**Evaluación para el Acceso a la Universidad. Convocatoria de 2024**
**Materia: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**
**Instrucciones:** El examen se compone de tres secciones de dos bloques cada una y cada bloque tiene dos ejercicios. Se debe elegir un bloque de cada una de las tres secciones.
**Sólo están permitidas las calculadoras tipo I y II**. Se puede hacer uso de colores salvo el color rojo. Es necesario **detallar** el proceso de resolución de los ejercicios.

## Sección 1 (3 puntos) Bloque 1

**1.** Una industria fabrica planchas de acero y de aluminio. Cada kilo de plancha de acero requiere $4$ horas de trabajo y $60$€ en gasto de material y arroja unos beneficios de $45$€, mientras que cada kilo de plancha de aluminio supone $7$ horas de trabajo y tiene un gasto de $48$€ siendo el beneficio de $30$€. Cada semana, la industria cuenta con $200$ horas de trabajo y $2088$€ en material y está obligada a producir un mínimo de $15$ kg de planchas de acero y $10$ kg de las de aluminio.

a) Expresa la función objetivo, escribe mediante inecuaciones las restricciones del problema y representa gráficamente el recinto definido. (1.25 puntos)

b) Determina cuántos kilos de cada tipo de plancha deben fabricarse para que el beneficio sea máximo. (0.25 puntos)

**2.** Tras la Semana Santa, la cantidad de agua embalsada en conjunto entre los embalses de Torre de Abraham, Gasset y Azután es de $156$ hm$^3$. El agua embalsada en Azután coincide con el doble de la diferencia entre Torre de Abraham y Gasset y además, el embalse de Gasset contiene un tercio del agua que contiene Azután.

a) Plantea el sistema de ecuaciones para calcular qué cantidad de agua hay embalsada en cada embalse. (0.75 puntos)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.75 puntos)

## Bloque 2

**1.** El precio, $P(x)$ (en euros), de las acciones de una compañía a lo largo de $10$ días ($x \equiv$ días) viene expresado por la función

$$P(x) = \begin{cases} 18x^2 - 100x + 162 & \text{si } 0 \le x \le c \\ -x^3 + 18x^2 - 96x + 162 & \text{si } c < x < 10 \end{cases}$$

a) ¿Para qué valor de $c$ el precio de las acciones se comporta de forma continua en $x = c$? (0.5 puntos)

b) Para $c = 2$, ¿cuándo se tienen los precios máximo y mínimo de las acciones a partir del segundo día? (0.5 puntos)

c) Para $c = 2$, determina en qué intervalos de tiempo el precio de las acciones crece y en cuáles decrece a partir del segundo día. (0.5 puntos)

**2.** Dada la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$, encuentra el valor de los parámetros $a$, $b$ y $c$ sabiendo que la función pasa por el punto $(0, 3)$ y la ecuación de la recta tangente a la función en el punto $(1, 8)$ es $y = 2x + 6$. (1.5 puntos)

## Sección 2 (3.5 puntos) Bloque 1

**3.** En un taller el $10\,\%$ de las reparaciones se realizan a motos, el $70\,\%$ a coches y el resto a furgonetas. Se sabe que un $20\,\%$ de las reparaciones a motos, un $60\,\%$ de las reparaciones a coches y un $85\,\%$ de las reparaciones a furgonetas las paga el seguro.

a) Elegido un vehículo al azar, ¿cuál es la probabilidad de que la reparación no la pague el seguro? (0.75 puntos)

b) Si se sabe que una reparación la ha pagado el seguro, ¿cuál es la probabilidad de que sea de una moto? (0.75 puntos)

**4.** Las horas de sueño de la población adolescente española sigue una distribución normal de media desconocida y varianza $\sigma^2 = 4$ horas$^2$. Se ha tomado una muestra de $12$ adolescentes y las horas de sueño registradas han sido $6.5$, $8.4$, $9.6$, $7.4$, $7.1$, $6.8$, $8.8$, $8.3$, $8.0$, $7.1$, $7.8$ y $9.0$ horas.

a) Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional de las horas de sueño con un nivel de confianza del $95.96\,\%$. (1 punto)

b) ¿Cuál sería el error máximo admisible si se hubiera utilizado una muestra de $64$ adolescentes y un nivel de confianza del $96.52\,\%$? (1 punto)

| z | 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.04 | 0.05 | 0.06 | 0.07 | 0.08 | 0.09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2.0 | 0.9772 | 0.9778 | 0.9783 | 0.9788 | 0.9793 | 0.9798 | 0.9803 | 0.9808 | 0.9812 | 0.9817 |
| 2.1 | 0.9821 | 0.9826 | 0.9830 | 0.9834 | 0.9838 | 0.9842 | 0.9846 | 0.9850 | 0.9854 | 0.9857 |

## Bloque 2

**3.** De los bebés inscritos en el mes de mayo en Castilla-La Mancha, $72$ tienen el nombre de Alba, Pablo o David. Sabemos que el número de bebés llamados David coincide con la diferencia entre los que se llaman Pablo y las que se llaman Alba. Además, se han inscrito tantas niñas con el nombre de Alba como la suma de los inscritos como David y un tercio de los inscritos como Pablo.

a) Plantea el sistema de ecuaciones que permita averiguar cuántos bebés han sido inscritos con cada uno de los nombres. (0.75 puntos)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.75 puntos)

**4.** Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Comprueba que $A^2 = 2A - I$, siendo $I$ la matriz identidad de orden 3. (1 punto)

b) Usando la fórmula anterior, expresa $A^4$ a partir de las matrices $A$ e $I$ y calcula su valor. (1 punto)

## Sección 3 (3.5 puntos) Bloque 1

**5.** El $70\,\%$ de los usuarios de una plataforma de streaming ve series, el $20\,\%$ ve documentales y el $12\,\%$ ve series y documentales.

a) ¿Cuál es el porcentaje de usuarios que no ve ni series ni documentales? (0.75 puntos)

b) Si elegido un usuario al azar, indica que ve series, ¿cuál es la probabilidad de que vea documentales? (0.75 puntos)

**6.** En una empresa de telefonía, el número de llamadas al día que reciben de clientes para hacer reclamaciones sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma = 280$ llamadas. Se ha tomado una muestra aleatoria de $100$ días proporcionando una media de $486$ llamadas de clientes al día.

a) Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional del número de llamadas con un nivel de confianza del $95\,\%$. (1 punto)

b) Explica, justificando la respuesta, qué ocurrirá con la amplitud del intervalo si para el mismo nivel de confianza aumentamos el tamaño de muestra. (0.5 puntos)

c) ¿Se puede aceptar la afirmación de que la media de llamadas al día es de $500$ con un nivel de confianza del $99\,\%$? Justifica la respuesta. (0.5 puntos)

| z | 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.04 | 0.05 | 0.06 | 0.07 | 0.08 | 0.09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1.8 | 0.9641 | 0.9649 | 0.9656 | 0.9664 | 0.9671 | 0.9678 | 0.9686 | 0.9693 | 0.9699 | 0.9706 |
| 1.9 | 0.9713 | 0.9719 | 0.9726 | 0.9732 | 0.9738 | 0.9744 | 0.9750 | 0.9756 | 0.9761 | 0.9767 |

## Bloque 2

**5.** En una empresa farmacéutica, el rendimiento económico, $R(x)$ (en millones de euros), de un fármaco en función del tiempo, $x$ (en años), desde su lanzamiento viene expresado por la función

$$R(x) = \begin{cases} 2x+4 & \text{si } 0 \le x \le 2 \\ (5+t)x-1 & \text{si } 2 < x \le 5 \\ -(x+t)^2+(14+t)x-30 & \text{si } 5 < x \le 11 \end{cases}$$

a) ¿Existe algún valor de $t$ para el que el rendimiento económico del fármaco sea continuo en $x = 5$? (0.75 puntos)

b) Representa gráficamente el rendimiento económico del fármaco para $t = 0$. (0.75 puntos)

**6.** El número de turistas que visitan una ciudad durante un día determinado se ajusta a la función $P(t) = 432t - t^3$ donde $t$ es la hora del día entre las $8$ de la mañana y las $8$ de la tarde $(8 \le t \le 20)$ y $P(t)$ indica el número de visitantes.

a) ¿En qué momento del día se produce una máxima afluencia? ¿Cuál es esa máxima afluencia? (1.25 puntos)

b) ¿En qué intervalos de horas sube y en cuáles baja la afluencia de visitantes? (0.75 puntos)

