



Evaluación para el Acceso a la Universidad. Convocatoria de 2023
Materia: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II
El examen está compuesto de tres secciones de dos bloques cada una. A su vez cada bloque tiene dos ejercicios. El alumno deberá elegir un bloque de cada una de las tres secciones. Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora. Es necesario detallar el proceso de resolución de los ejercicios.

Sección 1 (3 puntos) Bloque 1

1. En el siguiente problema de programación lineal optimiza la función $f(x, y) = -x - 5y + 10$ sujeta a las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} x - y \geq 0 \\ -4 \leq x \leq 4 \\ -1 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

- Dibuja la región factible y determina sus vértices. (1.25 puntos)
- Indica los puntos óptimos (máximo y mínimo) y sus respectivos valores. (0.25 puntos)

2. La discografía de un legendario grupo de rock se reedita en tres discos (I, II y III) y las ventas totales ascienden a 70000 unidades. Sabemos que del disco III se vendieron las mismas unidades que entre los otros dos discos juntos y que la diferencia entre las unidades vendidas del III y las del II equivalen al triple de la diferencia entre las unidades vendidas del II y las del I.

- Plantea el sistema de ecuaciones para calcular qué cantidad de unidades de cada disco se vendieron. (0.75 puntos)
- Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.75 puntos)

Bloque 2

1. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + tx - 1 & \text{si } x \leq 1 \\ x + t & \text{si } x > 1 \end{cases}$

- ¿Para qué valor de t la función $f(x)$ es continua en $x = 1$? (0.5 puntos)
- Para $t = 2$, calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $(-\infty, 1)$. (0.5 puntos)
- Para $t = 2$, calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en $(-\infty, 1)$. (0.5 puntos)

2. La función $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$ tiene un punto de inflexión en $(2, -5)$ y la pendiente de la recta tangente en ese mismo punto es -12 . Calcula razonadamente los valores de los parámetros a , b , y c . (1.5 puntos)

Sección 2 (3.5 puntos) Bloque 1

3. En un determinado instituto el 50 % de los estudiantes prefiere como red social Facebook, pero un 30 % de estos no publica habitualmente nada. El 35 % prefiere Instagram, pero solo el 30 % de los que prefieren esta plataforma hacen publicaciones habitualmente. Finalmente, el resto de los estudiantes prefiere TikTok y un 60 % de estos no publica habitualmente.

- Elegido un estudiante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no publique habitualmente nada en su red social preferida? (0.75 puntos)
- Si se sabe que un estudiante publica habitualmente, ¿cuál es la probabilidad de que su red social preferida sea Instagram? (0.75 puntos)

4. Una asociación benéfica ha tomado una muestra de 9 personas y ha registrado las cantidades donadas por estas personas, obteniendo 60, 40, 55, 35, 20, 25, 50, 45 y 30 euros. Si el dinero donado sigue una distribución normal de media desconocida y varianza $\sigma^2 = 100$ euros²,

- Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional del dinero donado con un nivel de confianza del 97 %. (1 punto)
- Calcula el tamaño mínimo de la muestra elegida para que, con el mismo nivel de confianza, el error máximo admisible sea menor que 2 euros. (1 punto)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857

Bloque 2

3. Un teatro ha vendido las 660 entradas disponibles que tenía para un espectáculo. El número de entradas que se han vendido para jubilados es la cuarta parte de las entradas que se han vendido para adultos. Además, las entradas para niños equivalen al 10 % de las que se han vendido entre adultos y jubilados.

- Plantea el sistema de ecuaciones para calcular cómo se han repartido las entradas entre adultos, jubilados y niños. (0.75 puntos)
- Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.75 puntos)

4. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$,

- Calcula $A \cdot B \cdot C^T$ (0.75 puntos)
- Calcula $\frac{1}{3}B^2 - I$, donde I es la matriz identidad de orden 3. (0.75 puntos)
- Razona si se puede calcular $(A - B) - C$ y $B \cdot C$ (No es necesario realizar las operaciones). (0.5 puntos)

Sección 3 (3.5 puntos) Bloque 1

5. De los 80 estudiantes solicitantes de una beca Erasmus en Italia, 50 son mujeres. Se seleccionan al azar y sin reposición a 3 estudiantes que serán los que disfruten de la beca Erasmus en ese destino. Calcular la probabilidad de que:

- a) Los tres seleccionados sean mujeres. (0.5 puntos)
- b) Los tres seleccionados sean del mismo sexo. (0.5 puntos)
- c) Al menos dos de los seleccionados sean hombres. (0.5 puntos)

6. Un fabricante de motores para coches de Fórmula 1 ha tomado una muestra aleatoria de 81 motores para examinar su peso, proporcionando una media de 153 kg. Si se sabe que el peso de los motores sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma = 30$ kg,

- a) Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional del peso de los motores con un nivel de confianza del 95 %. (1 punto)
- b) ¿Cuál sería el error máximo admisible si se hubiera utilizado una muestra de tamaño 100 y un nivel de confianza del 93.12 %? (0.5 puntos)
- c) El fabricante afirma que el peso medio de los motores es de 145 kg. ¿Se puede aceptar la afirmación del fabricante con un nivel de confianza del 92 %? Justificar la respuesta. (0.5 puntos)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

Bloque 2

5. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} -(x+t)^2 + 2 & \text{si } x \leq -2 \\ t - 2 & \text{si } -2 < x \leq 2 \\ x^2 - (t+3)x + 9 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

- a) ¿Existe un valor de t para el que la función $f(x)$ es continua en $x = -2$ y en $x = 2$? (0.75 puntos)
- b) Representa gráficamente la función $f(x)$ para $t = 3$. (0.75 puntos)

6. La altura, medida en metros, que alcanza una pelota lanzada verticalmente hacia arriba viene expresada en función del tiempo por $H(x) = 20x - 2x^2$ con $x =$ tiempo en segundos y $0 \leq x \leq 10$.

- a) ¿Qué altura habrá alcanzado la pelota a los 3 segundos? (0.5 puntos)
- b) ¿En qué momentos la pelota se encuentra a 32 metros de altura? (0.5 puntos)
- c) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la pelota? ¿En qué momento? (1 punto)

SOLUCIONES

SECCIÓN 1

BLOQUE 1 - EJERCICIO 1 (Programación lineal)

Variables: x, y

Función objetivo: $f(x, y) = -x - 5y + 10$

$$\text{Restricciones: } \begin{cases} x - y \geq 0 \\ -4 \leq x \leq 4 \\ -1 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

Región factible y vértices:

Región factible

$$x - y \geq 0$$

$$x - y = 0$$

x	y
0	0
1	1

(2,1) verifica la inecuación

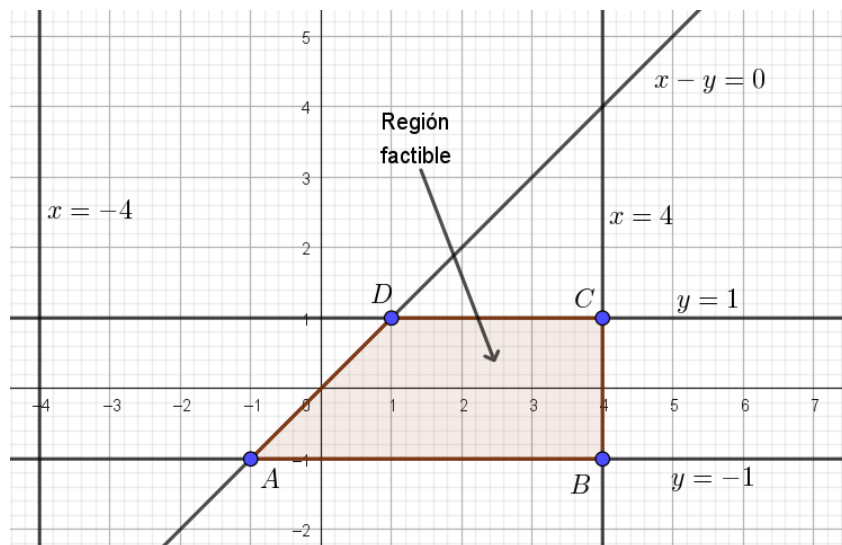
Vértices (puntos extremos)

$$A \begin{cases} y = -1 \\ x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow A(-1, -1)$$

$$B(4, -1)$$

$$C(4, 1)$$

$$D \begin{cases} y = 1 \\ x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow D(1, 1)$$



Evaluamos la función objetivo en los vértices:

$$f_A(-1, -1) = -(-1) - 5 \cdot (-1) + 10 = 16$$

$$f_B(4, -1) = -4 - 5 \cdot (-1) + 10 = 11$$

$$f_C(4, 1) = -4 - 5 \cdot 1 + 10 = 1$$

$$f_D(1, 1) = -1 - 5 \cdot 1 + 10 = 4$$

Solución: el máximo se obtiene en $(-1, -1)$ y dicho valor máximo es 16 y el mínimo se obtiene en $(4, 1)$ y dicho valor mínimo es 1.

