Universidad de Castilla-La Mancha UCLM

Prueba de acceso a la Universidad

Curso 2024/2025

Materia: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

INSTRUCCIONES: El estudiante deberá resolver los cuatro ejercicios propuestos. En **los ejercicios 3 y 4** deberá contestar solamente a **UNO** de los dos apartados propuestos. Si resuelve más, se corregirá solo el primero de los dos apartados resueltos. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Solo están permitidas **las calculadoras de tipo 1 y 2**. **Cada ejercicio completo puntuará 2.5 puntos.**
Duración de la prueba: 90 minutos.

Ejercicio 1.- Un centro de atención telefónica estima que el tiempo, en minutos, de atención a las llamadas que recibe se aproxima por una distribución normal con desviación típica $\sigma = 4$ minutos. Se toma una muestra de 36 llamadas y se observa que el tiempo medio de atención es de 15 minutos. Con un nivel de confianza del 97%,

a) Calcula el intervalo de confianza para el tiempo de atención medio poblacional. **(1 punto)**

b) Explica, justificando la respuesta, cómo se podría obtener un intervalo de confianza con menor amplitud sin modificar el nivel de confianza. **(0.75 puntos)**

c) Una asociación de consumidores afirma que el tiempo medio de atención a las llamadas es de 17 minutos. Dado el intervalo del apartado a), ¿se puede aceptar tal afirmación con un nivel de confianza del 95%? Justificar la respuesta. **(0.75 puntos)**

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857

Ejercicio 2.- Lucía, en un examen de Historia que constaba de tres preguntas, ha obtenido una calificación total de 7,2 puntos. La puntuación obtenida en la primera pregunta fue un 40 % más que la obtenida en la segunda, y la puntuación del tercer enunciado fue el doble de la suma de las puntuaciones obtenidas en la primera y segunda pregunta. ¿Cuál fue la puntuación obtenida por Lucía en cada pregunta? **(2.5 puntos)**

Ejercicio 3.- Elige y resuelve **sólo uno** de los dos apartados siguientes:

Apartado a) Se considera la función $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 3x + 10 & si\ x \leq k \\ x^2 - 4x + 9 & si\ x > k \end{cases}$

a.1) ¿Para qué valores de k la función $f(x)$ es continua en $x = k$? **(1 punto)**

a.2) Si $k = 1$, calcula los máximos y mínimos relativos de la función $f(x)$. **(0.75 puntos)**

a.3) En ese mismo supuesto, determina en qué intervalos la función es creciente y en cuáles es decreciente. **(0.75 puntos)**

Apartado b) Dada la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$, se sabe que tiene un mínimo relativo en el punto $(2, -3)$ y un punto de inflexión en $(1, -1)$.

b.1) Encuentra el valor de los parámetros a, b y c. **(1.5 puntos)**

b.2) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\ y\ C = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, calcula la matriz X en la ecuación matricial $A \cdot B \cdot X = C \cdot X + I$, donde I es la matriz identidad de orden 2. **(1 punto)**

Ejercicio 4.- Elige y resuelve **sólo uno** de los dos apartados siguientes:

Apartado a) Una fábrica de quesos organiza paquetes para enviar: A y B. Para la elaboración del paquete tipo A se necesitan 30 minutos de trabajo manual y 45 minutos de trabajo en máquinas. Para la de tipo B, 60 minutos de trabajo manual y 20 minutos de máquinas. Tienen necesidad de enviarlo pronto, por lo que disponen de 85 horas de trabajo manual y 75 horas de trabajo con máquinas y deben enviar, al menos, 100 paquetes. El beneficio total es de 20 € por cada paquete tipo A y 17 € por cada paquete tipo B y se pretende maximizar el beneficio total.

a.1) Expresa la función objetivo; escribe, mediante inecuaciones, las restricciones del problema y representa gráficamente el recinto definido. **(2 puntos)**

a.2) Determina cuántos paquetes de cada tipo tiene que fabricar la empresa para que el beneficio sea máximo. **(0.5 puntos)**