# SOLUCIONES

## SECCIÓN 1

### BLOQUE 1 - EJERCICIO 1 (Programación lineal)

Variables: $\begin{cases} x = \text{kilos de planchas de acero} \\ y = \text{kilos de planchas de alumnio} \end{cases}$

Función objetivo: $F(x, y) = 45x + 30y$

Restricciones: $\begin{cases} 4x + 7y \leq 200 \\ 60x + 48y \leq 2088 \\ x \geq 15,\ y \geq 10 \end{cases}$

Región factible y vértices:

$4x + 7y \leq 200$

$4x + 7y = 200$

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 0 | 28,6 |
| 50 | 0 |

$(0,0)$ verifica la inecuación

$60x + 48y \leq 2088$

$60x + 48y = 2088$

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 34,8 | 0 |
| 0 | 43,5 |

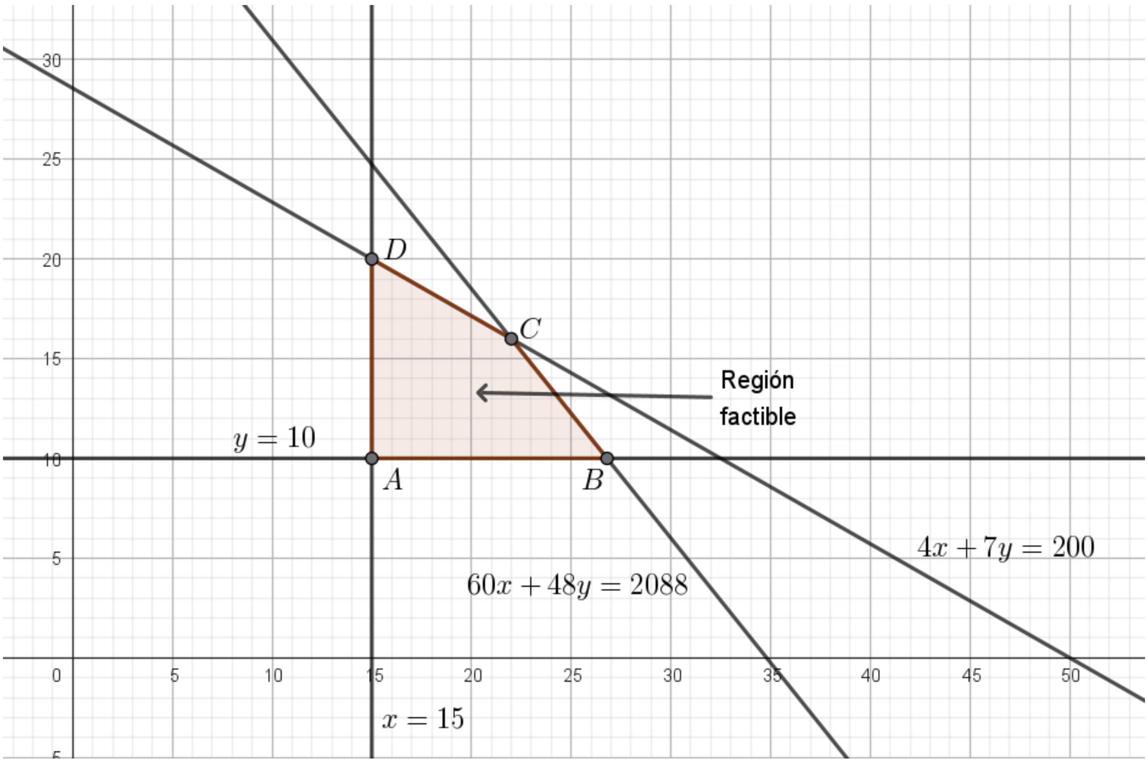
$(0,0)$ verifica la inecuación

$A(15,10)$

$C\begin{cases} 4x + 7y = 200 \\ 60x + 48y = 2088 \end{cases} \Rightarrow C(22,16)$

$B\begin{cases} y = 10 \\ 60x + 48y = 2088 \end{cases} \Rightarrow B(26.8\ ,\ 10)$

$D\begin{cases} 4x + 7y = 200 \\ x = 15 \end{cases} \Rightarrow D(15,20)$



Evaluamos la función objetivo en los vértices:

$$F_A(15,10) = 45\cdot 15 + 30\cdot 10 = 975$$
$$F_B(26.8,10) = 45\cdot 26{,}8 + 30\cdot 10 = 1506$$
$$F_C(22,16) = 45\cdot 22 + 30\cdot 16 = 1470$$
$$F_A(15,20) = 45\cdot 15 + 30\cdot 20 = 1275$$

*Solución*: se tienen que fabricar 26,8 kg de planchas de acero y 10 kg de planchas de aluminio para que el beneficio sea máximo, en cuyo caso, dicho beneficio máximo es de 1506 €.

