500, 100)$$

$$C(500, 500)$$

$$D \begin{cases} y = 500 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow D\left(\frac{1000}{3}, 500\right)$$

a.2) Evaluamos la función objetivo en los vértices:

$$C_A(240, 360) = 5 \cdot 240 + 4 \cdot 360 = 2\,640 \text{ €}$$

$$C_B(500, 100) = 5 \cdot 500 + 4 \cdot 100 = 2\,900 \text{ €}$$

$$C_C(500, 500) = 5 \cdot 500 + 4 \cdot 500 = 4\,500 \text{ €}$$

$$C_D\left(\frac{1000}{3}, 500\right) = 5 \cdot \frac{1000}{3} + 4 \cdot 500 \approx 3\,666,67 \text{ €}$$

Conclusión: el coste mínimo es de 2 640 €, empleando 240 kg de café natural y 360 kg de café tostado.

Apartado b)

b.1) Intervalo de confianza al 95 %

X = cantidad de agua que la máquina embotelladora inyecta en cada botella $\Rightarrow X \rightarrow N(\mu, 0.05)$

$$\text{con } \begin{cases} n = 16 \text{ botellas} \\ \bar{x} = 0,98 \text{ L} \\ \sigma = 0,05 \text{ L} \end{cases}$$

Nivel de confianza:

$$1 - \alpha = 94,64 \% = 0,95 \Rightarrow \alpha = 1 - 0,95 = 0,05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,025$$

$$P\left(Z < z_{\alpha/2}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - 0,025 = 0,975 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$$

Intervalo de confianza:

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(0,98 - 1,96 \cdot \frac{0,05}{\sqrt{16}}, 0,98 + 1,96 \cdot \frac{0,05}{\sqrt{16}}\right) = \\ = (0,9555, 1,0045)$$

b.2) Amplitud si la muestra aumenta a 64 botellas

La amplitud del intervalo es $A = 2 \cdot E = 2 \cdot z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2 \cdot 1,96 \cdot \frac{0,05}{\sqrt{16}} = 0,049$.

Como la muestra se cuadruplica ($64 = 4 \cdot 16$), la amplitud disminuiría (se reduciría a la mitad), ya que la amplitud es inversamente proporcional a la raíz cuadrada del tamaño de la muestra. Al aumentar de 16 a 64, el denominador se multiplica por 2 (pasa de 4 a 8), lo que hace que el error máximo y, por tanto, la amplitud total del intervalo, se reduzcan a la mitad, haciendo la estimación más precisa.

b.3) Exclusión de 0,96 litros del intervalo

El valor 0,96 sí está contenido en el intervalo original $(0,9555, 1,0045)$. Para que no esté contenido, necesitamos que el intervalo se haga más estrecho (menor amplitud) hasta que su límite inferior supere a 0,96. Como la amplitud depende del nivel de confianza (a través de $z_{\alpha/2}$), se debe disminuir el nivel de confianza. Al bajar la confianza (por ejemplo, al 90 %), el valor crítico $z_{\alpha/2}$ será menor, el intervalo se estrechará y el valor 0,96 quedará fuera de él.