Apartado b) Se va a proceder a la selección de pilotos para una compañía de vuelos. Se realizan tres pruebas **independientes**: A (idiomas), B (conocimientos teórico-prácticos) y C (pruebas físicas). Para acceder al puesto hay que superar las tres pruebas y se sabe, por procesos realizados anteriormente, que el 10 % de los presentados superan la prueba A, la B, el 40 % y la C, el 20 %. Sabiendo que todos los candidatos realizan las tres pruebas, se pide, de forma razonada:

b.1) ¿Cuál es la probabilidad de que un candidato pase la selección? **(0.5 puntos)**

b.2) ¿Cuál es la probabilidad de que un candidato no sea seleccionado por haber fallado en una sola prueba? **(0.5 puntos)**

b.3) Sabiendo que un candidato no ha sido seleccionado por haber fallado en una sola prueba, ¿cuál es la probabilidad de que haya fallado en la prueba B? **(0.25 puntos)**

b.4) Si la velocidad punta de la prueba física de carrera de 1000 m sigue una función de la forma: $V(t) = at^3 + bt^2 + t$, con t en minutos, y sabemos que alcanza el máximo en el instante $t = 1$ alcanzando, en ese instante, una velocidad de 150 m/min, encuentra los valores de los parámetros a y b. **(1.25 puntos)**

SOLUCIONES

EJERCICIO 1 (Estadística)

$$\left.\begin{array}{l} X = \text{tiempo de atención a las llamadas (min)} \\ \sigma = 4 \text{ min},\ n = 36,\ \bar{x} = 15 \text{ min} \end{array}\right\} \Rightarrow X \to N(\mu\ ,\ 4)$$

a) Intervalo de confianza al 97 %

Nivel de confianza:

$$1-\alpha = 97\ \% = 0,97 \Rightarrow \alpha = 1-0,97 = 0,03 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,015$$

$$P\left(Z < z_{\alpha/2}\right) = 1-\frac{\alpha}{2} = 1-0,015 = 0,985 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2,17$$

Intervalo de confianza:

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(15-2,17\cdot\frac{4}{\sqrt{36}}\ ,\ 15+2,17\cdot\frac{4}{\sqrt{36}}\right) =$$
$$= (13,5533\ ,\ 16,4467)$$

b) Se debería aumentar el tamaño muestral, ya que L y $\sqrt{n}$ son inversamente proporcionales y de esta forma, se reduce la longitud del intervalo.

c) Se tiene que $\mu = 17 \notin IC_{97\ \%}$ y, por tanto, tampoco estará en el $IC_{95\ \%}$, ya que, al reducir el nivel de confianza también se reduce la longitud (amplitud) del intervalo. Como consecuencia, no se puede aceptar la afirmación.

EJERCICIO 2 (Álgebra: sistema de ecuaciones)

$$\begin{cases} x = \text{puntuación de la primera pregunta} \\ y = \text{puntuación de la segunda pregunta} \\ z = \text{puntuación de la tercera pregunta} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z = 7,2 \\ x = 1,4y \\ z = 2(x+y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z = 7,2 \\ x-1,4y = 0 \\ 2x+2y-z = 0 \end{cases}$$

Resolución por el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 7,2 \\ 1 & -1,4 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[-2F_1+F_3]{-F_1+F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 7,2 \\ 0 & -2,4 & -1 & -7,2 \\ 0 & 0 & -3 & -14,4 \end{array}\right)\begin{array}{l}[1] \\ [2] \\ [3]\end{array}$$

De [3]: $-3z = -14,4 \Rightarrow z = \dfrac{-14,4}{-3} = 4,8$

Sustituimos en [2]: $-2,4y - 4,8 = -7,2 \Rightarrow y = \dfrac{-7,2+4,8}{-2,4} = 1$

Sustituimos en [1]: $x+y+z = 7,2 \Rightarrow x = 7,2-1-4,8 = 1,4$

Conclusión:

En la primera pregunta obtuvo 1,4 puntos, en la segunda, 1 punto y en la tercera, 4,8 puntos.

Resolución por la regla de Cramer:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1,4 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 7,2$$

$$x=\frac{\det\begin{pmatrix}7,2 & 1 & 1\\ 0 & -1,4 & 0\\ 0 & 2 & -1\end{pmatrix}}{7,2}=\frac{10,08}{7,2}=1,4\ ,\ y=\frac{\det\begin{pmatrix}1 & 7,2 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 2 & 0 & -1\end{pmatrix}}{7,2}=\frac{7,2}{7,2}=1$$

$$z=\frac{\det\begin{pmatrix}1 & 1 & 7,2\\ 1 & -1,4 & 0\\ 2 & 2 & 0\end{pmatrix}}{7,2}=\frac{34,56}{7,2}=4,8$$

Conclusión:
En la primera pregunta obtuvo 1,4 puntos, en la segunda, 1 punto y en la tercera, 4,8 puntos.

EJERCICIO 3 (Análisis y álgebra)

Apartado a)

$$f(x)=\begin{cases}-x^2-3x+10 & \text{si} \quad x\le k\\ x^2-4x+9 & \text{si} \quad x>k\end{cases}$$

a.1) Continuidad en $x=k$: ¿$\exists \lim_{x\to k} f(x)=f(k)$?

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to k-} f(x)=\lim_{x\to k-}\left(-x^2-3x+10\right)=-k^2-3k+10=f(k)\\ \lim_{x\to k+} f(x)=\lim_{x\to k+}\left(x^2-4x+9\right)=k^2-4k+9\end{array}\right\}\Rightarrow -k^2-3k+10=k^2-4k+9\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2k^2-k-1=0\Rightarrow k=\begin{cases}-\dfrac{1}{2}\\ 1\end{cases}$$

Conclusión: para que $f(x)$ se continua en $x=k$, tiene que ser $k=\begin{cases}-\dfrac{1}{2}\\ 1\end{cases}$.

a.2) Extremos relativos para $k=1$:

$$f(x)=\begin{cases}-x^2-3x+10 & \text{si} \quad x\le 1\\ x^2-4x+9 & \text{si} \quad x>1\end{cases}$$

Para $x<1,\ f(x)=-x^2-3x+10$:

$$f'(x)=-2x-3$$

$$f'(x)=0\Rightarrow -2x-3=0\Rightarrow x=-\frac{3}{2}$$

$$f''(x)=-2$$

$f''\left(-\dfrac{3}{2}\right)<0\Rightarrow f(x)$ tiene en $x=-\dfrac{3}{2}$ un máximo relativo de coordenadas

$$\left(-\frac{3}{2},f\left(-\frac{3}{2}\right)\right)=\left(-\frac{3}{2},\frac{49}{4}\right)$$

Para $x>1,\ f(x)=x^2-4x+9$:

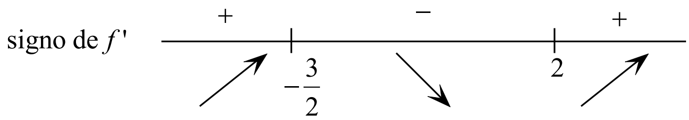
$$f'(x)=2x-4$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$$
$$f''(x) = 2$$
$f''(2) > 0 \Rightarrow f(x)$ tiene en $x = 2$ un mínimo relativo de coordenadas $(2, f(2)) = (2,5)$

a.3) Monotonía de la función para $k = 1$:
Para estudiar la monotonía (creciente/decrecimiento) de una función, hay que estudiar el signo de la derivada primera.

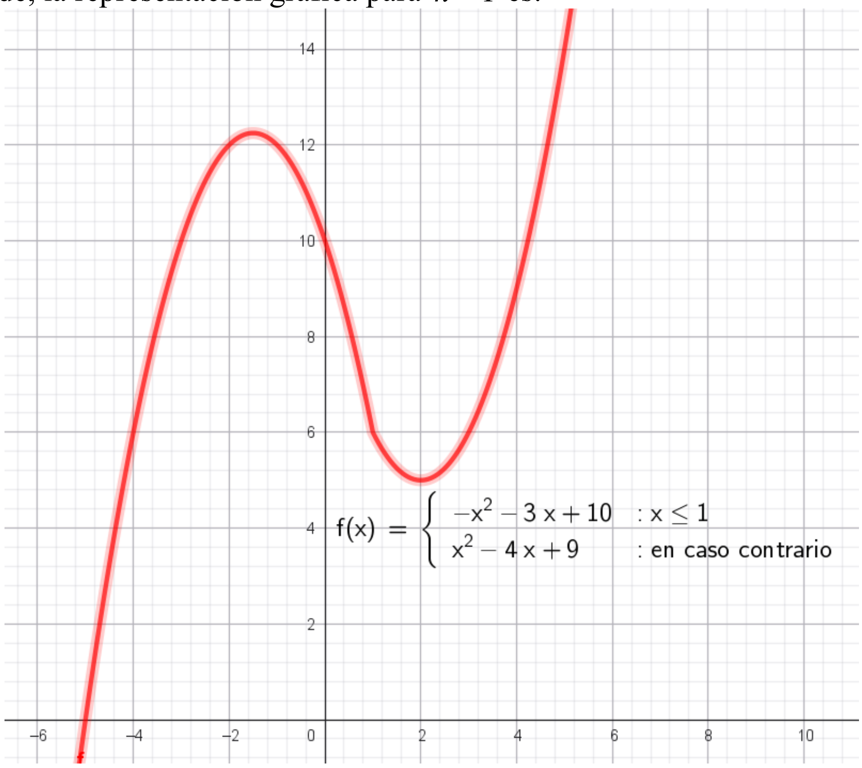
Para $x < 1$, $f'(x) = -2x - 3 \Rightarrow -2x - 3 > 0 \Rightarrow x < -\dfrac{3}{2}$

Para $x > 1$, $f'(x) = 2x - 4 \Rightarrow 2x - 4 > 0 \Rightarrow x > 2$



$$f(x) \text{ es } \begin{cases} \text{creciente en } \left(-\infty, -\dfrac{3}{2}\right) \cup (2, +\infty) \\ \text{decreciente en } \left(-\dfrac{3}{2}, 2\right) \end{cases}$$

Aunque no se pide, la representación gráfica para $k = 1$ es:



Apartado b)
b.1) Análisis

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + c$$

$f(x)$ tiene un mínimo relativo en $(2, -3) \Rightarrow$ (condición necesaria de extremos relativos) $f'(2) = 0$ y, además, como su gráfica pasa por dicho punto, $f(2) = -3$.

$f(x)$ tiene un punto de inflexión en $(1, -1) \Rightarrow$ (condición necesaria de punto de inflexión) $f''(1) = 0$
.

Planteamos y resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=3ax^2+2bx \\ f''(x)=6ax+2b \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} f'(2)=0 \Rightarrow 12a+4b=0 \\ f(1)=-1 \Rightarrow a+b+c=-1 \\ f''(1)=0 \Rightarrow 6a+2b=0 \end{cases}$$

Como $\begin{cases} 12a+4b=0 \\ 6a+2b=0 \end{cases}$ son la misma ecuación, tenemos que usar la condición de que la gráfica de $f(x)$ pasa por el punto $(2,-3)$: $f(2)=-3 \Rightarrow 8a+4b+c=-3$

Resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} 6a+2b=0 \xrightarrow{:2} 3a+b=0 \Rightarrow b=-3a \\ a+b+c=-1 \\ 8a+4b+c=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-3a+c=-1 \xrightarrow{\cdot(-1)} \\ 8a+4b+c=-3 \end{cases} \begin{cases} -a+3a-c=1 \\ \underline{8a-12a+c=-3} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a-c=1 \\ \underline{-4a+c=-3} \end{cases}$$

$-2a=-2 \Rightarrow a=1 \Rightarrow b=-3 \Rightarrow c=1$

Conclusión: $(a,b,c)=(1,-3,1) \Rightarrow f(x)=x^3-3x^2+1$

b.2) Álgebra (Ecuación matricial)

Despejamos X:

$$ABX=CX+I \Rightarrow ABX-CX=I \Rightarrow (AB-C)X=I \Rightarrow (AB-C)^{-1}(AB-C)X=(AB-C)^{-1}I \Rightarrow$$
$$\Rightarrow X=(AB-C)^{-1}$$

Calculamos AB:

$$AB=\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Calculamos

$$AB-C=\begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos $(AB-C)^{-1}$:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -2 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1+F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2:2]{F_1:(-2)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \xrightarrow{F_2+F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

Calculamos X:

$$X=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 4 (Programación lineal, probabilidad y análisis)

Apartado a) Programación lineal

a.1) Nombramos las variables y definimos la función objetivo:

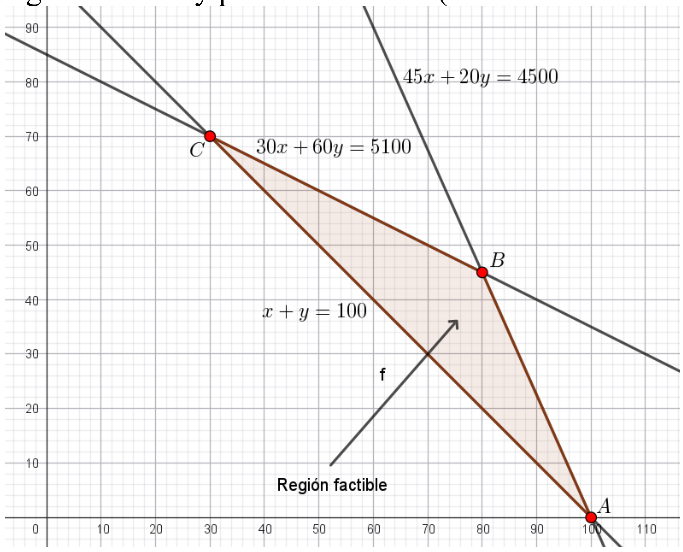
Variables: $\begin{cases} x = \text{número de paquetes de tipo A} \\ y = \text{número de paquetes de tipo B} \end{cases}$

Función objetivo: $F(x,y) = 20x + 17y$

Restricciones:

$$\begin{cases} 30x + 60y \le 5100 \\ 45x + 20y \le 4500 \\ x + y \ge 100 \end{cases}$$

Región factible y puntos extremos (vértices:



Región factible:

$30x + 60y = 5100$

x	y
0	85
170	0

$45x + 20y = 4500$

x	y
0	100
225	0

$x + y = 100$

x	y
0	100
100	0

Vértices:

$A(100,0)$,

$$B\begin{cases} 45x + 20y = 4500 \\ 30x + 60y = 5100 \end{cases} \Rightarrow B(80,45)$$

$$C\begin{cases} 30x + 60y = 5100 \\ x + y = 100 \end{cases} \Rightarrow C(30,70)$$

Evaluamos la función objetivo en los vértices de la región factible:

$$F_A(100,0) = 20\cdot 100 + 17\cdot 0 = 2000$$

$$F_B(80,45) = 20\cdot 80 + 17\cdot 45 = 2365$$

$$F_C(30,70) = 20\cdot 30 + 17\cdot 70 = 1790$$

a.2) Para que el beneficio sea máximo tiene que fabricar 80 paquetes de tipo A y 45 de tipo B, en cuyo caso, el beneficio máximo es de 2365 €.

Apartado b) Probabilidad y Análisis

b.1) Nombramos los sucesos y construimos el diagrama de árbol

$A =$ prueba A (idiomas) $\Rightarrow P(A) = 0{,}10$

$B =$ prueba B (conocimientos teórico-prácticos) $\Rightarrow P(B) = 0{,}40$

$C =$ prueba C (pruebas físicas) $\Rightarrow P(C) = 0{,}20$

Como las pruebas son independientes, se tiene que:

$$P(\text{Superar la selección}) = P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C) = 0{,}10 \cdot 0{,}40 \cdot 0{,}20 = \frac{1}{125} = 0{,}008$$

b.2)

$$P(\text{No superar solo una de las pruebas}) = P\left[\left(\overline{A} \cap B \cap C\right) \cup \left(A \cap \overline{B} \cap C\right) \cup \left(A \cap B \cap \overline{C}\right)\right] =$$

$$= P\left(\overline{A} \cap B \cap C\right) + P\left(A \cap \overline{B} \cap C\right) + P\left(A \cap B \cap \overline{C}\right) =$$

$$= (1 - 0{,}10) \cdot 0{,}40 \cdot 0{,}20 + 0{,}10 \cdot (1 - 0{,}40) \cdot 0{,}20 + 0{,}10 \cdot 0{,}40 \cdot (1 - 0{,}20) = \frac{29}{250} = 0{,}116$$

b.3) $$P\left(\text{Fallar solo la B} / \text{Falla solo una prueba}\right) = \frac{P\left(A \cap \overline{B} \cap C\right)}{P(\text{Falla solo una prueba})} = \frac{0{,}012}{0{,}116} = 0{,}103$$

b.4) $V(t) = at^3 + bt^2 + t$ (velocidad punta de una prueba física)

$t =$ tiempo (min)

Como $V(t)$ tiene un máximo en $t = 1$, por la condición necesaria de extremo relativo, $V'(1) = 0$, y además, $V(1) = 150$.

Planteamos y resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} V'(1) = 0 \Rightarrow 3a + 2b + 1 = 0 \\ V(1) = 150 \Rightarrow a + b + 1 = 150 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a + 2b = -1 \\ a + b = 149 \xrightarrow{\cdot(-3)} \end{cases} \begin{cases} 3a + 2b = -1 \\ \underline{-3a - 3b = -447} \end{cases}$$

$$-b = -448 \Rightarrow b = 448 \Rightarrow a = -299$$

Conclusión: $(a, b) = (-299, 448) \Rightarrow V(t) = -299t^3 + 448t^2 + t$