## BLOQUE 1 - EJERCICIO 2 (Álgebra: sistema de ecuaciones)

Nombramos las variables y planteamos el sistema:

$$\begin{cases} x = \text{hm}^3 \text{ en Torre de Abraham} \\ y = \text{hm}^3 \text{ en Gasset} \\ z = \text{hm}^3 \text{ en Azután} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=156 \\ z = 2(x-y) \\ 3y = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=156 \\ 2x-2y-z=0 \\ 3y-z=0 \end{cases}$$

*Resolución por el método de Gauss:*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 156 \\ 2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{-2F_1+F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 156 \\ 0 & -4 & -3 & -312 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{3F_2+4F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 156 \\ 0 & -4 & -3 & -312 \\ 0 & 0 & -13 & -936 \end{array}\right)\begin{array}{c}[1]\\ [2]\\ [3]\end{array}$$

De [3]: $z = \dfrac{-936}{-13} = 72$

Sustituimos en [2]: $y = \dfrac{-312+3\cdot 72}{-4} = 24$

Sustituimos en [1]: $x = 156-24-72 = 60$

*Conclusión:* El embalse de Torre de Abraham tiene 60 $\text{hm}^3$, el de Gasset 24 $\text{hm}^3$ y el de Azután 72 $\text{hm}^3$.

*Resolución por la regla de Cramer:*

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} = 13$$

$$x = \frac{\det\begin{pmatrix} 156 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}}{13} = \frac{780}{13} = 60,\ y = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & 156 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}{13} = \frac{312}{13} = 24,\ z = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 156 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}}{13} = \frac{936}{13} = 72$$

*Conclusión:* El embalse de Torre de Abraham tiene 60 $\text{hm}^3$, el de Gasset 24 $\text{hm}^3$ y el de Azután 72 $\text{hm}^3$.

## BLOQUE 2 - EJERCICIO 1 (Análisis)

$$P(x) = \begin{cases} 18x^2 - 100x + 162 & \text{si} \quad 0 \le x \le c \\ -x^3 + 18x^2 - 96x + 162 & \text{si} \quad c < x < 10 \end{cases}$$

**a)** Continuidad en $x=c$: $¿\exists \lim\limits_{x\to c} f(x)=f(c)?$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to c-} P(x)=\lim\limits_{x\to c-}\left(18x^2-100x+162\right)=18c^2-100c+162=P(c)\\ \lim\limits_{x\to c+} P(x)=\lim\limits_{x\to c+}\left(-x^3+18x^2-96x+162\right)=-c^3+18c^2-96c+162\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 18c^2-100c+162=-c^3+18c^2-96c+162\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -c^3+4c=0\Rightarrow c\left(-c^2+4\right)=0\Rightarrow c=\begin{cases}0\\ -2 \text{ (No está en el dominio)}\\ 2\end{cases}$$

*Conclusión*: para que $P(x)$ sea continua en $x=c$, tiene que ser $c=\begin{cases}0\\ 2\end{cases}$.

**b)** Para $c=2$, a partir del segundo día, la función es $P(x)=-x^3+18x^2-96x+162$:

$P'(x)=-3x^2+36x-96$

$P'(x)=0\Rightarrow -3x^2+36x-96=0\Rightarrow x=\begin{cases}4\\ 8\end{cases}$

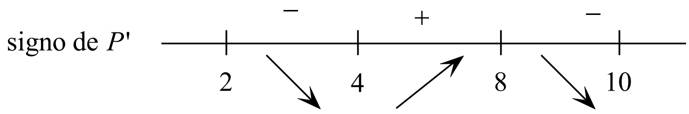
$P''(x)=-6x+36$

$P''(4)=12>0\Rightarrow x=4$ es un mínimo relativo de $P(x)$ de coordenadas $(4,P(4))=(4,2)$

$P''(8)=-12<0\Rightarrow x=8$ es un máximo relativo de $P(x)$ de coordenadas $(8,P(8))=(8,34)$

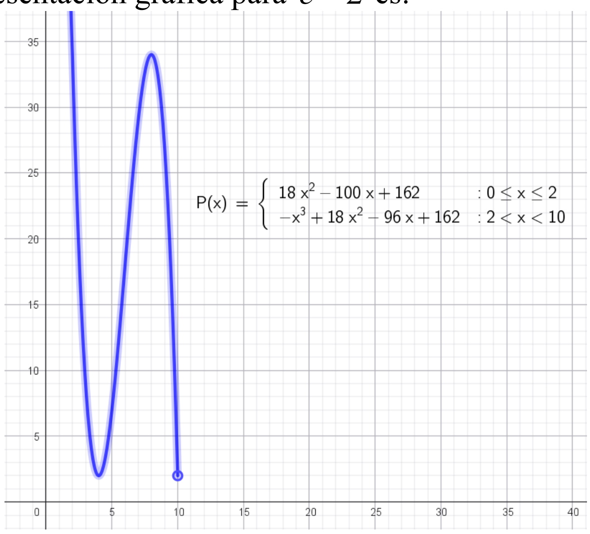
*Solución*: el precio máximo de las acciones es de 34 € y se obtiene el octavo día, y el precio mínimo de las acciones es de 2 € y se da obtiene el cuarto día.

**c)** Para $c=2$ determina la monotonía a partir del segundo día.
Para estudiar la monotonía (creciente/decrecimiento) de una función, hay que estudiar el signo de la derivada primera.




$P(x)$ es $\begin{cases}\text{creciente en } (4,8)\\ \text{decreciente en } (2,4)\cup(8,10)\end{cases}$

Aunque no se pide, la representación gráfica para $c=2$ es:



## BLOQUE 2 - EJERCICIO 2 (Análisis)

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + c$$

$$\begin{cases} [1]: f \text{ pasa por } (0,3) \\ [2]: \text{La ecuación de la recta tangente a } f \text{ en } (1,8) \text{ es } y = 2x+6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} [1]: f(0) = 3 \\ [2]: \begin{cases} f(1) = 8 \text{ ya que } f \text{ pasa por } (1,8) \\ f'(1) = 2 = \text{pendiente de la recta tangente} \\ f'(x) = 3ax^2 + 2bx \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 3 \\ a+b+c = 8 \\ 3a+2b = 2 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} c = 3 \\ a+b+c = 8 \\ 3a+2b = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b = 5 \\ 3a+2b = 2 \end{cases} \xrightarrow{\cdot(-3)} \begin{cases} -3a-3b = -15 \\ \underline{3a+2b = 2} \end{cases}$$

$$-b = -13 \Rightarrow b = 13 \Rightarrow a = 5-13 = -8$$

Solución: $(a,b,c) = (-8,13,3) \Rightarrow f(x) = -8x^3 + 13x^2 + 3$

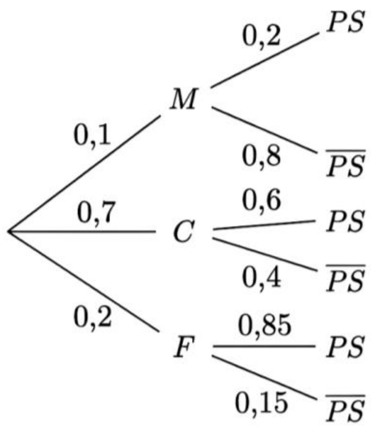
## <u>SECCIÓN 2</u>

## BLOQUE 1 - EJERCICIO 3 (Probabilidad)

Nombramos los sucesos:

$$\begin{cases} M = \text{moto} \Rightarrow P(M) = 0,1 \\ C = \text{coche} \Rightarrow P(C) = 0,7 \\ F = \text{furgoneta} \Rightarrow P(F) = 0,2 \\ PS = \text{paga el seguro} \end{cases} \text{ y además, } \begin{cases} P\left(PS/M\right) = 0,2 \\ P\left(PS/C\right) = 0,6 \\ P\left(PS/F\right) = 0,85 \end{cases}$$

El árbol de probabilidades es:




**a)** Aplicamos el teorema de la probabilidad total:

$$P\left(\overline{PS}\right) = P(M)P\left(\overline{PS}/M\right) + P(C)P\left(\overline{PS}/C\right) + P(F)P\left(\overline{PS}/F\right) =$$

$$= 0,1 \cdot 0,8 + 0,7 \cdot 0,4 + 0,2 \cdot 0,15 = \frac{39}{100} = 0,39$$

**b)** Aplicamos el teorema de Bayes:

$$P\left(M/_{PS}\right)=\frac{P(M\cap PS)}{P(PS)}=\frac{P(M)P\left(PS/_{M}\right)}{1-P\left(\overline{PS}\right)}=\frac{0,1\cdot 0,2}{1-0,39}=\frac{2}{61}=0,033$$

## BLOQUE 1 - EJERCICIO 4 (Inferencia estadística)

$X=$ horas de sueño de la población adolescente española $X\to N(\mu,2)$ con $\begin{cases} n=12 \\ \sigma^2=4\text{ h}^2\Rightarrow\sigma=2\text{ h}\end{cases}$

**a)** Intervalo de confianza al 95,96 %

Media muestral:

$$\overline{x}=\frac{6,5+8,4+9,6+7,4+7,1+6,8+8,8+8,3+8+7,1+7,8+9}{12}=7,9\text{ h}$$

Nivel de confianza:

$$1-\alpha=94,64\ \%=0,9596\Rightarrow\alpha=1-0,9596=0,0404\Rightarrow\frac{\alpha}{2}=0,0202$$

$$P\left(Z<z_{\alpha/2}\right)=1-\frac{\alpha}{2}=1-0,0202=0,9798\Rightarrow z_{\alpha/2}=2,05$$

Intervalo de confianza:

$$\left(\overline{x}-z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{x}+z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=\left(7,9-2,05\cdot\frac{2}{\sqrt{12}}\ ,\ 7,9+2,05\cdot\frac{2}{\sqrt{12}}\right)=(6,7164\ ,\ 9,0836)$$

**b)** Error máximo admisible

Nivel de confianza

$$1-\alpha=94,64\ \%=0,9652\Rightarrow\alpha=1-0,9652=0,0348\Rightarrow\frac{\alpha}{2}=0,0174$$

$$P\left(Z<z_{\alpha/2}\right)=1-\frac{\alpha}{2}=1-0,0174=0,9826\Rightarrow z_{\alpha/2}=2,11$$

Error máximo admisible:

$$E=z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=2,11\cdot\frac{2}{\sqrt{64}}=0,5275$$

El error máximo admisible es de 0,53 h.

## BLOQUE 2 - EJERCICIO 3 (Álgebra: sistemas de ecuaciones)

Nombramos las variables y planteamos el sistema:

$$\begin{cases} x=\text{número de bebés que se llaman Alba} \\ y=\text{número de bebés que se llaman Pablo} \\ z=\text{número de bebés que se llaman David}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x+y+z=72 \\ z=y-x \\ x=z+\dfrac{y}{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x+y+z=72 \\ x-y+z=0 \\ 3x-y-3z=0\end{cases}$$

*Lo resolvemos por Gauss:*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 72 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -3 & 0\end{array}\right)\xrightarrow[-3F_1+F_3]{-F_1+F_2}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 72 \\ 0 & -2 & 0 & -72 \\ 0 & -4 & -6 & -216\end{array}\right)\begin{array}{c}[1]\\ [2]\\ [3]\end{array}$$

De [2]: $y = \frac{-72}{-2} = 36$

Sustituimos en [3]: $z = \frac{-216 + 6 \cdot 36}{-4} = 12$

Sustituimos en [1]: $x = 72 - 36 - 12 = 24$

*Solución*: hay 24 bebés que se llaman Alba, 36 bebés que se llaman Pablo y 12 bebés que se llaman David.

*Por lo resolvemos por la regla de Cramer:*

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix} = 12$$

$$x = \frac{\det\begin{pmatrix} 72 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}}{12} = \frac{288}{12} = 24,\ y = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & 72 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}}{12} = \frac{432}{12} = 36,\ z = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 72 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}}{12} = \frac{144}{12} = 12$$

*Solución*: hay 24 bebés que se llaman Alba, 36 bebés que se llaman Pablo y 12 bebés que se llaman David.

## BLOQUE 2 - EJERCICIO 4 (Álgebra: matrices)

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

**a)** ¿$A^2 = 2A - I$?

Calculamos $A^2$:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix}$$

Calculamos $2A - I$:

$$2A - I = 2\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -8 & 4 \\ 4 & -2 & 2 \\ -8 & 8 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix}$$

*Conclusión:* $A^2 \neq 2A - I$

**b)** Expresamos $A^4$ en función de $A$ y de $I$, usando que $A^2 = 2A - I$

$$A^4 = A^2A^2 = (2A - I)(2A - I) = 4A^2 - 4AI + I^2 = 4A^2 - 4A + I = 4(2A - I) - 4A + I =$$
$$= 8A - 4I - 4A - I = 4A - 3I$$

Calculamos $A^4 = 4A - 3I$

$$A^4 = 4A - 3I = 4\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & -16 & 8 \\ 8 & -4 & 4 \\ -16 & 16 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & -16 & 8 \\ 8 & -7 & 4 \\ -16 & 16 & -7 \end{pmatrix}$$

## SECCIÓN 3

## BLOQUE 1 - EJERCICIO 5 (Probabilidad)

Nombramos los sucesos y escribimos las probabilidades del enunciado:

$$\begin{cases} S = \text{el usuario ve series} \Rightarrow P(S) = 0,70 \\ D = \text{el usuario ve documentales} \Rightarrow P(D) = 0,20 \end{cases} \text{ y } P(S \cap D) = 0,12$$

a) $$P\left(\overline{S} \cap \overline{D}\right) \underset{(1)}{=} P\left(\overline{S \cup D}\right) = 1 - P(S \cup D) = 1 - \left[P(S) + P(D) - P(S \cap D)\right] =$$
$$= 1 - (0,70 + 0,20 - 0,12) = 0,22$$

donde en (1) hemos aplicado las leyes de De Morgan.

b) $$P\left(D/S\right) = \frac{P(D \cap S)}{P(S)} = \frac{0,12}{0,70} = \frac{6}{35} = 0,1714$$

## BLOQUE 1 - EJERCICIO 6 (Inferencia estadística)

$X =$ número de llamadas al día que reciben de clientes para hacer reclamaciones $\Rightarrow X \to N(\mu, 280)$

$$\begin{cases} n = 100 \text{ y } \sigma = 280 \\ \overline{x} = 486 \text{ llamadas} \end{cases}$$

**a)** Intervalo de confianza

Nivel de confianza:

$$1 - \alpha = 97\ \% = 0,95 \Rightarrow \alpha = 1 - 0,95 = 0,05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,025$$

$$P\left(Z < z_{\alpha/2}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - 0,025 = 0,975 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$$

Intervalo de confianza:

$$\left(\overline{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(486 - 1,96 \cdot \frac{280}{\sqrt{100}}\ ,\ 486 + 1,96 \cdot \frac{280}{\sqrt{100}}\right) = (431,12\ ,\ 540,88)$$

**b)** Explica, justificando la respuesta, qué se podría hacer para conseguir un intervalo de confianza con menor amplitud para el mismo nivel de confianza.

Para disminuir la amplitud del intervalo manteniendo el nivel de confianza, hay que aumentar el tamaño de muestra, ya que habría que disminuir $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

**c)** El valor $\mu = 500 \in (431,12\ ,\ 540,88)$ con una confianza del 95 %, luego al aumentar el nivel de confianza, aumenta la amplitud del intervalo y, como consecuencia, dicho valor también estará en el intervalo de confianza con un nivel de confianza del 99 %. Por tanto, se puede aceptar la afirmación.

## BLOQUE 2 - EJERCICIO 5 (Análisis)

$$R(x)=\begin{cases} 2x+4 & \text{si} \quad 0\le x\le 2 \\ (5+t)x-1 & \text{si} \quad 2<x\le 5 \\ -(x+t)^2+(14+t)x-30 & \text{si} \quad 5<x\le 11 \end{cases}$$

a) ¿Existe algún valor de t para el que el rendimiento económico del fármaco sea continuo en $x=5$?

Continuidad en $x=5$: ¿$\exists \lim\limits_{x\to 5} R(x)=R(5)$?

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 5-} R(x)=\lim\limits_{x\to 5-}\left[(5+t)x-1\right]=24+5t=R(5) \\ \lim\limits_{x\to 5+} R(x)=\lim\limits_{x\to 5+}\left[-(x+t)^2+(14+t)x-30\right]=-t^2-5t+15 \end{array}\right\}\Rightarrow 24+5t=-t^2-5t+15\Rightarrow t=\begin{cases}-9\\-1\end{cases}$$

*Solución*: para $t=\begin{cases}-9\\-1\end{cases}$ el rendimiento económico es continuo en $x=5$.

b) Representación gráfica para $t=0$

$y=2x+4$

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 0 | 4 |
| 2 | 8 |

$y=5x-1$

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| "2" | 9 |
| 5 | 24 |

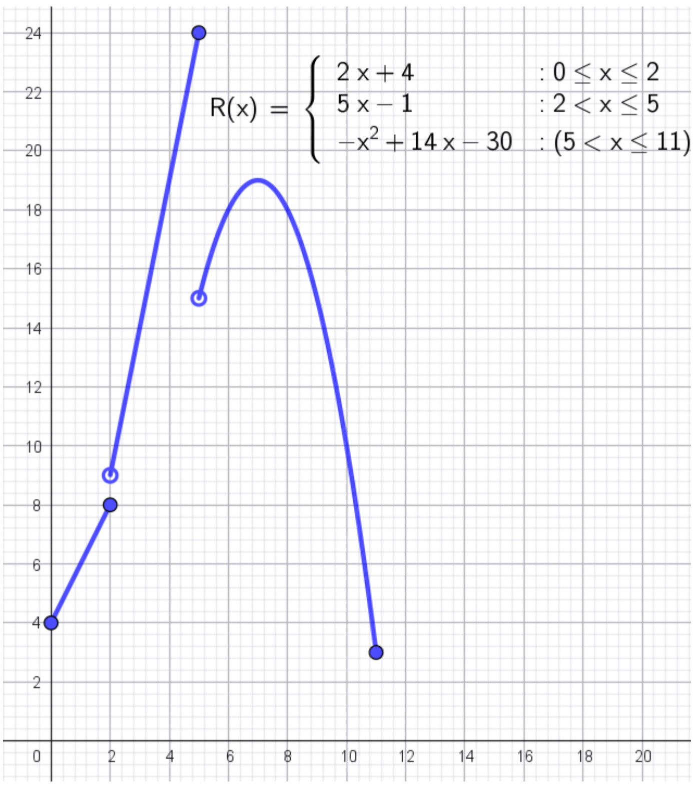
$y=-x^2+14x-30$

Vértice:

$$\begin{cases} x_v=\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{-14}{2\cdot(-1)}=7 \\ y_v=-7^2+14\cdot 7-30=19 \end{cases}\Rightarrow V(7,19)$$

Tabla de valores:

| $x$ | 5 | 11 |
|---|---|---|
| $y$ | 15 | 3 |



## BLOQUE 2 - EJERCICIO 6 (Análisis)

$$P(t) = 432t - t^3 \text{ con } t \in [8, 20]$$

a) ¿En qué momento del día se produce una máxima afluencia? ¿Cuál es esa máxima afluencia?

$P'(t) = 432 - 3t^2$

$P'(t) = 0 \Rightarrow 432 - 3t^2 = 0 \Rightarrow t = \sqrt{\dfrac{432}{3}} = 12$ (La solución negativa no es válida)

$P''(t) = -6t$

$P''(12) < 0 \Rightarrow t = 12$ es un máximo relativo de $P(t)$ de coordenadas $(12, P(12)) = (12, 3456)$

*Solución*: la máxima afluencia se produce a las 12 h y dicha afluencia máxima es de 3456 turistas.

b) ¿En qué intervalos de horas sube y en cuáles baja la afluencia de visitantes?

$P'(t) = 432 - 3t^2$

$P'(t) = 0 \Rightarrow 432 - 3t^2 = 0 \Rightarrow t = \sqrt{\dfrac{432}{3}} = 12$ (La solución negativa no es válida)

| signo de $P'$ | 8 | | 12 | | 20 |
|---|---|---|---|---|---|
| | | $+$ | | $-$ | |
| | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | |

$$P(t) \text{ es } \begin{cases} \text{creciente en } (8, 12) \\ \text{decreciente en } (12, 20) \end{cases}$$

*Solución*: entre las 8 y las 12 h, el número de turistas aumenta y entre las 12 y las 20 h, el número de turistas disminuye.