BLOQUE 1 - EJERCICIO 2 (Álgebra: sistema de ecuaciones)

$$\begin{cases} x = \text{número de unidades vendidas del disco I} \\ y = \text{número de unidades vendidas del disco II} \\ z = \text{número de unidades vendidas del disco III} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 70000 \\ x + y = z \\ z - y = 3(y - x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 70000 \\ x + y - z = 0 \\ -3x + 4y - z = 0 \end{cases}$$

Resolución por el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 70\ 000 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & 4 & -1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{-F_1+F_2 \\ 3F_1+F_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 70\ 000 \\ 0 & 0 & -2 & -70\ 000 \\ 0 & 7 & 2 & 210\ 000 \end{array} \right) \begin{matrix} [1] \\ [2] \\ [3] \end{matrix}$$

De [2]: $z = \frac{-70000}{-2} = 35000$

Sustituimos en [3]: $y = \frac{210000 - 2 \cdot 35000}{7} = 20000$

Sustituimos en [1]: $x = 70000 - 20000 - 35000 = 15000$

Conclusión: se han vendido 15 000 unidades del disco I, 20 000 unidades del disco II y 35 000 unidades del disco III.

Resolución por la regla de Cramer:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix} = 14$$

$$x = \frac{\det \begin{pmatrix} 70000 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}}{14} = \frac{210000}{14} = 15000, \quad y = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & 70000 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}}{14} = \frac{280000}{14} = 20000$$

$$z = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 70000 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \end{pmatrix}}{14} = \frac{490000}{14} = 35000$$

Conclusión: se han vendido 15 000 unidades del disco I, 20 000 unidades del disco II y 35 000 unidades del disco III.

BLOQUE 2 - EJERCICIO 1 (Análisis)

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + tx - 1 & \text{si } x \leq 1 \\ x + t & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

a) Continuidad en $x = 1$: ¿ $\exists \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$?

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x^2 + tx - 1) = 1 + t = f(1) \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x + t) = 1 + t \end{array} \right\} \Rightarrow 1 + t = 1 + t \text{ que es cierta siempre (es una identidad)}$$

Conclusión: para que $f(x)$ se continúe en $x = 1$, $\forall t \in \mathbb{R}$

b) Para $t = 2$, calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $(-\infty, 1)$.

$$f(x) = 2x^2 + 2x - 1$$

$$f'(x) = 4x + 2$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 4x + 2 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

$$f''(x) = 4$$

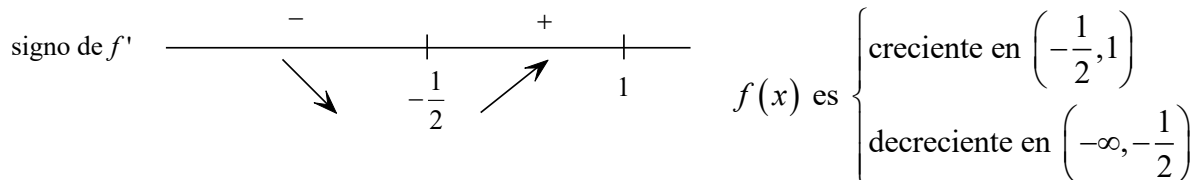
$$f''\left(-\frac{1}{2}\right) > 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \text{ es un mínimo relativo de coordenadas } \left(-\frac{1}{2}, f\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$$

c) Para $t = 2$, calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ en el intervalo $(-\infty, 1)$.

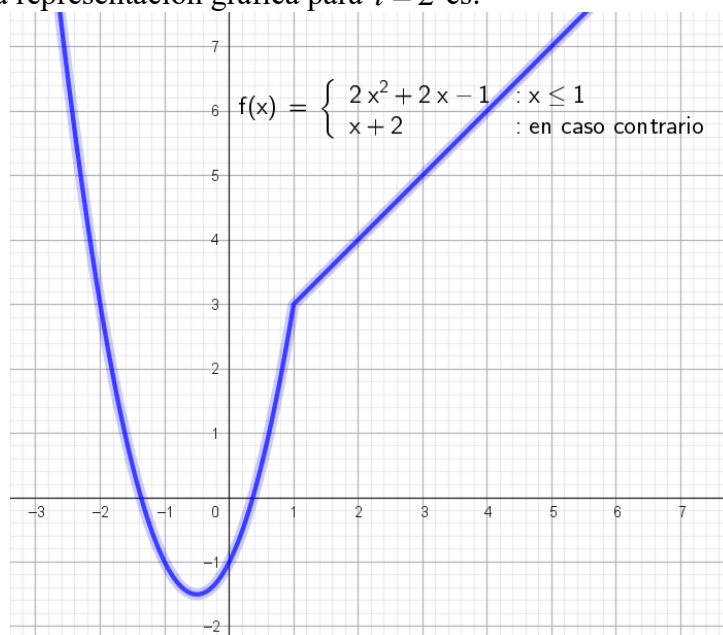
Para estudiar la monotonía (creciente/decrecimiento) de una función, hay que estudiar el signo de la derivada primera.

$$f(x) = 2x^2 + 2x - 1$$

$$f'(x) = 4x + 2 > 0 \Rightarrow x > -\frac{1}{2}$$



Aunque no se pide, la representación gráfica para $t = 2$ es:



BLOQUE 2 - EJERCICIO 2 (Análisis)

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + c$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f \text{ tiene un punto de inflexión en } (2, -5) \Rightarrow \begin{cases} f''(2) = 0 \\ f(2) = -5 \end{cases} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{La pendiente de la recta tangente en } (2, -5) \text{ es } -12 \Rightarrow f'(2) = -12 \end{array} \right.$$

Planteamos y resolvemos el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 3ax^2 + 2bx \\ f''(x) = 6ax + 2b \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} f''(2) = 0 \Rightarrow 12a + 2b = 0 & [1] \\ f(2) = -5 \Rightarrow 8a + 4b + c = -5 & [2] \\ f'(2) = -12 \Rightarrow 12a + 4b = -12 & [3] \end{cases}$$

Resolvemos el sistema formado por las ecuaciones [1] y [3]:

$$\begin{cases} 12a + 2b = 0 \\ 12a + 4b = -12 \end{cases} \xrightarrow{(-1)} \begin{cases} -12a - 2b = 0 \\ 12a + 4b = -12 \end{cases}$$

$$2b = -12 \Rightarrow b = -\frac{12}{2} = -6 \Rightarrow a = \frac{-2 \cdot (-6)}{12} = 1$$

Sustituimos en [2]: $c = -5 - 8 \cdot 1 - 4 \cdot (-6) = 11$

Conclusión: $(a, b, c) = (1, -6, 11) \Rightarrow f(x) = x^3 - 6x^2 + 11$

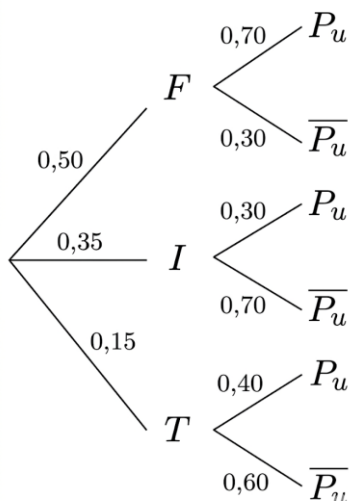
SECCIÓN 2

BLOQUE 1 - EJERCICIO 3 (Probabilidad)

Nombramos los sucesos:

$$\begin{cases} F = \text{el estudiante prefiere Facebook} \Rightarrow P(F) = 0,50 \\ I = \text{el estudiante prefiere Instagram} \Rightarrow P(I) = 0,35 \\ T = \text{el estudiante prefiere TikTok} \Rightarrow P(T) = 0,15 \\ Pu = \text{el estudiante hace publicaciones habitualmente} \end{cases}$$

El árbol de probabilidades es:



a) Por el teorema de la probabilidad total:

$$\begin{aligned} P(\overline{Pu}) &= P(F)P(\overline{Pu}/F) + P(I)P(\overline{Pu}/I) + P(T)P(\overline{Pu}/T) = \\ &= 0,50 \cdot 0,30 + 0,35 \cdot 0,70 + 0,15 \cdot 0,60 = 0,485 \end{aligned}$$

b) Por el teorema de Bayes:

$$\begin{aligned} P(I/Pu) &= \frac{P(I \cap Pu)}{P(Pu)} = \frac{P(I)P(Pu/I)}{1 - P(\overline{Pu})} = \\ &= \frac{0,35 \cdot 0,30}{1 - 0,485} = \frac{21}{103} \approx 0,2039 \end{aligned}$$

BLOQUE 1 - EJERCICIO 4 (Inferencia estadística)

$X =$ cantidad donada por cada persona $X \rightarrow N(\mu, 10)$ con

$$\begin{cases} n = 9 \text{ personas} \\ \bar{x} = \frac{60 + 40 + 55 + 35 + 20 + 25 + 50 + 45 + 30}{9} = 40 \text{ €} \\ \sigma^2 = 100 \text{ €}^2 \Rightarrow \sigma = \sqrt{100} = 10 \text{ €} \end{cases}$$

a) Intervalo de confianza al 97 %

Nivel de confianza:

$$1 - \alpha = 97 \% = 0,97 \Rightarrow \alpha = 1 - 0,97 = 0,03 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,015$$

$$P\left(Z < z_{\alpha/2}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - 0,015 = 0,985 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2,17$$

Intervalo de confianza:

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(40 - 2,17 \cdot \frac{10}{\sqrt{9}}, 40 + 2,17 \cdot \frac{10}{\sqrt{9}}\right) = (30,77, 47,23)$$

b) Tamaño muestral para que $E < 2 \text{ €}$

$$n = \left(\frac{z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{2,17 \cdot 10}{2}\right)^2 = 117,72 \approx 118$$

Conclusión: el tamaño mínimo de la muestra debe de ser de 118 personas.

BLOQUE 2 - EJERCICIO 3 (Sistema de ecuaciones)

Nombramos las variables y planteamos el sistema:

$$\begin{cases} x = \text{número de entradas vendidas a adultos} \\ y = \text{número de entradas vendidas a jubilados} \\ z = \text{número de entradas vendidas a niños} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 660 \\ 4x = y \\ \frac{10}{100}(x + y) = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 660 \\ 4x - y = 0 \\ x + y - 10z = 0 \end{cases}$$

Resolución por el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 660 \\ 4 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -10 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\begin{smallmatrix} -F_1+F_2 \\ -F_1+F_2 \end{smallmatrix}]{\begin{smallmatrix} 4F_1+F_2 \\ -F_1+F_2 \end{smallmatrix}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 660 \\ 0 & -5 & -4 & -2640 \\ 0 & 0 & -11 & -660 \end{array}\right) \begin{matrix} [1] \\ [2] \\ [3] \end{matrix}$$

De [3]: $z = \frac{-660}{-11} = 60$

Sustituimos en [2]: $y = \frac{-2640 + 4 \cdot 60}{-5} = 480$

Sustituimos en [1]: $x = 660 - 480 - 60 = 120$

Conclusión: se han vendido 120 entradas para adultos, 480 entradas para jubilados y 60 para niños.

Resolución por la regla de Cramer:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -10 \end{pmatrix} = 55$$

$$x = \frac{\det \begin{pmatrix} 660 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -10 \end{pmatrix}}{55} = \frac{6600}{55} = 120, \quad y = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & 660 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -10 \end{pmatrix}}{55} = \frac{26400}{55} = 480$$

$$z = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 660 \\ 4 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}{55} = \frac{3300}{55} = 60$$

Conclusión: se han vendido 120 entradas para adultos, 480 entradas para jubilados y 60 para niños.

BLOQUE 2 - EJERCICIO 4 (Matrices)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Calcula ABC^T :

$$ABC^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

b) Calcula $\frac{1}{3}B^2 - I$

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}B^2 - I &= \frac{1}{3} \left[\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right] - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -1 & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

c) Razona si se puede calcular $(A-B)-C$ y BC . (No es necesario realizar las operaciones).

$$\left. \begin{matrix} A_{3 \times 3} \\ B_{3 \times 3} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \text{se puede calcular } A-B \text{ y } (A-B)_{3 \times 3} \left. \begin{matrix} \\ \\ C_{1 \times 3} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \text{No se puede calcular } (A-B)-C \text{ ya que } A-B \text{ y } C$$

C no tienen el mismo orden (dimensión).

$B_{3 \times 3} C_{1 \times 3} \Rightarrow$ No se puede calcular BC , ya que el número de columnas del primer factor no coincide con el número de filas del segundo factor.

SECCIÓN 3

BLOQUE 1 - EJERCICIO 5 (Probabilidad)

Nombramos los sucesos:

$$80 \text{ estudiantes } \begin{cases} 50 \text{ mujeres; } M = \text{ estudiante mujer} \\ 30 \text{ hombres; } H = \text{ estudiante hombre} \\ B = \text{ el estudiante disfruta de beca} \end{cases}$$

$$\text{a) } P(MMM) = P(M \cap M \cap M) = P(M)P(M)P(M) = \frac{50}{80} \cdot \frac{49}{79} \cdot \frac{48}{78} = \frac{245}{1027} \approx 0,2386$$

$$P(MMM \cup HHH) = P((M \cap M \cap M) \cup (H \cap H \cap H)) =$$

$$\text{b) } = P(M \cap M \cap M) + P(H \cap H \cap H) = \frac{245}{1027} + \frac{30}{80} \cdot \frac{29}{79} \cdot \frac{28}{78} = \frac{245}{1027} + \frac{203}{4108} = \frac{91}{316} \approx 0,2880$$

$$P(HHM \cup HMH \cup MHH \cup HHH) =$$

$$= P[(H \cap H \cap M) \cup (H \cap M \cap H) \cup (M \cap H \cap H) \cup (H \cap H \cap H)] =$$

$$\text{c) } = P(H \cap H \cap M) + P(H \cap M \cap H) + P(M \cap H \cap H) + P(H \cap H \cap H) =$$

$$= 3 \cdot \frac{30}{80} \cdot \frac{29}{79} \cdot \frac{50}{78} + \frac{30}{80} \cdot \frac{29}{79} \cdot \frac{28}{78} = \frac{2581}{8216} \approx 0,3141$$

BLOQUE 1 - EJERCICIO 6 (Inferencia estadística)

X = peso de los motores de los coches de Fórmula 1 $\Rightarrow X \rightarrow N(\mu, 30)$ con

$$\begin{cases} n = 81 \text{ motores} \\ \bar{x} = 153 \text{ kg} \\ \sigma = 30 \text{ kg} \end{cases}$$

a) Intervalo de confianza al 97 %

Nivel de confianza:

$$1 - \alpha = 95 \% = 0,95 \Rightarrow \alpha = 1 - 0,95 = 0,05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,025$$

$$P(Z < z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - 0,025 = 0,975 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$$

Intervalo de confianza:

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) = \left(153 - 1,96 \cdot \frac{30}{\sqrt{81}}, 153 + 1,96 \cdot \frac{30}{\sqrt{81}} \right) = (146,47, 159,53)$$

b) Error máximo admisible con $1 - \alpha = 93,12 \%$

Nivel de confianza

$$1 - \alpha = 93,12 \% = 0,9312 \Rightarrow \alpha = 1 - 0,9312 = 0,0688 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,0344$$

$$P(Z < z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - 0,0344 = 0,9656 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1,82$$

Error máximo admisible:

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,82 \cdot \frac{30}{\sqrt{100}} = 5,46$$

Conclusión: el error máximo admisible es de 5,46 kg.

c) El valor de 145 kg no está en el intervalo de confianza calculado al 95 %, y como al disminuir el nivel de confianza, disminuye la amplitud del intervalo, el valor de 145 kg tampoco estará en el intervalo de confianza al 92 % y, por tanto, no se puede aceptar la afirmación.

BLOQUE 2 - EJERCICIO 5 (Análisis)

$$f(x) = \begin{cases} -(x+t)^2 + 2 & \text{si } x \leq -2 \\ t-2 & \text{si } -2 < x \leq 2 \\ x^2 - (t+3)x + 9 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

a) ¿Existe un valor de t para el que $f(x)$ sea continua en $x = -2$ y en $x = 2$?

Continuidad en $x = -2$: ¿ $\exists \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = f(-2)$?

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2^-} [-(x+t)^2 + 2] = -(-2+t)^2 + 2 = -t^2 + 4t - 2 = f(-2) \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2^+} (t-2) = t-2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow -t^2 + 4t - 2 = t - 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -t^2 + 3t = 0 \Rightarrow t(-t+3) = 0 \Rightarrow t = \begin{cases} 0 \\ 3 \end{cases}$$

Continuidad en $x = 2$: ¿ $\exists \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$?

