

**Sección 1 (3 puntos) Bloque 1**

1. Una empresa de productos de papelería dispone de 270 m<sup>2</sup> de cartón y de 432 m de cinta de goma para la fabricación de dos tipos de carpetas: tamaño folio y tamaño cuartilla. Para una del primer tipo se necesitan 0.20 m<sup>2</sup> de cartón y 0.30 m de cinta de goma y se vende a 2.10€ la unidad. Para una carpeta del segundo tipo se necesitan 0.15 m<sup>2</sup> de cartón y 0.27 m de cinta de goma y se vende a 1.50€ la unidad.

- a) Expresa la función objetivo, escribe mediante inecuaciones las restricciones del problema y representa gráficamente el recinto definido. (1.25 puntos)
- b) Determina cuántas carpetas de cada tipo tiene que fabricar la empresa para que el beneficio sea máximo. (0.25 puntos)

2. En la fase nacional de la Olimpiada de Matemáticas Española se reparten un total de 36 medallas, divididas en oro, plata y bronce. El número de medallas de bronce triplica a las medallas de oro y sabemos que, si dos de las medallas de plata se pasaran a la categoría de bronce, entonces la cantidad de medallas de bronce duplicaría la cantidad de medallas de plata.

- a) Plantea el sistema de ecuaciones para calcular qué cantidad de medallas de cada tipo se reparten. (0.75 puntos)
- b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.75 puntos)

**Bloque 2**

1. La evolución de la rentabilidad de un fondo de inversión a lo largo del tiempo,  $x$  en años, viene definida por la función

$$R(x) = \begin{cases} -(x + (t - 3))^2 + (t + 27) & \text{si } 0 \leq x \leq 3 \\ -\frac{1}{3}x^3 - tx^2 + 5x - 3 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

- a) ¿Para qué valores de  $t$  la rentabilidad del fondo,  $R(x)$ , es una función continua en  $x = 3$ ? (0.5 puntos)
- b) Para  $t = -2$ , ¿cuándo se tiene la mayor rentabilidad en el fondo a partir del tercer año? (0.5 puntos)
- c) Para  $t = -2$ , determina en qué intervalos de tiempo la rentabilidad del fondo crece y en cuáles decrece a partir del tercer año. (0.5 puntos)

2. Dada la función  $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx$ , encuentra el valor de los parámetros  $a$ ,  $b$  y  $c$  sabiendo que la función tiene un extremo relativo en el punto  $(-1, 0)$  y la ecuación de la recta tangente a la función en  $x = 0$  es  $y = x$ . (1.5 puntos)

**Sección 2 (3.5 puntos) Bloque 1**

3. Una empresa de consultoría tiene dos sedes, una en Toledo y otra en Cuenca. La sede de Toledo está formada por 6 analistas y 6 desarrolladores, mientras que la de Cuenca la forman 4 analistas y 6 desarrolladores. Además, se sabe que el 30% de los analistas y el 50% de los desarrolladores de la empresa usan MacBooks en su trabajo diario.

- a) Elegido un trabajador al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no use MacBook? (0.75 puntos)
- b) Si se sabe que un trabajador usa MacBook, ¿cuál es la probabilidad de que sea desarrollador? (0.75 puntos)

4. Un fabricante de microprocesadores ha tomado una muestra aleatoria de 144 chips y ha medido el tiempo de ejecución de una operación, proporcionando una media de 142 milisegundos. Si se sabe que el tiempo de ejecución de los chips sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica  $\sigma = 42$  milisegundos,

- a) Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional del tiempo de ejecución de los chips con un nivel de confianza del 94.64%. (1 punto)
- b) Calcula el tamaño mínimo de la muestra elegida para que, con un nivel de confianza del 94.12%, el error máximo admisible sea menor que 8 milisegundos. (1 punto)

$z$	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

## Bloque 2

3. En una clase se celebran elecciones para delegada y se presentan dos candidatas, Inés y Nerea. Se sabe que cuatro veces el número de votos obtenido por Nerea menos tres veces el número de votos obtenidos por Inés excede al número de votos nulos en un voto. Si dividimos el número de votos obtenidos por Inés entre el número de los obtenidos por Nerea se obtiene de cociente 1 y de resto 7 (Algoritmo de la división:  $D=d \cdot c+r$ ). El 5% del total de votos emitidos es nulo.

