UCLM Universidad Castilla-La Mancha

Prueba de acceso a la Universidad

Curso 2025/2026

Materia: Matemáticas II

INSTRUCCIONES: El estudiante **deberá resolver obligatoriamente las preguntas de la 1 a la 3,** y **elegir una opción de las dos propuestas en la pregunta 4 y 5.** Es decir, en las preguntas 4 y 5, contestará UNA sola de las opciones propuestas. Si resuelve más, se corregirá solo el primero de los dos apartados resueltos. Las respuestas a los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando dichas respuestas, ya que **se valorará en estas y en los procedimientos desarrollados el rigor matemático. Su falta se podrá penalizar con hasta 1 punto en todo el examen.** Solo se permite el uso de **calculadoras de tipo 1 y 2,** tal y como se indica en la información de las pruebas. Cada ejercicio completo puntuará 2 puntos. **Duración de la prueba: 90 minutos**.

PARTE A (preguntas 1, 2 y 3). Conteste TODAS las preguntas de esta parte

Pregunta 1.

En un estudio sobre hábitos de consumo digital, se observa que la edad de las personas suscritas a plataformas de películas y series en streaming puede modelizarse mediante una distribución normal de media 34 años y desviación típica de 6 años.

Sea X la variable aleatoria que representa la edad, en años, de una persona suscrita elegida al azar. Calcula:

a) **[1 punto]** La probabilidad de que una persona suscrita elegida al azar tenga una edad comprendida entre 28 y 46 años.

b) **[1 punto]** La edad K tal que el 15,87% de las personas suscritas tenga una edad superior a K años.

Pregunta 2.

En la toma de un antibiótico vía oral, la concentración en sangre (mg/l) tras su administración se puede modelizar como la función $C(t) = \frac{12t}{t^2+4}$, donde t es el tiempo transcurrido, en horas, desde la toma.

a) **[1 punto]** Determina el momento en el que la concentración en sangre es máxima.

b) **[1 punto**] La concentración media de dicho medicamento en el intervalo de tiempo [a, b] viene dada por la expresión $\frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b C(t)dt$. Calcula la concentración media entre las 0 y 6 horas.

Pregunta 3.

a) **[1,5 puntos]** Estudia el rango de la siguiente matriz, en función del parámetro real a.

$$A = \begin{pmatrix} a & a-1 & a^2-a \\ a & 1 & a \\ a & 1 & a-1 \end{pmatrix}$$

b) **[0,5 puntos]**¿Para qué valores de a la matriz A tiene inversa? Justifica tu respuesta.

PARTE B (preguntas 4 y 5)

Pregunta 4. Conteste solo UNA de las siguientes preguntas (4.1 o 4.2)

4.1. Se consideran los puntos A(1, 1, 0), B(2,0, 1), C(0,2,1) y D(a, 1, 2), con a un número real.

a) **[0,75 puntos]** Determina la ecuación del plano que pasa por los puntos A, B y C.

b) **[1,25 puntos]** Determina los valores reales del parámetro a, para que el tetraedro formado por los cuatro puntos del enunciado tenga volumen 3 unidades cúbicas.

4.2. Sean los puntos del espacio A(1, 2, -1), B(3, 6, 1) y C(m, m, m-2), donde m es un número real.

a) **[0,75 puntos]** Determina el valor de m para que los puntos A, B y C estén alineados.

b) **[1,25 punto]** Para el valor de m obtenido en el apartado anterior, determina la distancia del punto P(2,0,1) a la recta que forman A, B y C.

Pregunta 5. Conteste solo UNA de las siguientes preguntas (5.1 o 5.2)

5.1. Dada la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$

a) **[1 punto]** Halla, razonadamente, los coeficientes a, b y c sabiendo que la función tiene un extremo relativo en el punto de coordenadas (1,4) y que la recta tangente en el punto de abscisa x=3 es paralela a la recta de ecuación $y = 2x - 1$

b) **[1 punto]** Para los valores de los coeficientes obtenidos en el apartado anterior, determina la ecuación de la recta normal a f(x) en x=0.

5.2. Resuelve los siguientes apartados

a) **[1,25 puntos]** Calcula razonadamente el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones $f(x) = \frac{3}{x}$ y $g(x) = -x + 4$.

b) **[0,75 puntos]** Calcula razonadamente el siguiente límite $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - senx - 1}{x^2}$

	0	**0,01**	**0,02**	**0,03**	**0,04**	**0,05**	**0,06**	**0,07**	**0,08**	**0,09**
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952

Julio 2026

Cipri

PARTE A

1 X = edad de las personas suscritas a plataformas de películas

$\mu = 34$ años, $\sigma = 6$ años $\Big\} \; X \rightsquigarrow N(34, 6)$

a) $P(28 \leq X \leq 46) = P\left(\frac{28-34}{6} \leq Z \leq \frac{46-34}{6}\right) = P(-1 \leq Z \leq 2) =$

$= P(Z \leq 2) - P(Z \leq -1) = P(Z \leq 2) - [1 - P(Z \leq 1)] =$

$= 0{,}9772 - (1 - 0{,}8413) = \boxed{0{,}8185}$

b) k tal que el 15,87% de las personas suscritas tenga una edad superior a k años $\Leftrightarrow P(X > k) = 0{,}1587 \overset{(1)}{\Leftrightarrow}$

$\Leftrightarrow P(X \leq k) = 1 - 0{,}1587 = 0{,}8413$

(donde en (1) hemos tenido en cuenta la simetría de la normal)

$P(X \leq k) = 0{,}8413 = P\left(Z \leq \frac{k-34}{6}\right) \Rightarrow$ (mirando en la tabla)

$\frac{k-34}{6} = 1 \Rightarrow \boxed{k = 40 \text{ años}}$

2 $C(t) = \frac{12t}{t^2+4}$ para $t \geq 0$

a) Momento en el que la concentración es máxima

$C'(t) = \frac{12(t^2+4) - 12t \cdot 2t}{(t^2+4)^2} = \frac{12t^2 + 48 - 24t^2}{(t^2+4)^2} = \frac{-12t^2+48}{(t^2+4)^2}$

$C'(t) = 0 \Rightarrow -12t^2 + 48 \Rightarrow t = \pm\sqrt{4} = \pm 2 \Rightarrow t = 2$ (ya que $t \geq 0$)

$C''(t) = \frac{-24t(t^2+4)^2 - (-12t^2+48) \cdot 2(t^2+4) \cdot 2t}{(t^2+4)^4}$

$C''(2) = -\frac{3}{4} < 0 \Rightarrow t = 2$ es un máximo relativo de coordenadas

$(2, C(2)) = (2, 3)$

Solución: la concentración es máxima a las 2 h, desde la toma

b) Concentración media en $[a,b]$: $\frac{1}{b-a}\int_a^b C(t)\,dt$ Cipri

Calculamos la concentración media en $[0,6]$: $C_m(t)$

$$C_m(t) = \frac{1}{6-0}\int_0^6 C(t)\,dt = \frac{1}{6}\int_0^6 \frac{12t}{t^2+4}\,dt = \frac{1}{6}\,6\log(t^2+4)\Big]_0^6 =$$

$$= \log 40 - \log 4 \simeq 2{,}30 \text{ mg/L}$$

donde log representa el logaritmo natural (neperiano).

(3) $A = \begin{pmatrix} a & a-1 & a^2-a \\ 1 & a & 1 \\ a & a-1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Rango de A en función de a

- Aplicando el método de Gauss

$$\begin{pmatrix} a & a-1 & a^2-a \\ 1 & a & 1 \\ a & a-1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & a-1 & a^2-a \\ a & a-1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[-aF_1+F_3]{-aF_1+F_2}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & -a^2+a-1 & a^2-2a \\ 0 & -a^2+a-1 & 1-a \end{pmatrix} \xrightarrow{-F_2+F_3} \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & -a^2+a-1 & a^2-2a \\ 0 & 0 & -a^2+a+1 \end{pmatrix}$$

Analizamos los pivotes de la diagonal principal:

$1 \neq 0$

$-a^2+a-1=0 \Rightarrow a \notin \mathbb{R}$

$-a^2+a+1=0 \Rightarrow a = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

Conclusión:

Si $a \neq \frac{1\pm\sqrt{5}}{2} \Rightarrow rg(A)=3$

Si $a = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2} \Rightarrow rg(A)=2$

b) ¿Para qué valores de a la matriz A tiene inversa?

