

SOLUCIONES

Problema 16

Un tonel contenía 57 litros de vino. Con el contenido del tonel se han llenado 34 botellas de $\frac{3}{4}$ de litro cada una. ¿Cuántas botellas de medio litro se podrán llenar con el vino que queda en el tonel?

Solución:

$$34 \cdot \frac{3}{4} = \frac{102}{4} = \frac{51}{2} \text{ L (vino usado en las 34 botellas)}$$

$$57 - \frac{51}{2} = \frac{114}{2} - \frac{51}{2} = \frac{63}{2} \text{ L (vino restante)}$$

Para calcular el número de botellas de $\frac{1}{2}$ litro que se pueden llenar, dividimos la cantidad de vino restante, entre la capacidad de las botellas ($\frac{1}{2}$):

$$\frac{63}{2} : \frac{1}{2} = 63$$

Solución: se podrán llenar 63 botellas.

Problema 17

¿Cuál es la longitud del radio de una rueda que para recorrer $1 + \frac{9}{11}$ m necesita dar 10 vueltas completas?

Solución:

Expresamos la distancia como fracción impropia: $1 + \frac{9}{11} = \frac{20}{11}$ m

La distancia recorrida en 10 vueltas es $10 \cdot 2\pi r$.

Igualando:

$$10 \cdot 2\pi r = \frac{20}{11} \Rightarrow r = \frac{\frac{20}{11}}{20\pi} = \frac{1}{11\pi} \text{ m}$$

Solución: el radio mide $\frac{1}{11\pi}$ m y es un número irracional.

$$10 \times 2\pi r = \frac{20}{11}$$

Problema 18

Una fuente mana 92 litros de agua en 12 minutos. ¿Cuántos litros de agua manará en minuto y medio?

Solución:

El caudal por minuto es:

$$\frac{92}{12} = \frac{23}{3} \text{ L/min}$$

$$\frac{92}{12} = \frac{23}{3} \text{ L/min}$$

Calculamos el agua que mana en 1,5 minutos = $\frac{3}{2}$ min:

$$\frac{23}{3} \cdot 1,5 = \frac{23}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{23}{2} = 11,5 \text{ L}$$

Solución: manará 11,5 litros.

Problema 19

¿Cuál es el precio de un litro de aceite de girasol sabiendo que 16 litros y medio cuestan 8,16 €?

Solución:

Expresamos las cantidades como fracciones:

$$16,5 = \frac{165}{10} = \frac{33}{2} \text{ L y } 8,16 = \frac{816}{100} = \frac{204}{25} \text{ €}$$

Dividimos:

$$\frac{204}{25} : \frac{33}{2} = \frac{408}{825} = \frac{136}{275} \text{ €/L}$$

Su expresión decimal es:

$$136 : 275 = 0,49454545... = 0,4945$$

Solución: el precio es $\frac{136}{275}$ €/L = 0,494545... (decimal periódico mixto)

Problema 20

¿Cuál es el precio de medio metro de cuerda si un metro y medio cuesta 42,29 €?

Solución:

Si 1,5 m cuestan 42,29 €, entonces 0,5 m cuestan la tercera parte:

$$\frac{42,29}{3} = 14,09666... = 14,09\widehat{6}$$

Solución: medio metro cuesta $\frac{42,29}{3} = 14,09666... = 14,09\widehat{6}$ € (decimal periódico mixto)

Problema 21

Una caja contiene cuarenta docenas de huevos y se rompe la quinta parte de la mitad. ¿Cuántos huevos quedan sin romper?

Solución;

$$[(40 \cdot 12) : 2] : 5 = [480 : 2] : 5 = 240 : 5 = 48 \text{ huevos se han roto}$$

Quedan

$$480 - 48 = 432$$

Solución: quedan 432 huevos sin romper.

Problema 22

A principios de año, la presa estaba a los $\frac{2}{5}$ de su capacidad. Durante el año se han gastado los $\frac{2}{7}$ del volumen embalsado. ¿Cuál es el contenido a finales de año?

Solución:

Agua embalsada inicialmente: $\frac{2}{5}$ de la capacidad.

Agua gastada: $\frac{2}{7}$ de $\frac{2}{5} = \frac{4}{35}$

Agua restante: $\frac{2}{5} - \frac{4}{35} = \frac{14}{35} - \frac{4}{35} = \frac{10}{35} = \frac{2}{7}$

Solución: a finales de año, el pantano está a $\frac{2}{7}$ de su capacidad.

Problema 23

Un Ayuntamiento ha adquirido los $\frac{7}{8}$ de una finca de $5\frac{2}{6}$ ha. Los $\frac{4}{7}$ de la superficie adquirida se dedican a viviendas. ¿Cuántas hectáreas ocupa la zona de viviendas?

Solución:

Superficie total de la finca: $5 + \frac{2}{6} = \frac{16}{3}$ ha

Superficie adquirida: $\frac{7}{8}$ de $\frac{16}{3} = \frac{7}{8} \cdot \frac{16}{3} = \frac{14}{3}$ ha

Superficie para viviendas: $\frac{4}{7}$ de $\frac{14}{3} = \frac{4}{7} \cdot \frac{14}{3} = \frac{8}{3}$ ha

Solución: la zona de viviendas ocupará $\frac{8}{3}$ ha $\approx 2,67$ ha

Problema 24

El $0,8$ de los habitantes se vacunaron y contrajeron la enfermedad $\frac{144}{181}$ de la población. ¿Cuántos habitantes tiene el pueblo si son menos de 2000?

Solución:

Convertimos el decimal en fracción: $0,8 = \frac{8}{9}$

Llamamos x = número de habitantes del pueblo

Para que tanto $\frac{8}{9}$ de x como $\frac{144}{181}$ de x sean números enteros, x debe ser múltiplo de 9 y de 181.

Como 181 es primo:

$$m.c.m.(9,181) = 9 \cdot 181 = 1629$$

El único múltiplo menor que 2000 es 1629.

Comprobación: $\frac{8}{9}$ de 1629 = 1448 vacunados; $\frac{144}{181}$ de 1629 = 1296 enfermos.

Solución: el pueblo tiene 1629 habitantes.

Problema 25

En un quiosco se vende $\frac{1}{8}$ de las revistas por la mañana y $0,1$ por la tarde. ¿Cuántas revistas había en total sabiendo que eran menos de 100?

Solución:

Expresamos el decimal en forma de fracción: $0,1 = \frac{1}{9}$

Llamamos x al número de revistas vendidas.

Para que $\frac{1}{8}$ de x y $\frac{1}{9}$ de x sean enteros, x debe ser múltiplo de 8 y de 9:

$$m.c.m.(8,9) = 72$$

El único múltiplo menor que 100 es 72.

Solución: había 72 revistas en total.

Problema 26

¿Es un número racional la longitud del lado de un rombo cuyas diagonales miden 4 cm y 6 cm?

Solución:

Las diagonales de un rombo se cortan perpendicularmente en su punto medio, formando triángulos rectángulos con catetos:

$$\frac{4}{2} = 2 \text{ cm y } \frac{6}{2} = 3 \text{ cm}$$

Aplicado el teorema de Pitágoras, el lado es la hipotenusa mide:

$$x^2 = 2^2 + 3^2 \Rightarrow x = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13} \text{ cm}$$

Como 13 es primo y no es un cuadrado perfecto, $\sqrt{13}$ es irracional.

Solución: no, la longitud del lado no es un número racional, ya que $\sqrt{13}$ es irracional.

Problema 27

Pedro dispone de 3 botellas de vino (1,25 kg cada una), 4 quesos (3 kg cada uno) y 2 jamones (4 kg cada uno). La cesta no puede pesar más de 19 kg. ¿Cuál es la composición que mejor se aproxima al máximo?

Solución:

Artículo	Cantidad	Peso
Vino	3	1,25 kg
Queso	4	3 kg
Jamón	2	4 kg

Probamos combinaciones cercanas a 19 kg:

Jamones	Quesos	Vinos	Peso total
2	3	1	$8 + 9 + 1,25 = 18,25 \text{ kg}$
1	4	2	$4 + 12 + 2,5 = 18,50 \text{ kg}$
2	2	3	$8 + 6 + 3,75 = 17,75 \text{ kg}$
2	3	2	$8 + 9 + 2,5 = 19,5 \text{ kg}$

La combinación que más se acerca a 19 kg sin pasarse es 18,5 kg.

Solución: 1 jamón + 4 quesos + 2 botellas de vino = 18,5 kg.

Problema 28

En una receta se necesitan $\frac{3}{8}$ de litro de leche. María tiene una jarra graduada en decimales exactos.

a) ¿Cuántos litros debe verter? b) Si triplica la receta, ¿el nuevo volumen sigue siendo un decimal exacto?

Solución:

a) $\frac{3}{8} = 0,375 \text{ L}$ (decimal exacto).

b) $3 \cdot \frac{3}{8} = \frac{9}{8} = 1,125 \text{ L}$. Sigue siendo decimal exacto, ya que el denominador $8 = 2^3$ solo tiene el factor primo 2.

Solución: a) 0,375 L. b) Sí, 1,125 L, que es decimal exacto porque el denominador solo tiene factores de 2.

Problema 29

Un grifo pierde $\frac{2}{11}$ de litro cada hora. a) Expresa esta cantidad como decimal y clasifícalo. b) ¿Cuántos litros pierde en 24 horas?

Solución:

a) $\frac{2}{11} = 0,181818... = 0,18 \rightarrow$ Decimal periódico puro

b) En 24 horas:

$$\frac{2}{11} \cdot 24 = \frac{48}{11} \approx 4,363636... = 4,36 \text{ (Decimal periódico puro)}$$

Solución: a) 0,18 (Decimal periódico puro). b) $\frac{48}{11}$ L = 2,36 L.

Problema 30

Tres amigos cenan juntos y la cuenta es de 100 €. Pagan a partes iguales. a) ¿Puede cada uno pagar una cantidad exacta en euros y céntimos? b) Si cada uno paga 33,33 €, ¿cuánto falta o sobra?

Solución:

a) $\frac{100}{3} = 33,333... = 33,3 \text{ €} \rightarrow$ Decimal periódico puro. No se puede pagar una cantidad exacta en euros y céntimos.

b) $100 - 3 \cdot 33,33 = 100 - 99,99 = 0,01 \text{ €}$ (1 céntimo)

Solución: a) No, la cuota es $33,3$. b) Falta 1 céntimo.

Problema 31

Un estudiante afirma que $\frac{7}{28}$ produce un decimal periódico. a) ¿Tiene razón? Simplifica, obtén el decimal y clasifícalo. b) Encuentra un decimal periódico puro con período de tres cifras comprendido entre $\frac{7}{28}$ y $\frac{1}{3}$.

Solución:

a) Simplificamos:

$$\frac{7}{28} = \frac{1}{4} = 0,25 \text{ (decimal exacto)}$$

No tiene razón. El estudiante probablemente no simplificó y al dividir 7 entre 28 obtuvo un resto que le hizo pensar que era periódico, pero la fracción simplificada tiene denominador $4 = 2^2$, que solo tiene factores de 2, lo que garantiza un decimal exacto.

b) Buscamos un número entre 0,25 y 0,333... con período de 3 cifras.

Elegimos, por ejemplo: $0,275275... = 0,275$

Como fracción: $\frac{275}{999}$

Comprobamos que es irreducible: $275 = 5^2 \cdot 11$ y $999 = 3^3 \cdot 37$. No tienen factores comunes $\rightarrow$ irreducible. (Se puede hacer con la calculadora)

Solución: a) No tiene razón: $\frac{7}{28} = \frac{1}{4} = 0,25$ (exacto). b) $0,275 = \frac{275}{999}$.

Problema 32

El perímetro de un cuadrado mide $10,\widehat{6}$ cm. a) Longitud exacta del lado como fracción irreducible. b) Área exacta como fracción, como decimal y clasificación.

Solución:

Convertimos $10,\widehat{6}$ en fracción: $10,\widehat{6} = \frac{106-10}{9} = \frac{32}{3}$

a) Lado:

$$l = \frac{\frac{32}{3}}{4} = \frac{8}{3} \text{ cm}$$

b) Área:

$$A = \left(\frac{8}{3}\right)^2 = \frac{64}{9} \text{ cm}^2$$

Como decimal: $\frac{64}{9} = 7,111... = 7,\widehat{1} \rightarrow$ Decimal periódico puro.

Solución: a) $l = \frac{8}{3}$ cm. b) $A = \frac{64}{9} \text{ cm}^2 = 7,\widehat{1} \text{ cm}^2$ (decimal periódico puro).

Problema 33

Un caracol avanza a $0,\widehat{3}$ m/min y una tortuga a $0,\widehat{45}$ m/min. La tortuga da 2 m de ventaja al caracol. ¿Cuánto tarda en alcanzarlo?

Solución:

Paso 1. Convertimos las velocidades a fracción:

$$0,\widehat{3} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \text{ m/min}$$

$$0,\widehat{45} = \frac{45-4}{90} = \frac{41}{90} \text{ m/min}$$

Velocidad relativa (la tortuga gana terreno a):

$$\frac{41}{90} - \frac{1}{3} = \frac{11}{90} \text{ m/min}$$

Tiempo para recuperar 2 m:

$$t = \frac{2}{\frac{11}{90}} = \frac{180}{11} \text{ min}$$

Como decimal:

$$\frac{180}{11} \text{ min} = 16,36 \text{ min}$$

Solución: la tortuga tarda $\frac{180}{11}$ min = 16,36 min en alcanzar al caracol.

Problema 34

Una calculadora de 8 dígitos muestra $0,33333333$ para $1:3$. Un estudiante dice que el resultado exacto es $\frac{33\,333\,333}{100\,000\,000}$. a) Explica por qué tiene razón en el contexto de la máquina, pero no matemáticamente. b) Calcula la diferencia exacta entre $1/3$ y el valor de la calculadora. ¿Es mayor o menor que una millonésima?

Solución:

a) El estudiante tiene razón en el contexto de la máquina porque la calculadora solo puede mostrar un número finito de dígitos (8 cifras decimales), por lo que trunca el resultado a $0,333\ 333\ 33 = \frac{33\ 333\ 333}{100\ 000\ 000}$. Sin embargo, matemáticamente el valor exacto de $1:3 = \frac{1}{3} = 0,\hat{3}$, un

decimal periódico puro con infinitos treses. La fracción $\frac{33\ 333\ 333}{100\ 000\ 000}$ es un número racional con expresión decimal finita, que es distinto de $\frac{1}{3}$.

b) Diferencia exacta y comparación:

$$\frac{1}{3} - \frac{33\ 333\ 333}{100\ 000\ 000} = \frac{1}{300\ 000\ 000} < \frac{1}{1\ 000\ 000}$$

Solución: la diferencia es $\frac{1}{300\ 000\ 000}$ que es mucho menor que una millonésima.