- a) Plantea el sistema de ecuaciones para calcular el número de votos nulos y los que recibieron Inés y Nerea. (0.75 puntos)
- b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.75 puntos)

4. Dadas las matrices  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$  y  $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

- a) Calcula, si es posible,  $C + A \cdot B$  (0.75 puntos)
- b) ¿Son iguales  $C^{-1} + (A \cdot B)^{-1}$  y  $(C + A \cdot B)^{-1}$ ? (1.25 puntos)

### Sección 3 (3.5 puntos) Bloque 1

5. En un instituto el 64% de los estudiantes aprueban Matemáticas, el 72% aprueban Inglés y el 78% aprueban Matemáticas o Inglés o ambas.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de suspender alguna de las dos asignaturas? (0.75 puntos)
- b) ¿Son independientes los sucesos aprobar Matemáticas y aprobar Inglés? Justifica la respuesta. (0.75 puntos)

6. La edad de los usuarios de un juego online sigue una distribución normal de media desconocida y varianza  $\sigma^2 = 4$  años<sup>2</sup>. Se ha tomado una muestra de 10 usuarios y sus edades eran 16, 19, 21, 15, 14, 18, 20, 15, 14 y 18 años.

- a) Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional de la edad de los usuarios con un nivel de confianza del 97%. (1 punto)
- b) Explica, justificando la respuesta, qué se podría hacer para conseguir un intervalo de confianza con menor amplitud para el mismo nivel de confianza. (0.5 puntos)
- c) ¿Cuál sería el error máximo admisible si se hubiera utilizado una muestra de tamaño 81 y un nivel de confianza del 95.44%? (0.5 puntos)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857

## Bloque 2

5. Durante una tormenta, la altura,  $A(x)$ , que han alcanzado las olas del mar, en metros, se puede expresar con respecto al tiempo ( $x$  en horas) mediante la función

$$A(x) = \begin{cases} -(2x+t)^2 + (11+t) & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ x^2 - 8x + 19 + t & \text{si } 2 \leq x \leq 7 \end{cases}$$

- a) Halla los valores de  $t$  para que la función de la altura de las olas sea continua en  $x = 2$ . (0.75 puntos)
- b) Representa gráficamente la función de la altura de las olas,  $A(x)$ , para el valor  $t = -1$ . (0.75 puntos)

6. La evolución del número de socios de un determinado club de fútbol desde el año de su fundación, 1965 ( $t = 0$ ), hasta su desaparición en 2018 ( $t = 53$ ) viene dada por la expresión  $S(t) = -0.5 \cdot (2t^3 - 34t^2 - 3968t - 60)$  donde  $t$  se expresa en años.

- a) ¿Cuántos socios tenía el club en el año del mundial en España, 1982? (0.5 puntos)
- b) ¿En qué momento de la existencia del club se alcanzan el máximo y mínimo número de socios? ¿Cuáles son los valores del máximo y mínimo número de socios? (1.5 puntos)

# SOLUCIONES

## SECCIÓN 1

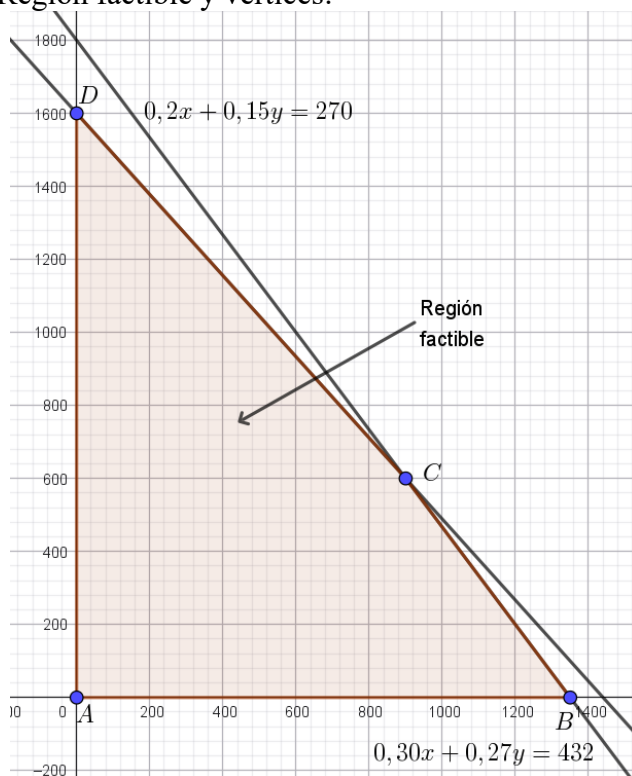
### BLOQUE 1 - EJERCICIO 1 (Programación lineal)

Variables:  $\begin{cases} x = \text{número de carpetas de tamaño folio} \\ y = \text{número de carpetas de tamaño cuartilla} \end{cases}$

Función objetivo:  $F(x, y) = 2,10x + 1,50y$

Restricciones:  $\begin{cases} 0,20x + 0,15y \leq 270 \\ 0,30x + 0,27y \leq 432 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$

Región factible y vértices:



Región factible

$$0,20x + 0,15y \leq 270 \quad 0,30x + 0,27y \leq 432$$

$$0,20x + 0,15y = 270 \quad 0,30x + 0,27y = 432$$

x	y
0	1800

x	y
1350	0

(0,0) verifica la  
inecuación

x	y
0	1600

x	y
1440	0

(0,0) verifica la  
inecuación

Vértices (puntos extremos)

$$A(0,0)$$

$$B(0,1600)$$

$$C \begin{cases} 0,20x + 0,15y = 270 \\ 0,30x + 0,27y = 432 \end{cases} \Rightarrow C(900,600)$$

$$D(0,1600)$$

Evaluamos la función objetivo en los vértices:

$$F_A(0,0) = 2,10 \cdot 0 + 1,50 \cdot 0 = 0$$

$$F_B(1350,0) = 2,10 \cdot 1350 + 1,50 \cdot 0 = 2835$$

$$F_C(900,600) = 2,10 \cdot 900 + 1,50 \cdot 600 = 2790$$

$$F_D(0,1600) = 2,10 \cdot 0 + 1,50 \cdot 1600 = 2400$$

**Solución:** tiene que fabricar 1350 carpetas de tamaño folio y 0 carpetas de tamaño cuartilla para que el beneficio sea máximo, en cuyo caso, dicho beneficio es de 2835 €.

### BLOQUE 1 - EJERCICIO 2 (Álgebra: sistema de ecuaciones)

$$\begin{cases} x = \text{número de medallas de oro} \\ y = \text{número de medallas de plata} \\ z = \text{número de medallas de bronce} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 36 \\ z = 3x \\ z + 2 = 2(y - 2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 36 \\ 3x - z = 0 \\ 2y - z = 6 \end{cases}$$

Resolución por el método de Gauss:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 36 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 6 \end{array} \right) \xrightarrow{-3F_1+F_2} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 36 \\ 0 & -3 & -4 & -108 \\ 0 & 2 & -1 & 6 \end{array} \right) \xrightarrow{2F_2+3F_3} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 36 \\ 0 & -3 & -4 & -108 \\ 0 & 0 & -11 & -198 \end{array} \right) \begin{matrix} [1] \\ [2] \\ [3] \end{matrix}$$

$$\text{De [3]: } -11z = -198 \Rightarrow z = \frac{-198}{-11} = 18$$

$$\text{Sustituimos en [2]: } -3y - 4z = -108 \Rightarrow y = \frac{-108 + 4 \cdot 18}{-3} = 12$$

$$\text{Sustituimos en [1]: } x + y + z = 36 \Rightarrow x = 36 - 12 - 18 = 6$$

Conclusión: se reparten 6 medallas de oro, 12 medallas de plata y 18 medallas de bronce.

