



Evaluación para el Acceso a la Universidad. Convocatoria de 2023

Materia: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

El examen está compuesto de tres secciones de dos bloques cada una. A su vez cada bloque tiene dos ejercicios. El alumno deberá elegir un bloque de cada una de las tres secciones. Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora. Es necesario detallar el proceso de resolución de los ejercicios.

Sección 1 (3 puntos) Bloque 1

1. En el siguiente problema de programación lineal optimiza la función $f(x, y) = 4x + 5y - 3$ sujeta a las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} x + y \leq 2 \\ x - 2y \leq 5 \\ y \leq 0 \\ x \geq 1 \end{cases}$$

- Dibuja la región factible y determina sus vértices. (1.25 puntos)
- Indica los puntos óptimos (máximo y mínimo) y sus respectivos valores. (0.25 puntos)

2. En una galería de arte disponen de cuadros de tres artistas: uno realiza arte urbano, otro se dedica al arte abstracto y el tercero al grafiti. El 40 % de la suma de los cuadros pintados por el primero y el segundo es 28. El doble de los cuadros del que realiza arte abstracto equivale al triple de los cuadros del que hace grafiti. En total, en la galería disponen de 110 cuadros.

- Plantea el sistema de ecuaciones para determinar cuántos cuadros tiene cada artista en la galería. (0.75 puntos)
- Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.75 puntos)

Bloque 2

1. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} |x + 1| + t & \text{si } x \leq 0 \\ -x^3 + 2x^2 + (t + 2)x + 3 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

- ¿Para qué valor de t la función $f(x)$ es continua en $x = 0$? (0.5 puntos)
- Para $t = 2$, calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $(0, \infty)$. (0.5 puntos)
- Para $t = 2$, calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en $(0, \infty)$. (0.5 puntos)

2. Halla razonadamente los parámetros a y b de la función $f(x) = ax^2 + bx - 20$, sabiendo que dicha función tiene un máximo en el punto $(6, 16)$. (1.5 puntos)

Sección 2 (3.5 puntos) Bloque 1

3. Un estudio sobre ingredientes de pizza indica que solo al 30 % de la población le gusta la piña en la pizza y de estos, a un 60 % le gustan las anchoas. Sin embargo, de los que no les gusta la piña, el 75 % afirman que no les gustan las anchoas en la pizza.

- a) Elegido un individuo al azar, ¿cuál es la probabilidad de que le gusten las anchoas en la pizza? (0.75 puntos)
- b) Si se sabe que a una persona no le gustan las anchoas en la pizza, ¿cuál es la probabilidad de que le guste la piña? (0.75 puntos)

4. Una marca de productos de repostería ha tomado una muestra aleatoria de 36 bizcochos y ha medido su contenido calórico, proporcionando una media de 223 calorías. Si se sabe que el contenido calórico sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma = 51$ calorías,

- a) Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional del contenido calórico de los bizcochos con un nivel de confianza del 95 %. (1 punto)
- b) Calcula el tamaño mínimo de la muestra elegida para que, con un nivel de confianza del 94.64 %, el error máximo admisible sea menor que 10 calorías. (1 punto)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

Bloque 2

3. Una cooperativa manchega que distribuye tres tipos de vino, blanco, rosado y tinto, ha recibido un pedido de 50 botellas. Se sabe que el doble de botellas de vino blanco, por una parte, excede en una unidad al de botellas de vino rosado y, por otra parte, coincide con el quíntuplo del número de botellas vino tinto.

- a) Plantea un sistema de ecuaciones para averiguar cuántas botellas de vino blanco, rosado y tinto se pidieron. (0.75 puntos)
- b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.75 puntos)

4. a) Dadas las matrices $M = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} -2 & 9 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$ y $P = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ demuestra que M y N conmutan. (0.5 puntos)

b) Resuelve la ecuación $M \cdot P \cdot X = N^T - M$. (1 punto)

c) Calcula la matriz que sumada con la matriz $(N + I)^2$ da como resultado la matriz nula, siendo I la matriz identidad de orden 2. (0.5 puntos)

Sección 3 (3.5 puntos) Bloque 1

5. En una empresa de reparto el 9 % de los paquetes llega con retraso, el 14 % llega defectuoso y 19 % llega con retraso o defectuoso o ambos.

- Elegido un paquete al azar, ¿cuál es la probabilidad de que llegue defectuoso y con retraso? (0.75 puntos)
- Si se sabe que un paquete llega con retraso, ¿cuál es la probabilidad de que llegue defectuoso? (0.75 puntos)

6. La distancia alcanzada en el lanzamiento de jabalina por los integrantes de un equipo de atletismo infantil sigue una distribución normal de media desconocida y varianza $\sigma^2 = 81$ metros². Se ha tomado una muestra de 9 atletas del equipo y las distancias alcanzadas han sido 16, 21, 15, 17, 16, 19, 14, 14 y 19 metros.

- Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional de la distancia de lanzamiento de jabalina con un nivel de confianza del 97 %. (1 punto)
- Explica, justificando la respuesta, qué se podría hacer para conseguir un intervalo de confianza con mayor amplitud para el mismo nivel de confianza. (0.5 puntos)
- ¿Cuál sería el error máximo admisible si se hubiera utilizado una muestra de tamaño 49 atletas y un nivel de confianza del 95.96 %? (0.5 puntos)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857

Bloque 2

5. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} (x+2)^2 & \text{si } x \leq c \\ 6x+3 & \text{si } x > c \end{cases}$

- ¿Para qué valor de c la función $f(x)$ es continua en $x = c$? (0.75 puntos)
- Representa gráficamente la función $f(x)$ para $c = 0$. (0.75 puntos)

6. El consumo de agua, en dm³, de una urbanización durante 6 horas viene reflejado por la función $C(x) = x^3 - 12x^2 + 45x$ siendo $x =$ el tiempo medido en horas y $0 \leq x \leq 6$.

- ¿En qué momentos se produjo el mayor consumo y a cuánto ascendió? (1.25 puntos)
- ¿En qué intervalo de tiempo disminuyó el consumo de agua? (0.75 puntos)

SOLUCIONES

SECCIÓN 1

BLOQUE 1 - EJERCICIO 1 (Programación lineal)

Variables: x, y

Función objetivo: $f(x, y) = 4x + 5y - 3$

$$\text{Restricciones: } \begin{cases} x + y \leq 2 \\ x - 2y \leq 5 \\ y \leq 0 \\ x \geq 1 \end{cases}$$

Región factible y vértices:

$$x + y \leq 2$$

$$x + y = 2$$

$$\begin{array}{c|c} x & y \\ \hline 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{array}$$

$(0,0)$ verifica la inecuación

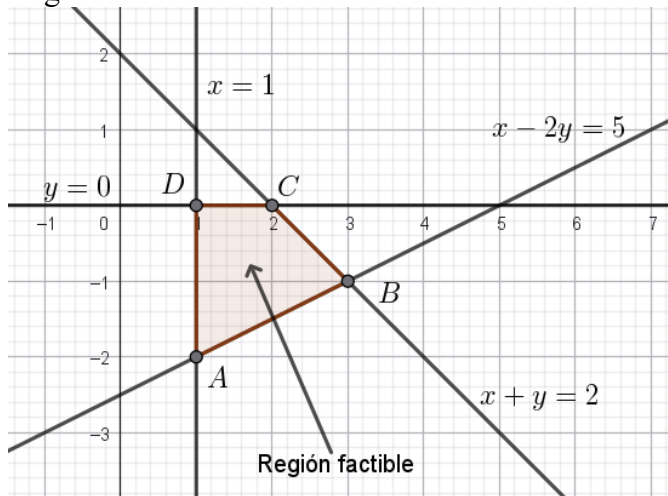
$$x - 2y \leq 5$$

$$x - 2y = 5$$

$$\begin{array}{c|c} x & y \\ \hline 7 & 1 \\ 5 & 0 \end{array}$$

$(0,0)$ verifica la inecuación

Región factible



Vértices (puntos extremos)

$$A \begin{cases} x = 1 \\ x - 2y = 5 \end{cases} \Rightarrow A(1, -2)$$

$$B \begin{cases} x + y = 2 \\ x - 2y = 5 \end{cases} \Rightarrow B(3, -1)$$

$$C(2, 0)$$

$$D(1, 0)$$

Evaluamos la función objetivo en los vértices:

$$f_A(1, -2) = 4 \cdot 1 + 5 \cdot (-2) - 3 = -9$$

$$f_B(3, -1) = 4 \cdot 3 + 5 \cdot (-1) - 3 = 4$$

$$f_C(2, 0) = 4 \cdot 2 + 5 \cdot 0 - 3 = 5$$

$$f_D(1, 0) = 4 \cdot 1 + 5 \cdot 0 - 3 = 1$$

Solución: el máximo se obtiene en $(2, 0)$ y dicho valor máximo es 5 y el mínimo se obtiene en $(1, -2)$ y dicho valor mínimo es -9 .

BLOQUE 1 - EJERCICIO 2 (Álgebra: sistema de ecuaciones)

$$\begin{cases} x = \text{número de cuadros de arte urbano} \\ y = \text{número de cuadros de arte abstracto} \\ z = \text{número de cuadros de graffiti} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{40}{100}(x+y) = 28 \\ 2y = 3z \\ x+y+z = 110 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y = 70 \\ 2y-3z = 0 \\ x+y+z = 110 \end{cases}$$

Resolución por el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 70 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 110 \end{array} \right) \xrightarrow{-F_1+F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 70 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 40 \end{array} \right) \begin{matrix} [1] \\ [2] \\ [3] \end{matrix}$$

De [3]: $z = 40$

Sustituimos en [2]: $y = \frac{3 \cdot 40}{2} = 60$

Sustituimos en [1]: $x = 70 - 60 = 10$

Conclusión: se han pintado 10 cuadros de arte urbano, 60 de arte abstracto y 40 de graffiti.

Resolución por la regla de Cramer:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

$$x = \frac{\det \begin{pmatrix} 70 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ 110 & 1 & 1 \end{pmatrix}}{2} = \frac{20}{2} = 10, \quad y = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & 70 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 1 & 110 & 1 \end{pmatrix}}{2} = \frac{120}{2} = 60, \quad z = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 70 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 110 \end{pmatrix}}{2} = \frac{80}{2} = 40$$

Conclusión: se han pintado 10 cuadros de arte urbano, 60 de arte abstracto y 40 de graffiti.

BLOQUE 2 - EJERCICIO 1 (Análisis)

$$f(x) = \begin{cases} |x+1|+2 & \text{si } x \leq 0 \\ -x^3+2x^2+4x+3 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

a) Continuidad en $x=0$: ¿ $\exists \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$?

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (|x+1|+t) = 1+t = f(0) \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x^3+2x^2+(t+2)x+3) = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow 1+t = 3 \Rightarrow t = 2$$

Conclusión: para $t=2$ la función $f(x)$ se continua en $x=0$.

b) Para $t=2$, calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $(0, +\infty)$.

$$f(x) = -x^3 + 2x^2 + 4x + 3$$

$$f'(x) = -3x^2 + 4x + 4$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -3x^2 + 4x + 4 = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} -\frac{3}{2} \notin (0, +\infty) \\ 2 \end{cases}$$

$$f''(x) = -6x + 4$$

$f''(2) < 0 \Rightarrow x = 2$ es un máximo relativo de $f(x)$ de coordenadas $(2, 11)$

c) Para $t = 2$, calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ en el intervalo $(0, +\infty)$

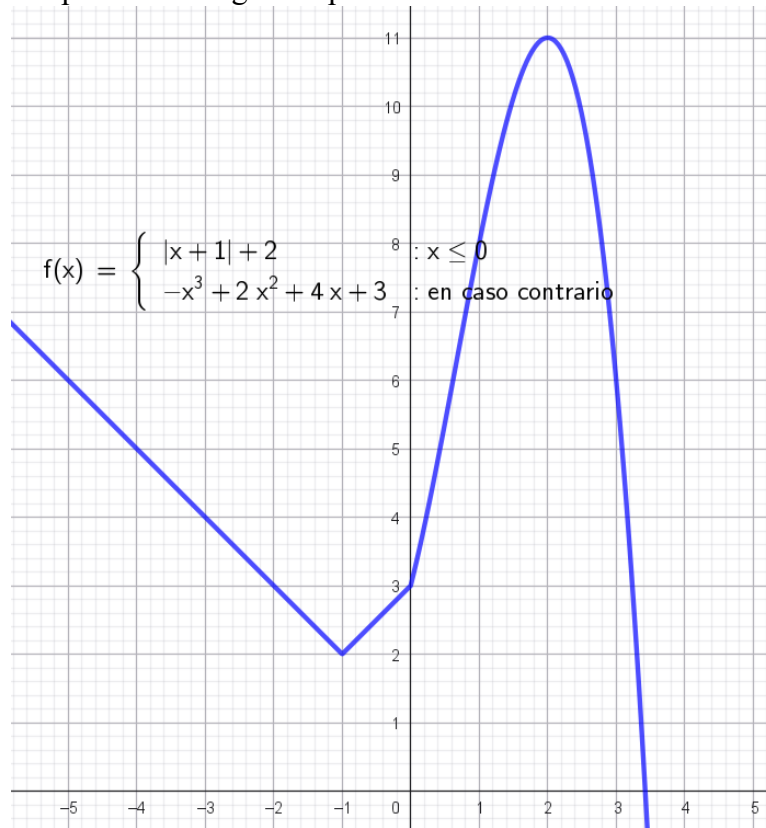
Para estudiar la monotonía (creciente/decrecimiento) de una función, hay que estudiar el signo de la derivada primera.

$$f'(x) = -3x^2 + 4x + 4$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 2$$



Aunque no se pide, la representación gráfica para $t = 2$ es:



BLOQUE 2 - EJERCICIO 2 (Análisis)

$$f(x) = ax^2 + bx - 20$$

$$f \text{ tiene un máximo en } (6, 16) \Rightarrow \begin{cases} f(6) = 16 \\ f'(6) = 0 \end{cases}$$

Planteamos y resolvemos el sistema:

$$f'(x) = 2ax + b \Rightarrow \begin{cases} f'(6) = 0 \Rightarrow 12a + b = 0 \\ f(6) = 16 \Rightarrow 36a + 6b - 20 = 16 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} 12a + b = 0 \\ 12a + 3b = 18 \end{cases} \xrightarrow{(-1)} \begin{cases} -12a - b = 0 \\ 12a + 3b = 18 \end{cases}$$

$$2b = 18 \Rightarrow b = \frac{18}{2} = 9 \Rightarrow a = -1$$

Conclusión: $(a, b) = (-1, 9) \Rightarrow f(x) = -x^2 + 9x - 20$

SECCIÓN 2

BLOQUE 1 - EJERCICIO 3 (Probabilidad)

Nombramos los sucesos:

$$\begin{cases} P_i = \text{le gusta la piña} \Rightarrow P(P_i) = 0,30 \\ A = \text{le gustan las anchoas} \end{cases}$$

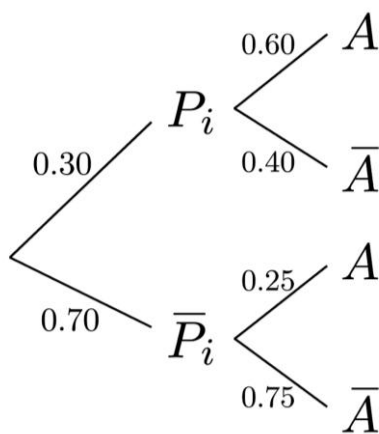
p = Piña; A = Anchoas; p^c = No piña; A^c = No anchoas.

$P(p) = 0.3$; $P(p^c) = 0.7$; $P(A | p) = 0.6$; $P(A^c | p) = 0.4$; $P(A | p^c) = 0.25$; $P(A^c | p^c) = 0.75$.

a) $P(A) = P(p) \cdot P(A | p) + P(p^c) \cdot P(A | p^c) = 0.3 \cdot 0.6 + 0.7 \cdot 0.25 = 0.355$. (0.75 puntos)

b) $P(p | A^c) = \frac{P(p \cap A^c)}{P(A^c)} = \frac{P(p) \cdot P(A^c | p)}{1 - P(A)} = \frac{0.3 \cdot 0.4}{1 - 0.355} = \frac{0.12}{0.645} = 0.186$. (0.75 puntos)

El árbol de probabilidades es:



a) Por el teorema de la probabilidad total:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(P_i)P\left(\frac{A}{P_i}\right) + P(\bar{P}_i)P\left(\frac{A}{\bar{P}_i}\right) = \\ &= 0,30 \cdot 0,60 + 0,70 \cdot 0,25 = 0,355 \end{aligned}$$

b) Por el teorema de Bayes:

$$\begin{aligned} P\left(\frac{P_i}{A}\right) &= \frac{P(P_i \cap A)}{P(A)} = \frac{P(P_i)P\left(\frac{A}{P_i}\right)}{1 - P(\bar{P}_i)} = \\ &= \frac{0,30 \cdot 0,40}{1 - 0,355} = \frac{8}{43} \approx 0,186 \end{aligned}$$

BLOQUE 1 - EJERCICIO 4 (Inferencia estadística)

X = calorías de los bizcochos $X \rightarrow N(\mu, 51)$ con $\begin{cases} n = 36 \text{ bizcochos} \\ \bar{x} = 223 \text{ calorías} \\ \sigma = 51 \text{ calorías} \end{cases}$

a) Intervalo de confianza al 95 %

Nivel de confianza:

$$1 - \alpha = 95 \% = 0,95 \Rightarrow \alpha = 1 - 0,95 = 0,05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,025$$

$$P\left(Z < z_{\alpha/2}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - 0,025 = 0,975 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$$

Intervalo de confianza:

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) = \left(223 - 1,96 \cdot \frac{51}{\sqrt{36}}, 223 + 1,96 \cdot \frac{51}{\sqrt{36}} \right) = (206,34, 239,66)$$

b) Tamaño muestral para $1 - \alpha = 94,64\%$ y $E < 10$ calorías

$$1 - \alpha = 94,64\% = 0,9464 \Rightarrow \alpha = 1 - 0,9464 = 0,0536 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,0268$$

$$P\left(Z < z_{\alpha/2}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - 0,0268 = 0,9732 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1,93$$

$$n = \left(\frac{z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{E} \right)^2 = \left(\frac{1,93 \cdot 51}{10} \right)^2 = 96,89 \approx 97$$

Conclusión: el tamaño mínimo de la muestra debe de ser de 97 bizcochos.

BLOQUE 2 - EJERCICIO 3 (Sistema de ecuaciones)

Nombramos las variables y planteamos el sistema:

$$\begin{cases} x = \text{número de botellas de vino blanco} \\ y = \text{número de botellas de vino rosado} \\ z = \text{número de botellas de vino tinto} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 50 \\ 2x = 5z \\ 2x = y + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 50 \\ 2x - 5z = 0 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

Resolución por el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 50 \\ 2 & 0 & -5 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{-2F_1+F_1 \\ -2F_1+F_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 50 \\ 0 & -2 & -7 & -100 \\ 0 & -3 & -2 & -99 \end{array} \right) \xrightarrow{-3F_2+2F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 50 \\ 0 & -2 & -7 & -100 \\ 0 & 0 & 17 & 102 \end{array} \right) \begin{matrix} [1] \\ [2] \\ [3] \end{matrix}$$

De [3]: $z = \frac{102}{17} = 6$

Sustituimos en [2]: $y = \frac{-100 + 7 \cdot 6}{-2} = 29$

Sustituimos en [1]: $x = 50 - 29 - 6 = 15$

Conclusión: se pidieron 15 botellas de vino blanco, 29 de vino rosado y 6 de vino tinto.

Resolución por la regla de Cramer:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -5 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = -17$$

$$x = \frac{\det \begin{pmatrix} 50 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}}{-17} = \frac{-255}{-17} = 15, \quad y = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & 50 & 1 \\ 2 & 0 & -5 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}}{-17} = \frac{-493}{-17} = 29$$

$$z = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 50 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}}{-17} = \frac{-102}{-17} = 6$$

Conclusión: se pidieron 15 botellas de vino blanco, 29 de vino rosado y 6 de vino tinto.

BLOQUE 2 - EJERCICIO 4 (Matrices)

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} -2 & 9 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \text{ y } P = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

a) ¿ M y N conmutan?

$$\left. \begin{aligned} MN &= \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 9 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ NM &= \begin{pmatrix} -2 & 9 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \Rightarrow M \text{ y } N \text{ conmutan}$$

b) $MPX = N^T - M$

Despejamos X

$$(MP)X = N^T - M \Rightarrow (MP)^{-1}(MP)X = (MP)^{-1}(N^T - M) \Rightarrow X = (MP)^{-1}(N^T - M)$$

Calculamos MP :

$$MP = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculamos $(MP)^{-1}$:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -3 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{F_1: (-3) \\ F_2: (-1)}]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{-F_2 + F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1/3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array} \right)$$

Calculamos $N^T - M$:

$$N^T - M = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 9 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -8 \\ 8 & -6 \end{pmatrix}$$

Calculamos X :

$$X = \begin{pmatrix} -1/3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 & -8 \\ 8 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -10/3 \\ -8 & 6 \end{pmatrix}$$

c) Calcula la matriz que sumada con la matriz $(N + I)^2$ da como resultado la matriz nula.

Calculamos $(N + I)^2$:

$$(N + I)^2 = \left[\begin{pmatrix} -2 & 9 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]^2 = \begin{pmatrix} -1 & 9 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 9 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 9 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -36 \\ -4 & 18 \end{pmatrix}$$

Calculamos la matriz pedida:

$$\begin{pmatrix} 10 & -36 \\ -4 & 18 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 36 \\ 4 & -18 \end{pmatrix}$$

SECCIÓN 3

BLOQUE 1 - EJERCICIO 5 (Probabilidad)

Nombramos los sucesos:

$$\begin{cases} R = \text{el paquete llega con retraso} \Rightarrow P(R) = 0,09 \\ D = \text{el paquete llega defectuoso} \Rightarrow P(D) = 0,14 \end{cases} \text{ y } P(R \cup D) = 0,19$$

a) ¿Cuál es la probabilidad de que llegue defectuoso y con retraso?

$$\begin{aligned} P(R \cup D) &= P(R) + P(D) - P(R \cap D) \Rightarrow \\ \Rightarrow P(R \cap D) &= P(R) + P(D) - P(R \cup D) = 0,09 + 0,14 - 0,19 = 0,04 \end{aligned}$$

b) Si se sabe que un paquete llega con retraso, ¿cuál es la probabilidad de que llegue defectuoso?

$$P(D/R) = \frac{P(D \cap R)}{P(R)} = \frac{0,04}{0,09} = \frac{4}{9} = 0,444$$

BLOQUE 1 - EJERCICIO 6 (Inferencia estadística)

X = distancia alcanzada en el lanzamiento de jabalina $\Rightarrow X \rightarrow N(\mu, 9)$ con

$$\begin{cases} n = 9 \text{ lanzadores} \\ \bar{x} = \frac{16+21+15+17+16+19+14+14+19}{9} = 16,778 \text{ m} \\ \sigma^2 = 81 \text{ m}^2 \Rightarrow \sigma = \sqrt{81} = 9 \text{ m} \end{cases}$$

a) Intervalo de confianza al 97 %

Nivel de confianza:

$$1 - \alpha = 97 \% = 0,97 \Rightarrow \alpha = 1 - 0,97 = 0,03 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,015$$

$$P(Z < z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - 0,015 = 0,985 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2,17$$

Intervalo de confianza:

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) = \left(16,778 - 2,17 \cdot \frac{9}{\sqrt{9}}, 16,778 + 2,17 \cdot \frac{9}{\sqrt{9}} \right) = (10,268, 23,288)$$

b) Explica, justificando la respuesta, qué se podría hacer para conseguir un intervalo de confianza con mayor amplitud para el mismo nivel de confianza.

Hay que disminuir el tamaño de la muestra, ya que, de esta forma, aumenta el valor de $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

c) Error máximo admisible con $1 - \alpha = 95,96 \%$

Nivel de confianza

$$1 - \alpha = 95,96 \% = 0,9596 \Rightarrow \alpha = 1 - 0,9596 = 0,0404 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,0204$$

$$P(Z < z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - 0,0204 = 0,9796 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2,05$$

Error máximo admisible:

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,05 \cdot \frac{9}{\sqrt{49}} = 2,636$$

Conclusión: el error máximo admisible es de 2,636 m.

BLOQUE 2 - EJERCICIO 5 (Análisis)

$$f(x) = \begin{cases} (x+2)^2 & \text{si } x \leq c \\ 6x+3 & \text{si } x > c \end{cases}$$

a) ¿Para qué valor de c , la función $f(x)$ sea continua en $x=c$?

Continuidad en $x=c$: ¿ $\exists \lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$?

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow c^-} (x+2)^2 = (c+2)^2 = c^2 + 4c + 4 = f(c) \\ \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow c^+} (6x+3) = 6c+3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow c^2 + 4c + 4 = 6c + 3 \Rightarrow \\ \Rightarrow c^2 - 2c + 1 = 0 \Rightarrow c = 1$$

Conclusión: para $c=1$, la función es continua en $x=c$

b) Representa gráficamente la función $f(x)$ para $c=0$.

$$y = (x+2)^2 = x^2 + 4x + 4 \text{ para } x \leq 0$$

$$y = 6x + 3 \text{ para } x > 0$$

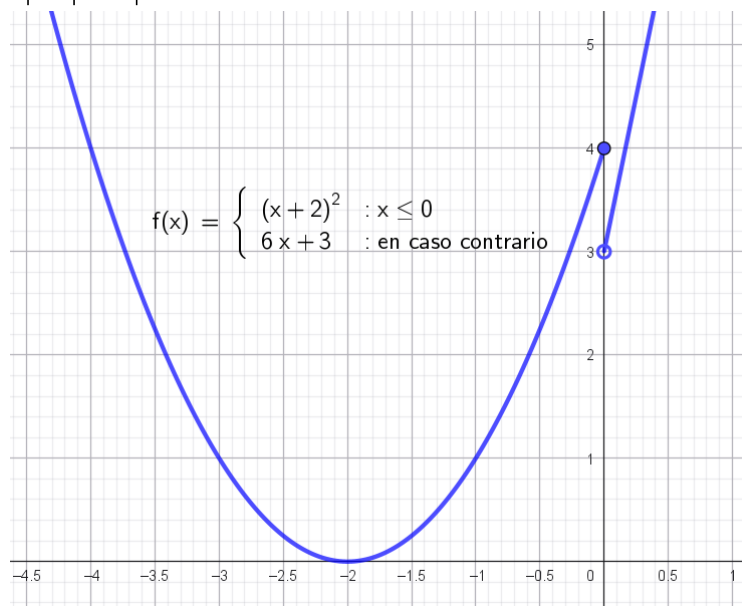
Vértice:

$$\left. \begin{aligned} x_v &= \frac{-4}{2} = -2 \\ y_v &= (-2)^2 + 4 \cdot (-2) + 4 = 0 \end{aligned} \right\} V(-2, 0)$$

x	y
"0"	3
1	9

Tabla de valores:

x	-1	0	-3	-4
y	1	4	1	4



BLOQUE 2 - EJERCICIO 6 (Análisis)

$$C(x) = x^3 - 12x^2 + 45x \text{ (consumo de agua en } dm^3 \text{)}$$

con x = tiempo en horas, $0 \leq x \leq 6$.

a) ¿En qué momentos se produjo el mayor consumo de agua y a cuánto ascendió?

$$C'(x) = 3x^2 - 24x + 45$$

$$C'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 24x + 45 = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} 3 \\ 5 \end{cases}$$

$$C''(x) = 6x - 24$$

$C''(3) < 0 \Rightarrow x = 3$ es un máximo relativo de $C(x)$ de coordenadas $(3, C(3)) = (3, 54)$

$C''(5) > 0 \Rightarrow x = 5$ es un mínimo relativo de $C(x)$ de coordenadas $(5, C(5))$

Como el enunciado dice en qué momentos, evaluamos la función en los extremos del intervalo a ver lo que pasa:

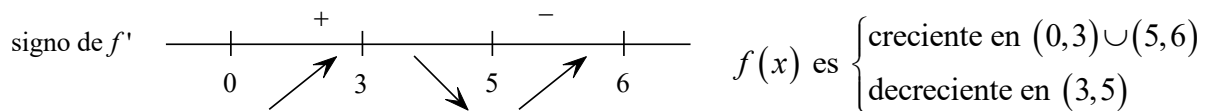
$$C(0) = 0$$

$$C(6) = 6^3 - 12 \cdot 6^2 + 54 \cdot 6 = 54$$

Conclusión: el mayor consumo de agua se produjo a las 3 horas y dicho consumo máximo fue de 54 dm^3 y también a las 6 horas, siendo dicho consumo máximo de 54 dm^3 .

b) ¿En qué intervalo de tiempo disminuyó el consumo de agua?

$$C'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 24x + 45 = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} 3 \\ 5 \end{cases}$$



Conclusión: el consumo de agua disminuyó entre las 3 y las 5 horas.

Aunque no se pide, la gráfica de la función es:

