**Universidad de Castilla-La Mancha**

**Prueba de acceso a la Universidad**

**Curso 2024/2025**

**Materia: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**

INSTRUCCIONES: El estudiante deberá resolver los cuatro ejercicios propuestos. En **los ejercicios 3 y 4** deberá contestar solamente a **UNO** de los dos apartados propuestos. Si resuelve más, se corregirá solo el primero de los dos apartados resueltos. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Solo están permitidas **las calculadoras de tipo 1 y 2**. **Cada ejercicio completo puntuará 2.5 puntos**.
Duración de la prueba: 90 minutos.

**Ejercicio 1.-** Una empresa envasa zumos en botellas de 1 litro. La cantidad de zumo que la máquina embotelladora inyecta en cada botella sigue una distribución normal con una desviación típica $\sigma = 0.05$ litros. Se toma una muestra aleatoria de 16 botellas y se observa que el contenido medio es de 0.97 litros. Con un nivel de confianza del 97%,

a) Calcula el intervalo de confianza para el contenido medio poblacional de una botella. **(1 punto)**

b) Explica, justificando la respuesta, cómo se podría obtener un intervalo de confianza con menor amplitud sin modificar el nivel de confianza. **(0.75 puntos)**

c) Dado el intervalo del apartado a), ¿se puede aceptar que el contenido medio poblacional es de 1 litro con un nivel de confianza del 95%? Justificar la respuesta. **(0.75 puntos)**

| z | 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.04 | 0.05 | 0.06 | 0.07 | 0.08 | 0.09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2.0 | 0.9772 | 0.9778 | 0.9783 | 0.9788 | 0.9793 | 0.9798 | 0.9803 | 0.9808 | 0.9812 | 0.9817 |
| 2.1 | 0.9821 | 0.9826 | 0.9830 | 0.9834 | 0.9838 | 0.9842 | 0.9846 | 0.9850 | 0.9854 | 0.9857 |

**Ejercicio 2.-** En el Parador de Turismo de Almagro se alojaron ayer 25 huéspedes que hicieron las reservas con distintas compañías, procedentes de Italia, Portugal y Japón. El gasto total en el Parador fue de 3610 €, correspondiendo 140 € a cada huésped italiano, 130 € a cada huésped portugués y 160 € a cada huésped japonés. El registro del Parador muestra que el número de portugueses es la cuarta parte de la suma del número de huéspedes de los otros dos países.

a) Plantea el sistema de ecuaciones para calcular cuántos huéspedes hay de cada país. **(1.5 puntos)**

b) Calcula número de huéspedes de cada uno de los países. **(1 punto)**

**Ejercicio 3.-** Elige y resuelve **sólo uno** de los dos apartados siguientes:

**Apartado a)** Se considera la función $f(x) = \begin{cases} 2x^2+4 & si\ x \le k \\ -2x^2+8x & si\ x > k \end{cases}$

a.1) ¿Para qué valor de $k$ la función $f(x)$ es continua en $x = k$ ? **(1 punto)**

a.2) Si $k = 1$, calcula los máximos y mínimos relativos de la función $f(x)$. **(0.75 puntos)**

a.3) En ese mismo supuesto, determina en qué intervalos la función es cóncava y en cuáles es convexa. **(0.75 puntos)**

**Apartado b)** Dada la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - 3$, se sabe que tiene un mínimo relativo en el punto $(-1, 2)$ y un punto de inflexión en $(1, -14)$.

b.1) Encuentra el valor de los parámetros $a, b$ y $c$ . **(1.5 puntos)**

b.2) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\ y\ C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, calcula la matriz $X$ en la ecuación matricial $C \cdot X = A \cdot B + X$. **(1 punto)**

**Ejercicio 4.-** Elige y resuelve **sólo uno** de los dos apartados siguientes:

**Apartado a)** En un examen de matemáticas se propone el siguiente problema:

"Indica el punto donde la función $F(x, y) = 6x + 3y - 2$, alcanza el mínimo en la región determinada por las siguientes restricciones: $2x + y \ge 6$ ; $2x + 5y \le 30$ ; $2x - y \le 6$"

Laura responde que el mínimo de la función se alcanza en el punto $(1, 2)$ y Jesús, por el contrario, que lo hace en el punto $(3, 0)$.

a.1) ¿Es exacta la respuesta de Laura? **Razona tu respuesta. (1.25 puntos)**

a.2) ¿Es cierto que el mínimo se alcanza en el punto $(3, 0)$? **Razona tu respuesta. (0.75 puntos)**

a.3) ¿Cuánto vale dicho mínimo? **(0.5 puntos)**

**Apartado b)** La compañía de seguros SEGURVIDA utiliza tres bufetes de abogados para resolver sus casos legales en los tribunales. El bufete A recibe el 30 % de los casos legales y gana en los tribunales el 60 % de los casos presentados. El bufete B recibe el 50 % de los casos legales y gana el 80 % de los casos presentados y el bufete C recibe el resto de los casos y gana el 70 % de los presentados. Se elige al azar uno de los casos que ha llegado a los tribunales y ya ha sido resuelto. Se pide, de forma razonada:

b.1) ¿Cuál es la probabilidad de que la compañía haya ganado el caso? **(0.75 puntos)**

b.2) Si el caso elegido se ha perdido, calcula la probabilidad de que haya sido defendido por el bufete A. **(0.5 puntos)**

b.3) Si el precio por acción de la compañía de seguros sigue una función de la forma $A(t) = at^3 - 12t^2 + bt$, donde $t =$ tiempo en horas transcurridas desde el inicio, alcanza un máximo en la tercera hora $t = 3$, alcanzando un valor de 54 € la acción en ese instante, encuentra el valor de los parámetros $a$ y $b$. **(1.25 puntos)**

# SOLUCIONES

## EJERCICIO 1 (Estadística)

$$\left.\begin{array}{l} X = \text{cantidad de agua en cada botella (L)} \\ \sigma = 0,05 \text{ litros, } n = 16,\ \bar{x} = 0,97 \text{ litros} \end{array}\right\} \Rightarrow X \to N(\mu \ ,\ 0,05)$$

**a)** Intervalo de confianza al 97 %

Nivel de confianza:

$$1-\alpha = 97\ \% = 0,97 \Rightarrow \alpha = 1-0,97 = 0,03 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,015$$

$$P\left(Z < z_{\alpha/2}\right) = 1-\frac{\alpha}{2} = 1-0,015 = 0,985 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2,17$$

Intervalo de confianza:

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(0,97-2,17\cdot\frac{0,05}{\sqrt{16}}\ ,\ 0,97+2,17\cdot\frac{0,05}{\sqrt{16}}\right) =$$

$$= (0,942875\ ,\ 0,997125)$$

**b)** Se debería aumentar el tamaño muestral, ya que $L$ y $\sqrt{n}$ son inversamente proporcionales.

**c)** Se tiene que $\mu = 1 \notin IC_{97\ \%}$ y, por tanto, tampoco estará en el $IC_{95\ \%}$, ya que, al reducir el nivel de confianza también se reduce la longitud (amplitud) del intervalo. Como consecuencia, no se puede aceptar la afirmación.

## EJERCICIO 2 (Álgebra: sistema de ecuaciones)

$$\begin{cases} x = \text{número de huéspedes de Italia} \\ y = \text{número de huéspedes de Portugal} \\ z = \text{número de huéspedes de Japón} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z = 25 \\ 140x+130y+160z = 3610 \\ y = \dfrac{1}{4}(x+z) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z = 25 \\ 14x+13y+16z = 361 \\ x-4y+z = 0 \end{cases}$$

*Resolución por el método de Gauss:*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 25 \\ 14 & 13 & 16 & 361 \\ 1 & -4 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[-F_1+F_3]{-14F_1+F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 25 \\ 0 & -1 & 2 & 11 \\ 0 & -5 & 0 & -25 \end{array}\right)\begin{array}{l}[1]\\ [2]\\ [3]\end{array}$$

De [3]: $-5y = -25 \Rightarrow y = \dfrac{-25}{-5} = 5$

Sustituimos en [2]: $-y+2z = 11 \Rightarrow z = \dfrac{11+5}{2} = 8$

Sustituimos en [1]: $x+y+z = 25 \Rightarrow x = 25-8-5 = 12$

*Conclusión:*

En el Parador hubo 12 huéspedes de Italia, 8 de Italia y 5 de Japón.

*Resolución por la regla de Cramer:*

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 14 & 13 & 16 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix} = 10$$

$$x=\frac{\det\begin{pmatrix}25&1&1\\361&13&16\\0&-4&1\end{pmatrix}}{10}=\frac{120}{10}=12,\quad y=\frac{\det\begin{pmatrix}1&25&1\\14&361&16\\1&0&1\end{pmatrix}}{10}=\frac{50}{10}=5,\quad z=\frac{\det\begin{pmatrix}1&1&25\\14&13&361\\1&-4&0\end{pmatrix}}{10}=\frac{80}{10}=8$$

*Conclusión:*

En el Parador hubo 12 huéspedes de Italia, 8 de Italia y 5 de Japón.

## EJERCICIO 3 (Análisis)

**Apartado a)**

$$f(x)=\begin{cases}2x^2+4 & \text{si} \quad x\le k\\ -2x^2+8x & \text{si} \quad x>k\end{cases}$$

**a.1)** Continuidad en $x=k$: ¿$\exists \lim\limits_{x\to k} f(x)=f(k)$?

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to k-} f(x)=\lim\limits_{x\to k-}\left(2x^2+4\right)=2k^2+4=f(k)\\ \lim\limits_{x\to k+} f(x)=\lim\limits_{x\to k+}\left(-2x^2+8x\right)=-2k^2+8k\end{array}\right\}\Rightarrow 2k^2+4=-2k^2+8k\Rightarrow 4k^2-8k+4=0\Rightarrow k=1$$

*Conclusión*: para que $f(x)$ se continua en $x=k$, tiene que ser $k=1$.

**a.2)** Extremos relativos para $k=1$:

$$f(x)=\begin{cases}2x^2+4 & \text{si} \quad x\le 1\\ -2x^2+8x & \text{si} \quad x>1\end{cases}$$

Para $x<1,\ f(x)=2x^2+4$:

$f'(x)=4x$

$f'(x)=0\Rightarrow 4x=0\Rightarrow x=0$

$f''(x)=4$

$f''(0)>0\Rightarrow f(x)$ tiene en $x=0$ un mínimo relativo de coordenadas $\left(0,f(0)\right)=(0,4)$

Para $x>1,\ f(x)=-2x^2+8x$:

$f'(x)=-4x+8$

$f'(x)=0\Rightarrow -4x+8=0\Rightarrow x=2$

$f''(x)=-4$

$f''(2)<0\Rightarrow f(x)$ tiene en $x=2$ un máximo relativo de coordenadas $\left(2,f(2)\right)=(2,8)$

**a.3)** Curvatura de la función:

Para estudiar la curvatura (convexidad/concavidad) de una función, hay que estudiar el signo de la derivada segunda.

Para $x<1,\ f(x)=2x^2+4\Rightarrow f''(x)=4\neq 0$

Para $x>1,\ f(x)=-2x^2+8x\Rightarrow f''(x)=-4\neq 0$

$$\text{signo de } f'' \quad \begin{array}{ccc} + & & - \\ \hline \cup & 1 & \cap \end{array} \qquad f(x) \text{ es } \begin{cases}\text{convexa } (\cup) \text{ en } (-\infty,1)\\ \text{cóncava } (\cup) \text{ en } (1,+\infty)\end{cases}$$

**Apartado b)**

**b.1)** Análisis

$$f(x)=ax^3+bx^2+cx-3$$

$f(x)$ tiene un mínimo relativo en $(-1,2)\Rightarrow$ (condición necesaria de extremos relativos) $f'(-1)=0$ y, además, como su gráfica pasa por dicho punto, $f(-1)=2$.

$f(x)$ tiene un punto de inflexión en $(1,-14)\Rightarrow$ (condición necesaria de punto de inflexión) $f''(1)=0$.

Resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=3ax^2+2bx+c \\ f''(x)=6ax+2b \end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} f'(-1)=0\Rightarrow 3a-2b+c=0 \\ f(-1)=2\Rightarrow -a+b-c-3=2 \\ f''(1)=0\Rightarrow 6a+2b=0 \end{array}\right.$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 5 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right)\xrightarrow[6F_1+F_3]{3F_1+F_2}\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 15 \\ 0 & 8 & -6 & 30 \end{array}\right)\xrightarrow{-8F_2+F_3}\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 15 \\ 0 & 0 & 10 & -90 \end{array}\right)\begin{array}{l}[1]\\ [2]\\ [3]\end{array}$$

De [3]: $10z=-90\Rightarrow z=\dfrac{-90}{10}=-9$

Sustituimos en [2]: $y-2\cdot(-9)=15\Rightarrow y=15-18=-3$

Sustituimos en [1]: $-a-3+9=5\Rightarrow a=1$

*Conclusión*: $(a,b,c)=(1,-3,-9)\Rightarrow f(x)=x^3-3x^2-9x-3$

**b.2)** Álgebra (Ecuación matricial)

Despejamos $X$:

$$CX=AB+X\Rightarrow CX-X=AB\Rightarrow CX-IX=AB\Rightarrow(C-I)X=AB\Rightarrow$$
$$\Rightarrow(C-I)^{-1}(C-I)X=(C-I)^{-1}AB\Rightarrow X=(C-I)^{-1}AB$$

Calculamos $C-I$:

$$C-I=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 0 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Calculamos $(C-I)^{-1}$:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)\xrightarrow{-2F_2+F_1}\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)\xrightarrow{F_1:2}\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Calculamos $X$:

$$X=(C-I)^{-1}AB=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{3}{2} & 1 & 1\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$$

## EJERCICIO 4 (Programación lineal, probabilidad y análisis)

**Apartado a) Programación lineal**

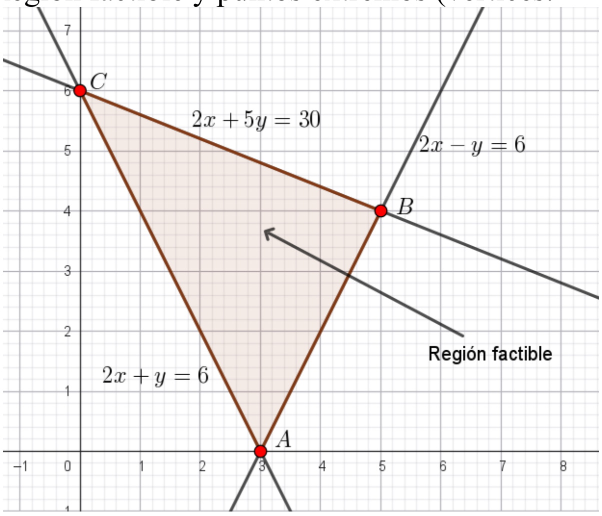
Nombramos las variables y definimos la función objetivo:
Variables: $x, y$

Función objetivo: $F(x,y) = 6x + 3y - 2$

Restricciones:

$$\begin{cases} 2x + y \geq 6 \\ 2x + 5y \leq 30 \\ 2x - y \leq 6 \end{cases}$$

Región factible y puntos extremos (vértices:




Región factible:

$2x + y = 6$

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 0 | 6 |
| 3 | 0 |

$2x + 5y = 30$

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 0 | 6 |
| 5 | 4 |

$2x - y = 6$

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 3 | 0 |
| 5 | 4 |

Vértices:

$A(3,0)$, $B(5,4)$ y $C(0,6)$

Evaluamos la función objetivo en los vértices de la región factible:

$$F_A(3,0) = 6 \cdot 3 + 3 \cdot 0 - 2 = 16$$

$$F_B(5,4) = 6 \cdot 5 + 3 \cdot 4 - 2 = 40$$

$$F_C(0,6) = 6 \cdot 0 + 3 \cdot 6 - 2 = 16$$

**a.1)** La respuesta de Laura es falsa, porque el mínimo lo tiene en todos los puntos del segmento que une los puntos A y C.

**a.2)** Es falso, ya que como hemos dicho antes, el mínimo se alcanza en todos los puntos del segmento que une los puntos A y C (tiene infinitos mínimos).

**a.3)** El valor de dicho mínimo es 16.

**Apartado b) Probabilidad y Análisis**

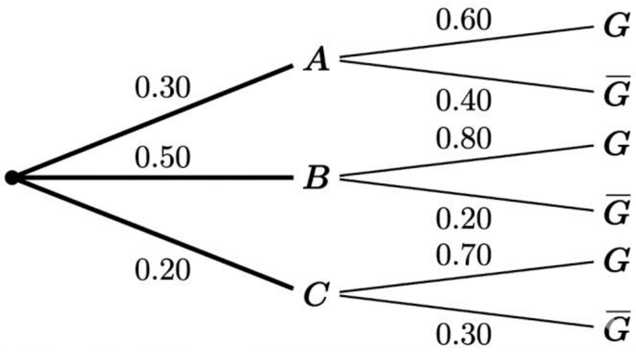
**b.1)** Nombramos los sucesos y construimos el diagrama de árbol

$A =$ casos que recibe el bufete A $\Rightarrow P(A) = 0,30$

$B =$ casos que recibe el bufete B $\Rightarrow P(B) = 0,50$

$C =$ casos que recibe el bufete C $\Rightarrow P(C) = 0,20$

$G =$ la compañía gana el caso




**b.2)** Usamos el teorema de Bayes

$$P\left(A/\overline{G}\right)=\frac{P\left(A\cap\overline{G}\right)}{P\left(\overline{G}\right)}=\frac{P(A)P\left(\overline{G}/A\right)}{1-P(G)}=\frac{0,30\cdot 0,40}{1-0,72}=\frac{3}{7}\simeq 0,4286$$

**b.3)** $A(t)=at^3-12t^2+bt\begin{cases}A(t)=\text{precio por acción de la compañía de seguros (€)}\\ t=\text{tiempo transcurrido desde el inicio (h)}\end{cases}$

Como $A(t)$ tiene un máximo en $t=3$, por la condición necesaria de extremo relativo, $A'(3)=0$. Así:

$$A'(t)=3at^2-24t+b\begin{cases}A'(3)=0\Rightarrow 27a-72+b=0\\ A(3)=54\ (€)\Rightarrow 27a-108+3b=54\end{cases}$$

Resolvemos el sistema:

$$\begin{cases}27a+b=72\\ 27a+3b=153\end{cases}\xrightarrow{\cdot(-1)}\begin{cases}-27a-b=-72\\ \underline{27a+3b=162}\end{cases}$$

$$2b=90\Rightarrow b=\frac{90}{2}=45\Rightarrow a=\frac{162-3\cdot 45}{27}=1$$

*Conclusión:* $(a,b)=(1,45)\Rightarrow A(t)=t^3-12t^2+45t$