Resolución por la regla de Cramer:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} = 11$$

$$x = \frac{\det \begin{pmatrix} 36 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 6 & 2 & -1 \end{pmatrix}}{11} = \frac{66}{11} = 6, \quad y = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & 36 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & 6 & -1 \end{pmatrix}}{11} = \frac{132}{11} = 12$$

$$z = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 36 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}}{11} = \frac{198}{11} = 18$$

Conclusión: se reparten 6 medallas de oro, 12 medallas de plata y 18 medallas de bronce.

## BLOQUE 2 - EJERCICIO 1 (Análisis)

$$R(x) = \begin{cases} -(x+(t-3))^2 + (t+27) & \text{si } 0 \leq x \leq 3 \\ -\frac{1}{3}x^3 - tx^2 + 5x - 3 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

a) Continuidad en  $x = 3$ : ¿ $\exists \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3)$ ?

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^-} R(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^-} \left[ -(x+(t-3))^2 + (t+27) \right] = -t^2 + t + 27 = R(3) \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} R(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^+} \left( -\frac{1}{3}x^3 - tx^2 + 5x - 3 \right) = -9t + 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow -t^2 + t + 27 = -9t + 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -t^2 + 10t + 24 = 0 \Rightarrow t = \begin{cases} -2 \\ 12 \end{cases}$$

Conclusión: para que  $f(x)$  se continúe en  $x = 3$ , tiene que ser  $t = \begin{cases} -2 \\ 12 \end{cases}$ .

b) Para  $t = -2$ , ¿cuándo se tiene la mayor rentabilidad en el fondo a partir del tercer año?

$$R(x) = \begin{cases} -(x + (-2 - 3))^2 + (-2 + 27) & \text{si } 0 \leq x \leq 3 \\ -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 5x - 3 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

Solo tenemos que considerar la segunda rama:  $R(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 5x - 3$

$$R'(x) = -x^2 + 4x + 5$$

$$R'(x) = 0 \Rightarrow -x^2 + 4x + 5 = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} -1 & \text{(no está en el dominio)} \\ 5 \end{cases}$$

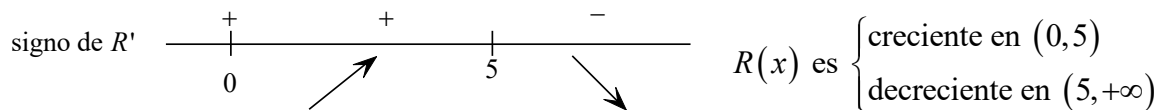
$$R''(x) = -2x + 4$$

$$R''(5) < 0 \Rightarrow R(x) \text{ tiene en } x = 5 \text{ un máximo relativo de coordenadas } (5, R(5)) = \left(5, \frac{91}{3}\right)$$

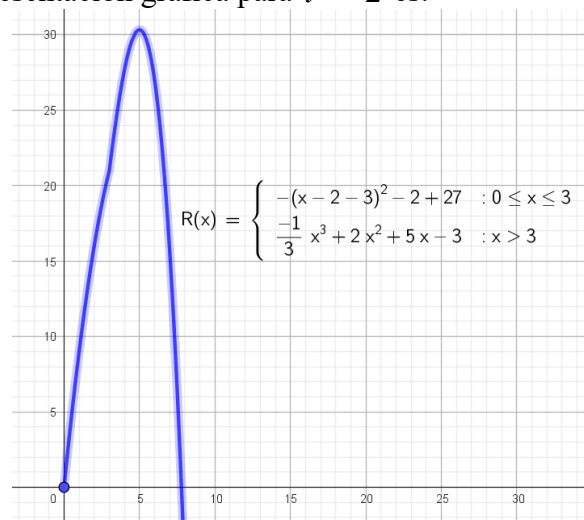
*Solución:* la mayor rentabilidad a partir del tercera año se produce el quinto año.

c) Para  $t = -2$  determina en qué intervalos de tiempo la rentabilidad del fondo crece y en cuáles decrece a partir del tercer año.

Para estudiar la monotonía (creciente/decrecimiento) de una función, hay que estudiar el signo de la derivada primera.



Aunque no se pide, la representación gráfica para  $t = -2$  es:



## BLOQUE 2 - EJERCICIO 2 (Análisis)

$$f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx$$

$f(x)$  tiene un extremo relativo en  $(-1, 0) \Rightarrow$  (condición necesaria de extremos relativos)  $f'(-1) = 0$  y, además, como su gráfica pasa por dicho punto,  $f(-1) = 0$ .

La ecuación de la recta tangente a la función en  $x=0$  es  $y=x \Rightarrow$  (interpretación geométrica de la derivada)  $f'(0)=1$  (pendiente de la recta tangente)

Planteamos y resolvemos el sistema:

$$f'(x) = 4x^3 + 3ax^2 + 2bx + c \Rightarrow \begin{cases} f'(-1) = 0 \Rightarrow 3a - 2b + c = -4 \\ f(-1) = 0 \Rightarrow -a + b - c = 0 \\ f'(0) = 1 \Rightarrow c = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3a - 2b + c = 4 \\ -a + b - c = -1 \\ c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a - 2b = 3 \\ -a + b = 0 \end{cases} \xrightarrow{-3} \begin{cases} 3a - 2b = 3 \\ -3a + 3b = 0 \end{cases}$$

$$b = 3 \Rightarrow a = 3$$

Conclusión:  $(a, b, c) = (3, 3, 1) \Rightarrow f(x) = x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x$

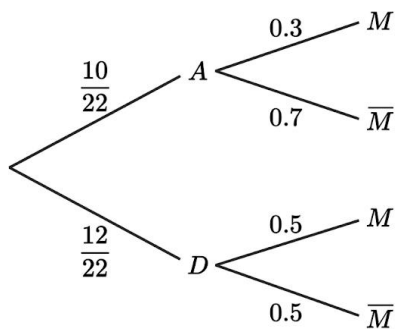
## SECCIÓN 2

### BLOQUE 1 - EJERCICIO 3 (Probabilidad)

Nombramos los sucesos:

$$\begin{cases} A = \text{analista} \\ D = \text{desarrollador} \\ M = \text{usa MacBook} \end{cases}$$

El árbol de probabilidades es:



a) Por el teorema de la probabilidad total:

$$\begin{aligned} P(\bar{M}) &= P(A)P(\bar{M}/A) + P(D)P(\bar{M}/D) = \\ &= \frac{10}{22} \cdot 0,7 + \frac{12}{22} \cdot 0,5 = \frac{13}{22} \approx 0,59 \end{aligned}$$

b) Por el teorema de Bayes:

$$\begin{aligned} P(D/M) &= \frac{P(D \cap M)}{P(M)} = \frac{P(D)P(M/D)}{1 - P(\bar{M})} = \\ &= \frac{\frac{12}{22} \cdot 0,5}{1 - \frac{13}{22}} = \frac{2}{3} \approx 0,67 \end{aligned}$$

### BLOQUE 1 - EJERCICIO 4 (Inferencia estadística)

$X =$  tiempo de ejecución de una operación  $X \rightarrow N(\mu, 42)$  con  $\begin{cases} n = 144 \\ \bar{x} = 142 \text{ ms} \\ \sigma = 42 \text{ ms} \end{cases}$

a) Intervalo de confianza al 94,64 %

Nivel de confianza:

$$1 - \alpha = 94,64 \% = 0,9464 \Rightarrow \alpha = 1 - 0,9464 = 0,0536 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,0268$$

$$P\left(Z < z_{\alpha/2}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - 0,0268 = 0,9732 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1,93$$

Intervalo de confianza:

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(142 - 1,93 \cdot \frac{42}{\sqrt{144}}, 142 + 1,93 \cdot \frac{42}{\sqrt{144}}\right) = (135,245, 148,755)$$

**b) Tamaño muestral**

Nivel de confianza

$$1 - \alpha = 94,64 \% = 0,9412 \Rightarrow \alpha = 1 - 0,9412 = 0,0588 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,0294$$

$$P\left(Z < z_{\alpha/2}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - 0,0294 = 0,9706 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1,89$$

Tamaño muestral con  $E < 8$  ms

$$E = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow n = \left(\frac{z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{1,89 \cdot 42}{8}\right)^2 = 98,456 \approx 99$$

El tamaño mínimo de la muestra debe ser de 99 chips.

### BLOQUE 2 - EJERCICIO 3 (Álgebra: sistemas de ecuaciones)

Nombramos las variables y planteamos el sistema:

$$\begin{cases} x = \text{número de votos de Inés} \\ y = \text{número de votos de Nerea} \\ z = \text{número de votos nulos} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4y - 3x = z + 1 \\ x = y + 7 \\ z = \frac{5}{100}(x + y + z) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 7 \\ -3x + 4y - z = 1 \\ -x - y + 19z = 0 \end{cases}$$

Lo resolvemos por Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 7 \\ -3 & 4 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 19 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_1+F_3 \\ F_1+F_2}]{3F_1+F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & 22 \\ 0 & -2 & 19 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow{2F_2+F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & 22 \\ 0 & 0 & 17 & 51 \end{array}\right) \begin{matrix} [1] \\ [2] \\ [3] \end{matrix}$$

$$\text{De [3]: } z = \frac{51}{17} = 3$$

$$\text{Sustituimos en [2]: } y = 22 + 3 = 25$$

$$\text{Sustituimos en [1]: } x - y = 7 \Rightarrow x = 7 + 25 = 32$$

*Solución:* Inés obtuvo 32 votos, Nerea 25 votos y 3 votos fueron nulos.

Por lo resolvemos por la regla de Cramer:

$$\det \begin{pmatrix} 7 & -1 & 0 \\ -3 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 19 \end{pmatrix} = 17$$

$$x = \frac{\det \begin{pmatrix} 7 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 19 \end{pmatrix}}{17} = \frac{544}{17} = 32; \quad y = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 19 \end{pmatrix}}{17} = \frac{425}{17} = 25; \quad z = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 7 \\ -3 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}}{17} = \frac{51}{17} = 3$$

*Solución:* Inés obtuvo 32 votos, Nerea 25 votos y 3 votos fueron nulos.

## BLOQUE 2 - EJERCICIO 4 (Álgebra: matrices)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- a) Calculamos  $C + AB$ , que se puede calcular, porque  $C_{2 \times 2}$  y  $(A_{2 \times 3} B_{3 \times 2})_{2 \times 2}$ , esto es tienen el mismo orden (dimensión).

$$C + AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- b) Comprobamos si  $C^{-1} + (AB)^{-1} = (C + AB)^{-1}$ :

Calculamos  $C^{-1}$ :

$$\left( \begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{-F_1+F_2} \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1+F_2} \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos  $(AB)^{-1}$ :

$$\left( \begin{array}{cc|cc} 0 & 7 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow -F_2} \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 7 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2:7} \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{7} & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{3F_2+F_1} \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{3}{7} & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{7} & 0 \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (AB)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & -1 \\ \frac{1}{7} & 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos  $C^{-1} + (AB)^{-1}$ :

$$C^{-1} + (AB)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & -1 \\ \frac{1}{7} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & 0 \\ -\frac{6}{7} & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos  $(C + AB)^{-1}$ :

$$\left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2:3} \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} \end{array} \right) \xrightarrow{-6F_2+F_1} \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} \end{array} \right) \Rightarrow (C + AB)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

*Conclusión:*  $C^{-1} + (AB)^{-1} \neq (C + AB)^{-1}$

**SECCIÓN 3****BLOQUE 1 - EJERCICIO 5 (Probabilidad)**

Nombramos los sucesos y escribimos las probabilidades del enunciado:

$$\begin{cases} M = \text{aprobar matemáticas} \Rightarrow P(M) = 0,64 \\ I = \text{aprobar inglés} \Rightarrow P(I) = 0,72 \end{cases} \quad \text{y } P(M \cup I) = 0,78$$

- a) ¿Cuál es la probabilidad de suspender alguna de las dos asignaturas?

$$\begin{aligned} P(\overline{M \cup I}) &= P(\overline{M \cap I}) = 1 - P(M \cap I) \stackrel{(1)}{=} 1 - [P(M) + P(I) - P(M \cup I)] = \\ &= 1 - (0,64 + 0,72 - 0,78) = 0,42 \end{aligned}$$

donde en (1) hemos aplicado las leyes de De Morgan y en (2) hemos tenido en cuenta que  $P(M \cup I) = P(M) + P(I) - P(M \cap I)$ .

- b) ¿Son independientes los sucesos aprobar Matemáticas y aprobar Inglés? Justica la respuesta. Para que sean independientes se tiene que verificar que  $P(M \cap I) = P(M)P(I)$ . Ahora bien.

$$P(M \cap I) = 0,64 + 0,72 - 0,78 = 0,58 \neq 0,4608 = 0,64 \cdot 0,72 = P(M)P(I)$$

y, por tanto, no son independientes.

**BLOQUE 1 - EJERCICIO 6 (Inferencia estadística)**

$X = \text{edad de los usuarios de un juego online} \Rightarrow X \rightarrow N(\mu, 2)$  ya que  $\sigma^2 = 4 \Rightarrow \sigma = \sqrt{4} = 2$

$$\begin{cases} n = 10 \\ \bar{x} = \frac{16+19+21+15+14+18+20+15+14+18}{10} = 17 \text{ años} \end{cases}$$

- a) Intervalo de confianza

Nivel de confianza:

$$1 - \alpha = 97 \% = 0,97 \Rightarrow \alpha = 1 - 0,97 = 0,03 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,015$$

$$P(Z < z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - 0,015 = 0,985 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2,17$$

Intervalo de confianza:

$$\left( \bar{x} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) = \left( 17 - 2,17 \cdot \frac{2}{\sqrt{10}}, 17 + 2,17 \cdot \frac{2}{\sqrt{10}} \right) = (15,628, 18,372)$$

- b) Explica, justificando la respuesta, qué se podría hacer para conseguir un intervalo de confianza con menor amplitud para el mismo nivel de confianza.

Para disminuir la amplitud del intervalo manteniendo el nivel de confianza, hay que aumentar el tamaño de muestra, ya que habría que disminuir  $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$  y  $\sigma$  no cambia.

- c) Error máximo admisible con un nivel de confianza del 95,44 %

Nivel de confianza:

$$1 - \alpha = 95,44 \% = 0,9544 \Rightarrow \alpha = 1 - 0,9544 = 0,0456 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,0228$$

$$P\left(Z < z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - 0,0228 = 0,9772 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2$$

Error máximo admisible:

$$E = z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{81}} = 0,444$$

El error máximo admisible es de 0,444 años.

### BLOQUE 2 - EJERCICIO 5 (Análisis)

$$A(x) = \begin{cases} -(2x+t)^2 + (11+t) & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ x^2 - 8x + 19 + t & \text{si } 2 \leq x \leq 7 \end{cases}$$

a) Valores de  $t$  para que sea continua en  $x = 2$ : ¿ $\lim_{x \rightarrow 2} A(x) = A(2)$ ?

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} A(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} [-(2x+t)^2 + (11+t)] = -t^2 - 7t - 5 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} A(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 - 8x + 19 + t) = t + 7 = A(2) \end{aligned} \right\} \Rightarrow -t^2 - 7t - 5 = t + 7 \Rightarrow t^2 + 8t + 12 = 0 \Rightarrow t = \begin{cases} -2 \\ -6 \end{cases}$$

Conclusión: para  $t = \begin{cases} -2 \\ -6 \end{cases}$ , la función es continua en  $x = 2$

b) Representación gráfica para  $t = -1$ :

$$A(x) = \begin{cases} -(2x-1)^2 + 10 & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ x^2 - 8x + 18 & \text{si } 2 \leq x \leq 7 \end{cases}$$

$$A(x) = -4x^2 + 4x + 9 \text{ para } 0 \leq x < 2$$

Vértice:

$$\left. \begin{aligned} x_v &= \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2 \cdot (-4)} = \frac{1}{2} \\ y_v &= 10 \end{aligned} \right\} V\left(\frac{1}{2}, 10\right)$$

Tabla de valores:

$x$	0	"2"
$y$	9	1

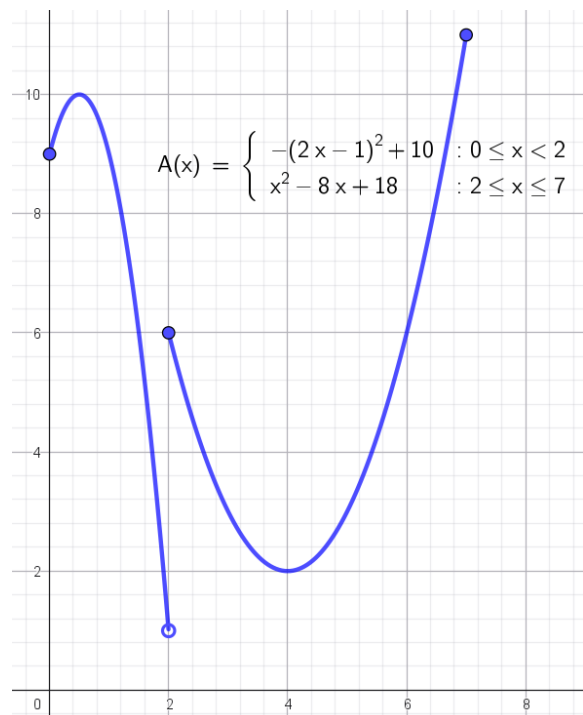
$$A(x) = x^2 - 8x + 18 \text{ para } 2 \leq x \leq 7$$

Vértice:

$$\left. \begin{aligned} x_v &= \frac{-b}{2a} = \frac{8}{2 \cdot 1} = 4 \\ y_v &= 4^2 - 8 \cdot 4 + 18 = 2 \end{aligned} \right\} V(4, 2)$$

Tabla de valores:

$x$	2	7
$y$	6	11



### BLOQUE 2 - EJERCICIO 6 (Análisis)

$$S(t) = -0,5(2t^3 - 34t^2 - 3968t - 60) \text{ donde } t \text{ se expresa en años.}$$

a) ¿Cuántos socios tenía el club en el año del mundial en España, 1982?

$$\text{El año 1982 es } t=17, \text{ luego } S(17) = -0,5(2 \cdot 17^3 - 34 \cdot 17^2 - 3968 \cdot 17 - 60) = 33\,758$$

*Respuesta:* En 1982 había 33 758 socios.

b) ¿En qué momento de la existencia del club se alcanzan el máximo y mínimo número de socios? ¿Cuáles son los valores del máximo y mínimo número de socios?

$$S(t) = -0,5(2t^3 - 34t^2 - 3968t - 60) = -t^3 + 17t^2 + 1984t + 30$$

$$S'(t) = -3t^2 + 34t + 1984$$

$$S'(t) = 0 \Rightarrow -3t^2 + 34t + 1984 = 0 \Rightarrow t = \begin{cases} 32 \\ -\frac{62}{3} \text{ (No vale)} \end{cases}$$

$$S''(t) = -6t + 34$$

$$S''(32) = -6 \cdot 32 + 34 = -188 < 0 \Rightarrow t = 32 \text{ es un máximo relativo de } S(t) \text{ de coordenadas } (32, S(32)) = (32, 48158)$$

*Respuesta:* el máximo relativo se alcanza a los 32 años, en 1997, con  $S(32) = 48\,158$  socios y el mínimo el año de la fundación, 1965, con  $S(0) = 30$  socios.