Una matriz cuadrada tiene inversa si, y solo si, su rango es máximo (igual a su dimensión, 3)

Conclusión: $\exists A^{-1} \Leftrightarrow a \neq \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ $\left(\forall a \in \mathbb{R} - \left\{\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}\right)$

a) Aplicando determinantes:

$$\det(A) = \det\begin{pmatrix} a & a-1 & a^2-a \\ 1 & a & 1 \\ a & a-1 & 1 \end{pmatrix} = a^2+(a-1)\cdot a + (a^2-a)(a-1) -$$

$$-\left[(a^2-a)a^2+(a-1)+(a-1)\right] = -a^4+2a^3-a^2+1$$

$$\det(A) = -(a^4-2a^3+a^2)+1 = -a^2(a-1)^2+1 = 1-[a(a-1)]^2 =$$

$$= 1-(a^2-a)^2 = \underset{\text{diferencia de cuadrados}}{\uparrow}\left[1+(a^2-a)\right]\left[1-(a^2-a)\right] = (a^2-a+1)(-a^2+a+1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2-a+1=0 \Rightarrow a \notin \mathbb{R} \\ -a^2+a+1=0 \Rightarrow a = \dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

¡¡OJO!!
La ecuación $\det(A)=0$ no se puede factorizar por Ruffini.

Si $a \neq \frac{1\pm\sqrt{5}}{2} \Rightarrow$ rango $(A)=3$

Si $a = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2} \Rightarrow$ rango $(A)<3$

$$\begin{vmatrix} a & a-1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^2-(a-1) = a^2-a+1 = 0 \Rightarrow a \notin \mathbb{R} \Rightarrow \text{rango}(A)=2$$

Conclusión:

Si $a \neq \frac{1\pm\sqrt{5}}{2} \Rightarrow$ rango $(A)=3$

Si $a = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2} \Rightarrow$ rango $(A)=2$

(4) Pregunta 4.1

$A(1,1,0)$, $B(2,0,1)$, $C(0,2,1)$ y $D(a,1,2)$

a) $\pi \equiv$ plano determinado por A, B y C $\equiv \{A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\}$

$$\left.\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= (2,0,1)-(1,1,0) = (1,-1,1) \\ \overrightarrow{AC} &= (0,2,1)-(1,1,0) = (-1,1,1) \end{aligned}\right\} \text{Son linealmente independientes}$$

$$\pi \equiv \det\begin{pmatrix} x-1 & 1 & -1 \\ y-1 & -1 & 1 \\ z & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{x+y-z=0 \equiv \pi}$$

b) ¿a para que $V_{\substack{Tetraedro\\A,B,C,D}} = 3\ u^3$?

Sabemos que $V_{\substack{Tetraedro\\A,B,C,D}} = \frac{1}{6}\left|[\vec{AB},\vec{AC},\vec{AD}]\right|$

$\vec{AD} = (a-1,0,2)$

$$[\vec{AB},\vec{AC},\vec{AD}] = \det\begin{pmatrix} 1 & -1 & a-1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 2-2a$$

$$V = \frac{1}{6}|2-2a| = 3 \Rightarrow |2-2a| = 18 \Rightarrow \begin{cases} 2-2a = 18 \Rightarrow a = -8 \\ 2-2a = -18 \Rightarrow a = 10 \end{cases}$$

Conclusión

Para $a = \begin{cases} -8 \\ 10 \end{cases}$, $V_{\substack{Tetraedro\\A,B,C,D}} = 3\ u^3$

Pregunta 4.2

$A(1,2,-1)$, $B(3,6,1)$, $C(m,m,m-2)$

a) ¿m para que A, B y C estén alineados ?

A, B, C alineados $\Leftrightarrow$ $\vec{AB}$ y $\vec{AC}$ proporcionales

$$\left.\begin{array}{l} \vec{AB} = (2,4,2) \\ \vec{AC} = (m-1,m-2,m-1) \end{array}\right\} \frac{m-1}{2} = \frac{m-2}{4} = \frac{m-1}{2} \Rightarrow$$

$$\frac{m-1}{2} = \frac{m-2}{4} \Rightarrow 4m-4 = 2m-4 \Rightarrow m = 0 \quad \text{(la otra igualdad es igual)}$$

Conclusión: para $m = 0$, los puntos A, B y C están alineados

b) $d(P,r)$ donde $\begin{cases} P(2,0,1) \\ r \equiv \text{recta determinada por A, B y C} = \{A, \vec{AB}\} \end{cases}$

$\vec{AB} = (3,6,1) - (1,2,-1) = (2,4,2) = \vec{u}_r$ (vector director de r)

Sabemos que $d(P,r) = \dfrac{|\vec{AP} \times \vec{u}_r|}{|\vec{u}_r|}$

$\vec{AP} = (2,0,1) - (1,2,-1) = (1,-2,2)$

$$\overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{u_r} = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} = -12\vec{i} + 2\vec{j} + 8\vec{k} = (-12, 2, 8)$$ Cipri

$$|\overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{u_r}| = \sqrt{(-12)^2 + 2^2 + 8^2} = 2\sqrt{53}$$

$$|\overrightarrow{u_r}| = \sqrt{2^2 + 4^2 + 2^2} = 2\sqrt{6}$$

$$\frac{2\sqrt{53}}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{318}}{6}$$

Conclusión: $d(P, r) = \frac{\sqrt{318}}{6}$ u

(5) Pregunta 5.1

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$

a) f tiene un extremo relativo en $(1,4)$ $\Longrightarrow \begin{cases} f(1) = 4 \\ f'(1) = 0 \end{cases}$

la recta tangente a f en $x = 3$ es $\parallel$ a $y = 2x - 1 \Rightarrow f'(3) = 2$ (ya que dos rectas paralelas tienen la misma pendiente)

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

Condiciones: $f(1) = 4 \Rightarrow 1 + a + b + c = 4$

$f'(1) = 0 \Rightarrow 2a + b = -3$

$f'(3) = 2 \Rightarrow 27 + 6a + b = 2 \Rightarrow 6a + b = -25$

Resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} a + b + c = 3 \\ 2a + b = -3 \xrightarrow{\cdot(-1)} -2a - b = 3 \\ 6a + b = -25 \end{cases}$$

$$\underline{6a + b = -25}$$

$$4a = -22 \Rightarrow a = -\frac{11}{2}$$

Sustituimos en la 2ª ecuación: $b = -3 - 2 \cdot \left(-\frac{11}{2}\right) = 8$

Sustituimos en la 1ª ecuación: $c = 3 + \frac{11}{2} - 8 = \frac{1}{2}$

Conclusión: para $(a, b, c) = \left(-\frac{11}{2}, 8, \frac{1}{2}\right)$, la función cumple lo que se pide

b) Ec. de la recta normal a f en $x = 0$

La ec. de la recta normal a f en $x = a$ es: $y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a)$

$f'(0) = 8$, $f(0) = \frac{1}{2}$ **Conclusión:** la ec. de la recta normal a f en $x = 0$ es

$$y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{8}x$$

Pregunta 5.2

Cipri

a) Área del recinto limitado por $f(x)=\frac{3}{x}$ y $g(x)=-x+4$

Calculamos los puntos de corte de f y g (límites de integración)

$$f(x)=g(x) \Rightarrow \frac{3}{x}=-x+4 \Rightarrow 3=-x^2+4x \Rightarrow -x^2+4x-3=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\begin{cases}1\\3\end{cases}$$

Área:

$$\boxed{A=\left|\int_1^3 (g(x)-f(x))\,dx\right|}=\left|\int_1^3 \left(-x+4-\frac{3}{x}\right)dx\right|=$$

$$=\left|-\frac{x^2}{2}+4x-3\log(x)\Big]_1^3\right|=\left|\frac{15}{2}-3\log 3-\frac{7}{2}\right|=\boxed{4-3\ln 3\ u^2}$$

donde log representa el logaritmo natural (neperiano).

b) $$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\operatorname{sen}x-1}{x^2}}=\left[\frac{0}{0}\right]\underset{(1)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\cos x}{2x}=\left[\frac{0}{0}\right]\underset{(1)}{=}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+\operatorname{sen}x}{2}=\frac{1+0}{2}=\boxed{\frac{1}{2}}$$

donde en (1) hemos aplicado la regla de L'Hôpital.