

INSTRUCCIONES: El estudiante deberá resolver los cuatro ejercicios propuestos. En **los ejercicios 3 y 4** deberá contestar solamente a **UNO** de los dos apartados propuestos. Si resuelve más, se corregirá solo el primero de los dos apartados resueltos. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Solo están permitidas **las calculadoras de tipo 1 y 2**. **Cada ejercicio completo puntuará 2.5 puntos**.
Duración de la prueba: 90 minutos.

Ejercicio 1.- En una Comunidad Autónoma, el 75% de las personas reside en núcleos urbanos, el 10% en núcleos rurales, y, el 15% restante, en núcleos periurbanos. En estos núcleos, las personas que viven de alquiler suponen el 40% en los urbanos, el 10% en los rurales y el 30% en los periurbanos.

- a) Calcula la probabilidad de que una persona, elegida al azar, viva de alquiler. **(1 punto)**
- b) Si una persona, elegida al azar, vive de alquiler, calcula la probabilidad de que lo haga en un núcleo urbano. **(1 punto)**
- c) Si se seleccionan al azar dos personas, calcula la probabilidad de que una de ellas resida en un núcleo rural y la otra en uno periurbano. **(0.5 puntos)**

Ejercicio 2.- Un grupo de 30 alumnos de 2º de bachillerato realiza una votación a fin de determinar el campus universitario que prefieren visitar: Ciudad Real, Cuenca y Toledo. El número de los que prefieren Ciudad Real triplica al número de los que prefieren Toledo. El 40 % de los que prefieren Cuenca coincide con la quinta parte de la suma de los que prefieren los otros dos lugares. Halla el número de votos que obtuvo cada campus. **(Planteamiento: 1,5 puntos. Resolución: 1 punto)**

Ejercicio 3.- Elige y resuelve **sólo uno** de los dos apartados siguientes:

Apartado a) Se considera la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 3 & \text{si } x \leq k \\ -3x^2 + 3 & \text{si } x > k \end{cases}$

- a.1) ¿Para qué valores de k la función $f(x)$ es continua en $x = k$? **(1 punto)**
- a.2) Si $k = -1$, calcula los máximos y mínimos relativos de la función $f(x)$. **(0.75 puntos)**
- a.3) En ese mismo supuesto, determina en qué intervalos la función es creciente y en cuáles es decreciente. **(0.75 puntos)**

Apartado b) El volumen de agua, en millones de litros, almacenado por el embalse de Alarcón a lo largo de un periodo de 11 años en función del tiempo t en años viene dado por la función: $V(t) = t^3 - 24t^2 + 180t + 8000$ con $0 \leq t \leq 11$.

- b.1) La cantidad de agua almacenada en el último año. **(0.25 puntos)**
- b.2) El año del periodo en el que el volumen almacenado fue máximo. **(1 punto)**
- b.3) El volumen máximo que se alcanzó en ese periodo. **(0.25 puntos)**
- b.4) Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 8 & -9 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}$, halla la matriz X que cumple que $AXA^{-1} = B$. **(1 punto)**

Ejercicio 4.- Elige y resuelve **sólo uno** de los dos apartados siguientes:

Apartado a) Un fabricante de abanicos dispone de dos modelos, A y B. El modelo A requiere, para su fabricación, 40 cm² de papel, 80 cm² de lámina de madera y 1 enganche metálico. El modelo B requiere: 60 cm² de papel, 160 cm² de lámina de madera y 1 enganche metálico. El coste de producción de cada modelo es de 1,20 € el de A y 1,30 € el de B. El precio de venta es de 3 € cada uno, independientemente del modelo. Teniendo en cuenta que las existencias son de 3000 cm² de papel, 7200 cm² de lámina de madera y 70 enganches.

- a.1) Expresa la función objetivo, escribe mediante inecuaciones las restricciones del problema y representa gráficamente el recinto definido. **(1.5 puntos)**
- a.2) Determina el número de abanicos que deben fabricarse y venderse para que el beneficio sea máximo y encuentra dicho beneficio máximo. **(1 punto)**

Apartado b) Una empresa fitosanitaria afirma que la duración, en días, del efecto de su fungicida sigue una distribución normal con una desviación típica de $\sigma = 6$ días. Se suministra el fungicida a una muestra aleatoria de 16 plantas y se observa que la duración media del efecto es de 16 días. Con un nivel de confianza del 95%,

- b.1) Obtén un intervalo de confianza para la duración media poblacional del efecto. **(1 punto)**
- b.2) Explica, justificando la respuesta, cuál sería la amplitud del intervalo de confianza anterior si se aumenta la muestra a 64 plantas. **(0.75 puntos)**
- b.3) Si se desea que una duración media de 14 días del efecto no esté contenida en el intervalo del apartado b.1), justifique si se debe aumentar o disminuir el nivel de confianza. **(0.75 puntos)**

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

JULIO 2026

Cipri

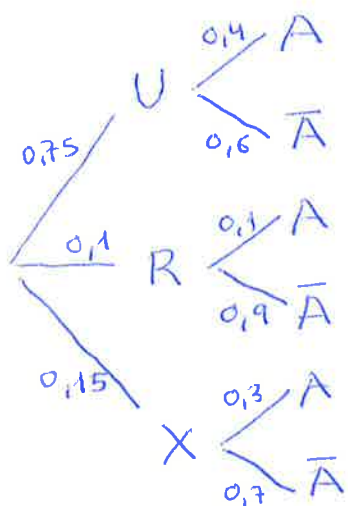
① Nombramos los sucesos y construimos el árbol de probabilidad:

U = persona que reside en un núcleo urbano

R = " " " " " rural

X = " " " " " periurbano

A = " " vive de alquiler



a) Aplicamos el teorema de la probabilidad total:

$$\boxed{P(A) = P(U)P(A/U) + P(R)P(A/R) + P(X)P(A/X)} = 0,75 \cdot 0,4 + 0,1 \cdot 0,1 + 0,15 \cdot 0,3 = \boxed{0,355}$$

b) Aplicamos el teorema de Bayes:

$$\boxed{P(U/A) = \frac{P(U \cap A)}{P(A)} = \frac{P(U)P(A/U)}{P(A)}} = \frac{0,75 \cdot 0,4}{0,355} = \boxed{0,8451}$$

c) $\boxed{P(R \cap X) = P(R)P(X) + P(X)P(R) = 2 \cdot 0,1 \cdot 0,15 = 0,03}$

② Nombramos las variables y planteamos el sistema

$$\begin{cases} X = \text{nº de alumnos que prefieren visitar Ciudad Real} \\ Y = \text{" " " " " " " Cuenca} \\ Z = \text{" " " " " " " Toledo} \end{cases}$$

$$\begin{cases} X + Y + Z = 30 \\ X = 3Z \\ \frac{40}{100} Y = \frac{1}{5}(X + Z) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X + Y + Z = 30 \\ X - 3Z = 0 \\ X - 2Y + Z = 0 \end{cases}$$

Lo resolvemos por Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 30 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{-F_1 + F_2 \\ -F_1 + F_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 30 \\ 0 & -1 & -4 & -30 \\ 0 & -3 & 0 & -30 \end{array} \right) \begin{matrix} [1] \\ [2] \\ [3] \end{matrix}$$

De [3]: $y = \frac{-30}{-3} = 10$

Sustituimos en [2]: $z = \frac{30 - 10}{4} = 5$

Sustituimos en [1]: $x = 30 - 10 - 5 = 15$

Cipri

Solución: hay 15 alumnos que prefieren visitar Ciudad Real, 10 que prefieren visitar Cuenca y 5 que prefieren visitar Toledo.

Lo resolvemos ahora por la regla de Cramer

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = -12$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 30 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}}{-12} = \frac{-180}{-12} = 15, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 30 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{-12} = \frac{-120}{-12} = 10$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 30 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}}{-12} = \frac{-60}{-12} = 5$$

Solución: hay 15 alumnos que prefieren visitar Ciudad Real, 10 que prefieren Cuenca y 5 que prefieren Toledo.

3) Apartado a)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 3 & x \leq k \\ -3x^2 + 3 & x > k \end{cases}$$

3.1) Continuidad en $x=k$: ¿ $\exists \lim_{x \rightarrow k} f(x) = f(k)$?

$$\lim_{x \rightarrow k^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow k^-} (x^2 + 4x + 3) = k^2 + 4k + 3 = f(k)$$

$$\lim_{x \rightarrow k^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow k^+} (-3x^2 + 3) = -3k^2 + 3$$

$$\Rightarrow k^2 + 4k + 3 = -3k^2 + 3 \Rightarrow 4k^2 + 4k = 0 \Rightarrow k = \begin{cases} 0 \\ -1 \end{cases}$$

Conclusión: para $k = \begin{cases} 0 \\ -1 \end{cases}$, $f(x)$ es continua en $x=k$

3.2) Extremos relativos para $k = -1$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 3 & x \leq -1 \\ -3x^2 + 3 & x > -1 \end{cases}$$

Para $x \leq -1$

Cipri

$$y = x^2 + 4x + 3 \Rightarrow y' = 2x + 4 \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow x = -2$$

$$y'' = 2 \Rightarrow f''(-2) = 2 > 0 \Rightarrow f \text{ tiene en}$$

$x = -2$ un mínimo relativo de coordenadas $(-2, f(-2)) = (-2, -1)$

Para $x > -1$

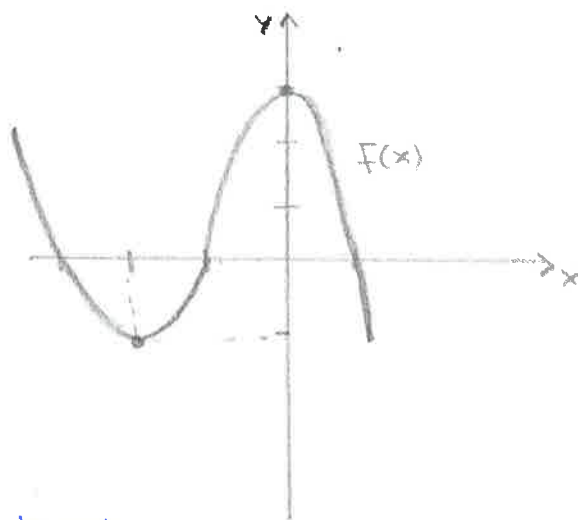
$$y = -3x^2 + 3 \Rightarrow y' = -6x \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$y'' = -6 \Rightarrow f''(0) = -6 < 0 \Rightarrow f \text{ tiene en } x = 0$$

un máximo relativo de coordenadas $(0, f(0)) = (0, 3)$

En $x = -1$ no hay cambio en la monotonía y, por tanto, no es un extremo relativo.

Conclusión: f tiene un mínimo relativo en $(-2, -1)$, un máximo relativo en $(0, 3)$ y en $x = -1$ no tiene extremos relativos.



2.3) Monotonía para $k = -1$

$$\text{Para } x \leq -1, f'(x) = 2x + 4$$

$$\text{signo de } f' \quad \begin{array}{c} - \quad + \\ | \quad | \\ -2 \quad -1 \end{array}$$

$$\text{Para } x > -1, f'(x) = -6x$$

$$\text{signo de } f' \quad \begin{array}{c} + \quad - \\ | \quad | \\ -1 \quad 0 \end{array}$$

Conclusión: f es $\begin{cases} \text{creciente en } (-2, 0) \\ \text{decreciente en } (-\infty, -2) \cup (0, +\infty) \end{cases}$

Apartado b

Cipri

$$V(t) = t^3 - 24t^2 + 180t + 8000, \quad 0 \leq t \leq 11$$

$V(t)$ en millones de litros

t en años

b.1) Agua almacenada en el último año

$$V(11) = 11^3 - 24 \cdot 11^2 + 180 \cdot 11 + 8000 = 8407$$

Conclusión: el último año se almacenaron 8407 millones de litros de agua

b.2) Volumen almacenado máximo.

$$V'(t) = 3t^2 - 48t + 180$$

$$V'(t) = 0 \Rightarrow 3t^2 - 48t + 180 = 0 \Rightarrow t = \begin{cases} 6 \\ 10 \end{cases}$$

$$V''(t) = 6t - 48$$

$$V''(6) = -12 \Rightarrow t = 6 \text{ es un máximo relativo de } V(t)$$

$$V''(10) = 12 \Rightarrow t = 10 \text{ es un mínimo relativo de } V(t)$$

Conclusión: el sexto año fue en el que el volumen de agua almacenada fue máxima, siendo dicho volumen de $V(6) =$
 $= 6^3 - 24 \cdot 6^2 + 180 \cdot 6 + 8000 = 8432$ millones de litros

$$b.3) A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 8 & -9 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}$$

Despejamos X :

$$AXA^{-1} = B \Rightarrow A^{-1}AXA^{-1} = A^{-1}B \Rightarrow XA^{-1} = A^{-1}B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow XA^{-1}A = A^{-1}BA \Rightarrow \boxed{X = A^{-1}BA}$$

Calculamos A^{-1} por Gauss-Jordan:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{F_2: (-1)}]{F_1: 2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{-\frac{1}{2}F_2 + F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array} \right)$$

Calculamos X

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & -9 \\ 6 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -8 \\ -6 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & -1 \\ -12 & 1 \end{pmatrix}}$$

4) Apartado a)

Cipri

$\begin{cases} X = \text{número de abanicos de tipo A} \\ Y = \text{" " " de tipo B} \end{cases}$

Función objetivo: $B(x,y) = (3-1,2)x + (3-1,3)y = 1,8x + 1,7y$

$$\text{Restricciones: } \begin{cases} x+y \leq 70 \\ 40x+60y \leq 3000 \rightarrow 2x+3y \leq 150 \\ 80x+160y \leq 7200 \rightarrow x+2y \leq 90 \\ x,y \geq 0 \end{cases}$$

Dibujamos la región factible

$$x+y \leq 70$$

$$2x+3y \leq 150$$

$$x+2y \leq 90$$

$$x+y=70$$

$$2x+3y=150$$

$$x+2y=90$$

x	y
0	70
70	0

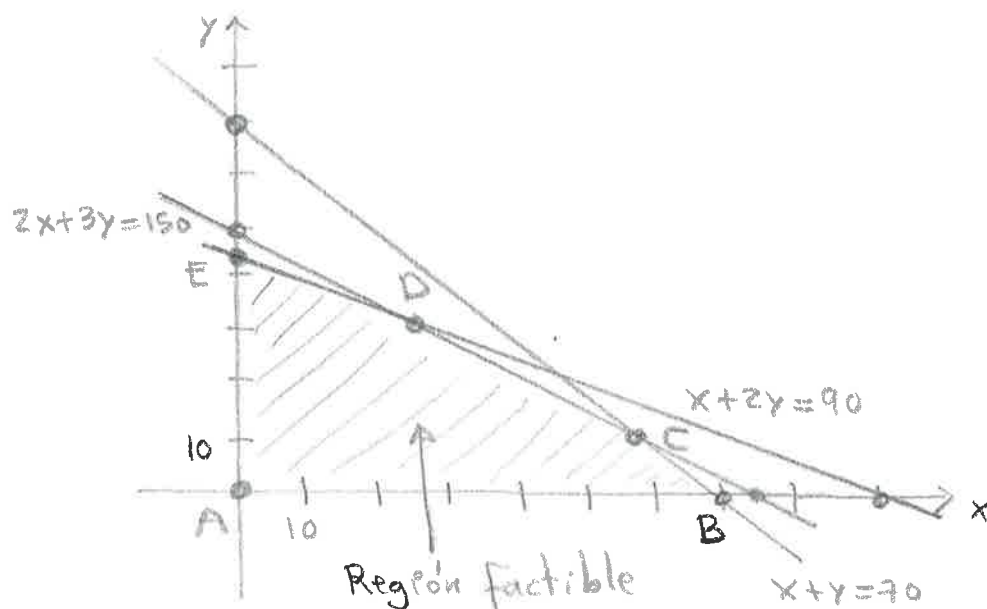
$$0+0 \leq 70 \Rightarrow (0,0) \checkmark$$

x	y
0	50
75	0

$$2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 \leq 150 \Rightarrow (0,0) \checkmark$$

x	y
0	45
90	0

$$0+2 \cdot 0 \leq 90 \Rightarrow (0,0) \checkmark$$



Calculamos los vértices (puntos extremos)

$$\begin{array}{l} A(0,0) \\ B(70,0) \end{array} \quad \left| \quad D \begin{cases} x+2y=90 \xrightarrow{\cdot(-2)} -2x-4y=-180 \\ 2x+3y=150 \end{cases} \Rightarrow D(30,30)$$

$$C \begin{cases} 2x+3y=150 \\ x+y=70 \xrightarrow{\cdot(-2)} -2x-2y=-140 \end{cases} \Rightarrow C(60,10)$$

$$E(0,45)$$

Evaluamos la función objetivo:

$$B_A(0,0) = 0$$

$$B_B(70,0) = 1,8 \cdot 70 = 126$$

$$B_C(60,10) = 1,8 \cdot 60 + 1,7 \cdot 10 = 125$$

$$B_D(30,30) = 1,8 \cdot 30 + 1,7 \cdot 30 = 105$$

$$B_E(0,45) = 1,7 \cdot 45 = 76,5$$

Conclusión: el beneficio será máximo cuando venda 70 abanicos de tipo A y 0 de tipo B, en cuyo caso, dicho beneficio máximo será de 126 €

Apartado b

b.1.) Intervalo de confianza al 95%

$\bar{X}$ = duración (en días) del efecto de su fungicida

$\sigma = 6$ días, $n = 16$, $\bar{X} = 16$ días

$$X \sim N(\mu, 6)$$

$$\left(\bar{X} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) = \left(16 - 1,96 \frac{6}{\sqrt{16}}, 16 + 1,96 \frac{6}{\sqrt{16}} \right) = \\ = (13,06, 18,94)$$

ya que $1 - \alpha = 95\% = 0,95 \Rightarrow \alpha = 1 - 0,95 = 0,05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,025 \Rightarrow$

$$\Rightarrow P(Z < z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - 0,025 = 0,975 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$$

b.2.) Amplitud del IC. si $n = 64$ plantas

1ª forma: calculand. las amplitudes

$$A_{IC_{n=16}} = 18,94 - 13,06 = 5,88$$

$$A_{IC_{n=64}} = 2 \cdot 1,96 \frac{6}{\sqrt{64}} = 2,94$$

2ª forma: usando proporcionalidad inversa

Como el tamaño muestral se cuadruplica ($64 = 16 \cdot 4$), la amplitud se reduce a la mitad ($5,88 \div 2 = 2,94$), ya que la

amplitud es inversamente proporcional a $\sqrt{n}$.

b.3) $\mu = 14 \in IC_{95\%}$, luego para que no pertenezca a dicho intervalo tenemos que disminuir la amplitud del mismo y para ello, hay que disminuir el nivel de confianza.