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} (t-2) = t-2 = f(2) \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} [x^2 - (t+3)x + 9] = -2t + 7 \end{aligned} \right\} \Rightarrow t-2 = -2t+7 \Rightarrow 3t-9=0 \Rightarrow t = \frac{9}{3} = 3$$

b) Representa gráficamente la función $f(x)$ para $t = 3$.

$$y = -x^2 - 6x - 7$$

$$y = 1$$

$$y = x^2 - 6x + 9$$

Vértice:

$$\left. \begin{aligned} x_v &= \frac{-b}{2a} = \frac{6}{2 \cdot (-1)} = -3 \\ y_v &= -(-3)^2 - 6 \cdot (-3) - 7 = 2 \end{aligned} \right\} V(-3, 2)$$

Vértice:

$$\left. \begin{aligned} x_v &= \frac{-b}{2a} = \frac{6}{2 \cdot 1} = 3 \\ y_v &= 3^2 - 6 \cdot 3 + 9 = 0 \end{aligned} \right\} V(3, 0)$$

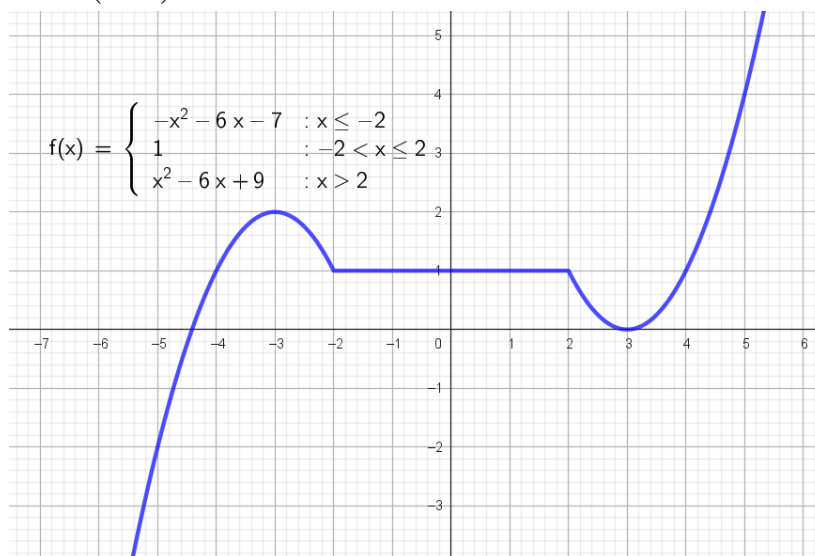
Puntos de corte con OX:

$$\begin{aligned} -x^2 - 6x - 7 &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow x &= \begin{cases} -3 - \sqrt{2} \approx -4,4 \\ -3 + \sqrt{2} \approx -1,6 \end{cases} \end{aligned}$$

Tabla de valores:

x	2	4
y	1	1

Para $x = -2 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow (-2, 1)$



BLOQUE 2 - EJERCICIO 6 (Análisis)

$$H(x) = 20x - 2x^2$$

con x = tiempo en segundos, $0 \leq x \leq 10$.

a) ¿Qué altura habrá alcanzado la pelota a los 3 segundos?

$$H(3) = 20 \cdot 3 - 2 \cdot 3^2 = 42$$

La altura a los 3 segundos es de 42 m.

b) ¿En qué momentos la pelota se encuentra a 32 metros de altura?

Hay que resolver la ecuación $H(x) = 32$:

$$20x - 2x^2 = 32 \Rightarrow x = \begin{cases} 2 \\ 8 \end{cases}$$

A los 2 segundos y a los 8 segundos, la pelota se encuentra a 32 m de altura.

c) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la pelota? ¿En qué momento?

$$H(x) = 20x - 2x^2$$

$$H'(x) = 20 - 4x$$

$$H'(x) = 0 \Rightarrow 20 - 4x = 0 \Rightarrow x = 5$$

$$H''(x) = -4$$

$$H''(4) < 0 \Rightarrow x = 5 \text{ es un máximo relativo de } H(x) \text{ de coordenadas } (5, H(5)) = (5, 50)$$

La altura máxima es de 50 m y se alcanza a los 5 segundos de lanzar la pelota.

Aunque no se pide, la gráfica de la función es:

