Universidad Castilla-La Mancha

Prueba de acceso a la Universidad

Curso 2025/2026

Materia: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

INSTRUCCIONES: El estudiante deberá resolver los cuatro ejercicios propuestos. En **los ejercicios 3 y 4** deberá contestar solamente a **UNO** de los dos apartados propuestos. Si resuelve más, se corregirá solo el primero de los dos apartados resueltos. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Solo están permitidas **las calculadoras de tipo 1 y 2**. **Cada ejercicio completo puntuará 2.5 puntos**.
Duración de la prueba: 90 minutos.

Ejercicio 1.- En una Comunidad Autónoma, el 40% de los clubes deportivos son de fútbol, el 15% de baloncesto y el 45% restante de otros deportes. En estos grupos, los clubes femeninos suponen el 20% en el caso del fútbol, el 45% en el de baloncesto y el 50% en el de otros deportes.

a) Si se elige un club deportivo al azar, calcula la probabilidad de que sea femenino. **(1 punto)**

b) Si el club elegido es femenino, calcula la probabilidad de que sea de baloncesto. **(1 punto)**

c) Si se seleccionan al azar dos clubes deportivos, calcule la probabilidad de que uno sea de fútbol y uno de otros deportes. **(0.5 puntos)**

Ejercicio 2.- Una empresa invirtió un total de 20000 euros entre tres fondos de inversión: A, B y C. El beneficio que obtuvo por cada euro invertido en el fondo A fue de 0,05 euros, el beneficio que obtuvo por cada euro invertido en el fondo B fue de 0,1 euros y el beneficio que obtuvo por cada euro invertido en el fondo C fue de 0,02 euros. Con las inversiones realizadas en los fondos, la empresa obtuvo un beneficio total de 994 euros. Además, la inversión en el fondo A fue igual al triple de la suma de las inversiones en los fondos B y C.

a) Plantea un sistema de ecuaciones lineales para determinar cuánto dinero invirtió la empresa en cada fondo. **(1,5 puntos)**

b) Encuentra cuánto dinero se ha invertido en cada uno de los fondos de inversión. **(1 punto)**

Ejercicio 3.- Elige y resuelve **sólo uno** de los dos apartados siguientes:

Apartado a) La profundidad de la capa de arena en una playa se verá afectada por la construcción de un dique. La profundidad (*P*) en función del tiempo, en años desde el inicio de la construcción (*t*) vendrá dada por la función $P(t) = \begin{cases} 2 + t^2 & si\ 0 \leq t \leq 1 \\ \frac{8t^2 - t - 1}{2t^2} & si\ t > 1 \end{cases}$. Si la profundidad llegara a superar los 4 metros, se debería elevar la altura del paseo marítimo.

a.1) ¿Es la profundidad una función continua del tiempo? **(1 punto)**

a.2) ¿Disminuirá alguna vez la profundidad? **(1 punto)**

a.3) Por mucho tiempo que pase ¿será necesario elevar la altura del paseo por causa de la profundidad de la capa de arena? **(0.5 puntos)**

Apartado b) Un profesor ha comprobado que el grado de atención, puntuado de 0 a 100, que le prestan sus alumnos durante los 40 minutos de duración de su clase sigue la siguiente función: $F(t) = at(b - t)$ con $0 \leq t \leq 40$. Sabiendo que a los 20 minutos de comenzar la clase le prestan la máxima atención, es decir, el grado de atención es 100, se pide:

b.1) Determina, justificando la respuesta, a y b. **(1 punto)**

b.2) Halla la atención a los cinco minutos. **(0.5 puntos)**

b.3) Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 8 & -3 \end{pmatrix}$, halla la matriz X que cumple que $AXA^{-1} = B$. **(1 punto)**

Ejercicio 4.- Elige y resuelve **sólo uno** de los dos apartados siguientes:

Apartado a) En un coto de caza de Ciudad Real hay conejos y perdices. Por indicación de la Consejería de Agricultura de la JCCM, se han determinado las siguientes restricciones: el número máximo de piezas cazadas es de 400, se permite la captura de un número de conejos superior o igual al de perdices y el número máximo de conejos que se pueden cazar es de 240. Si al dueño del coto le proporciona un beneficio de 35 € por conejo y 43 € por perdiz,

a.1) Expresa la función objetivo, escribe mediante inecuaciones las restricciones del problema y representa gráficamente el recinto definido. **(1.5 puntos)**

a.2) Determina cuántos conejos y perdices se deben cazar para que el beneficio sea máximo y encuentra dicho beneficio máximo. **(1 punto)**

Apartado b) Una operadora de telefonía móvil estima que la duración, en segundos, de las llamadas sigue una distribución normal con una desviación típica de $\sigma = 60$ segundos. Se seleccionan al azar 36 llamadas telefónicas y se observa que su duración media es de 240 segundos. Con un nivel de confianza del 95%,

b.1) Obtén un intervalo de confianza para la duración media poblacional de todas las llamadas de esa operadora. **(1 punto)**

b.2) Explica, justificando la respuesta, cuál sería la amplitud del intervalo de confianza anterior si se aumenta la muestra a 100 llamadas. **(0.75 puntos)**

b.3) Si se desea que una duración media de 230 segundos no esté contenida en el intervalo del apartado b.1), justifique si se debe aumentar o disminuir el nivel de confianza. **(0.75 puntos)**

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

JUNIO 2026

Cipri

① Nombramos los sucesos:

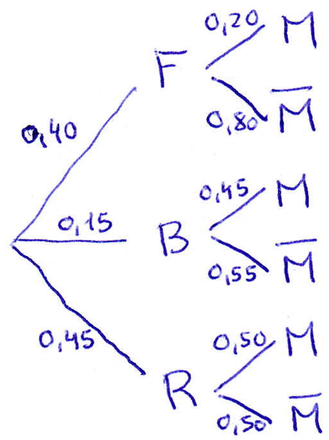
F = club deportivo de fútbol

B = " " de baloncesto

R = " " de otros deportes

M = " " femenino

y construimos el árbol de probabilidades:



a) Aplicamos el teorema de la probabilidad total:

$$\boxed{P(M)} = P(F)P\left(M/F\right) + P(B)P\left(M/B\right) +$$

$$+ P(R)P\left(M/R\right) =$$

$$= 0{,}20 \cdot 0{,}40 + 0{,}45 \cdot 0{,}15 + 0{,}50 \cdot 0{,}45 = \boxed{0{,}3725}$$

b) Aplicamos el teorema de Bayes:

$$\boxed{P\left(B/M\right)} = \frac{P(B \cap M)}{P(M)} = \frac{P(B)P\left(M/B\right)}{P(M)} = \frac{0{,}15 \cdot 0{,}45}{0{,}3725} = \boxed{0{,}1812}$$

c) P(uno sea de fútbol y otro sea de otros deportes) =

$$= P[(F \cap R) \cup (R \cap F)] = P(F) \cdot P(R) + P(R) \cdot P(F) =$$

$$= 2 \cdot 0{,}40 \cdot 0{,}45 = \boxed{0{,}36}$$

② $\begin{cases} x = \text{cantidad invertida en el fondo A} \\ y = \text{" " " " " B} \\ z = \text{" " " " " C} \end{cases}$ $\begin{cases} x + y + z = 20000 \\ 0{,}05x + 0{,}10y + 0{,}02z = 994 \\ x = 3(y+z) \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 20000 \\ 5x + 10y + 2z = 99400 \\ x - 3y - 3z = 0 \end{cases}$$

Lo resolvemos por Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 20\,000 \\ 5 & 10 & 2 & 99\,400 \\ 1 & -3 & -3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[-F_1+F_3]{-5F_1+F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 20\,000 \\ 0 & 5 & -3 & -600 \\ 0 & -4 & -4 & -20\,000 \end{array}\right) \xrightarrow{4F_2+5F_3}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 20\,000 \\ 0 & 5 & -3 & -600 \\ 0 & 0 & -32 & -102\,400 \end{array}\right) \begin{array}{c} [1] \\ [2] \\ [3] \end{array}$$

De [3]: $z = \dfrac{-102\,400}{-32} = 3200$

Sustituimos en [2]: $y = \dfrac{-600+3\cdot 3200}{5} = 1800$

Sustituimos en [1]: $x = 20000 - 1800 - 3200 = 15000$

Solución: la empresa ha invertido 15000 € en el fondo A, 1800 € en el fondo B y 3200 € en el fondo C

Lo resolvemos ahora por la regla de Cramer:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 10 & 2 \\ 1 & -3 & -3 \end{pmatrix} = -32$$

$$x = \frac{\det\begin{pmatrix} 20000 & 1 & 1 \\ 99400 & 10 & 2 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix}}{-32} = \frac{-480000}{-32} = 15000$$

$$y = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & 20000 & 1 \\ 5 & 99400 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}}{-32} = \frac{-57600}{-32} = 1800$$

$$z = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 20\,000 \\ 5 & 10 & 99\,400 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}}{-32} = \frac{-102\,400}{-32} = 3200$$

Solución: la empresa ha invertido 15000 € en el fondo A, 1800 € en el fondo B y 3200 € en el fondo C.

③ Apartado a)

$$P(t) = \begin{cases} 2+t^2 & 0 \le t \le 1 \\ \dfrac{8t^2-t-1}{2t^2} & t > 1 \end{cases}$$

a.1) Continuidad

Cada una de las funciones componentes es continua en su dominio por ser una función polinómica y una función racional bien definida (ya que $t=0$ no está en el dominio).

Continuidad en $t=1$: ¿ $\exists \lim_{t\to 1} P(t) = P(1)$?

$$\left.\begin{aligned} \lim_{t\to 1^-} P(t) &= \lim_{t\to 1^-} (2+t^2) = 3 = P(1) \\ \lim_{t\to 1^+} P(t) &= \lim_{t\to 1^+} \frac{8t^2-t-1}{2t^2} = \frac{6}{2} = 3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow P(t) \text{ es continua en } t=0$$

Conclusión: la profundidad es una función continua del tiempo

a.2) ¿Disminuirá alguna vez la profundidad?

$0<t<1$, $P'(t) = 2t > 0 \quad \forall t \in (0,1)$

$t>1$, $P'(t) = \dfrac{(16t-1)\cdot 2t^2 - (8t^2-t-1)\cdot 4t}{(2t^2)^2} = \dfrac{t+2}{2t^3} > 0 \quad \forall t>1$

Conclusión: la función es siempre creciente y, por tanto, la profundidad nunca disminuirá

a.3) ¿Será necesario elevar el paseo marítimo?

$$\lim_{t\to+\infty} P(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{8t^2-t-1}{2t^2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{t\to+\infty} \frac{\frac{8t^2}{t^2} - \frac{t}{t^2} - \frac{1}{t^2}}{\frac{2t^2}{t^2}} =$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \frac{8 - \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2}}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

Conclusión: la función es estrictamente creciente y tiene una A.H. en $t=4$, luego la profundidad se acercará a 4 m pero nunca los superará, por lo que no es necesario elevar la altura del paseo

Apartado b)

$$F(t) = at(b-t) = abt - at^2 \quad (\text{función de atención}),\ 0 \le t \le 40$$

b.1) Calcular a y b

$$F \text{ tiene un máx. } (20,100) \Rightarrow \begin{cases} F(20) = 100 \\ F'(20) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$F'(t) = ab - 2at$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} 20ab - 400a &= 100 \\ ab - 40a &= 0 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\cdot(-20)}$$

$$\begin{aligned} 20\cancel{ab} - 400a &= 100 \\ -2\cancel{0}ab + 800a &= 0 \\ \hline 400a &= 100 \end{aligned} \Rightarrow a = \frac{100}{400} = \frac{1}{4}$$

$$\text{Como } ab - 40a = 0 \Rightarrow b = \frac{+40 \cdot \frac{1}{4}}{\frac{1}{4}} = 40$$

$$\boxed{\text{Conclusión: } (a,b) = \left(\tfrac{1}{4}, 40\right) \text{ para que } F(t) \text{ tenga un máx. en } (20,100)}$$

b.2) Atención a los 5 min.

$$F(5) = \frac{1}{4} \cdot 40 \cdot 5 - \frac{1}{4} 5^2 = 43{,}75$$

$$\boxed{\text{Conclusión: la atención a los 5 min. es de 43,75 puntos}}$$

b.3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 8 & -3 \end{pmatrix}$

- Resolvemos $AXA^{-1} = B$

$$A^{-1}AXA^{-1} = A^{-1}B \Rightarrow XA^{-1} = A^{-1}B \Rightarrow XA^{-1}A = A^{-1}BA$$

$$\Rightarrow \boxed{X = A^{-1}BA}$$

- Calculamos A^{-1} por Gauss-Jordan

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-F_2+F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Calculamos X

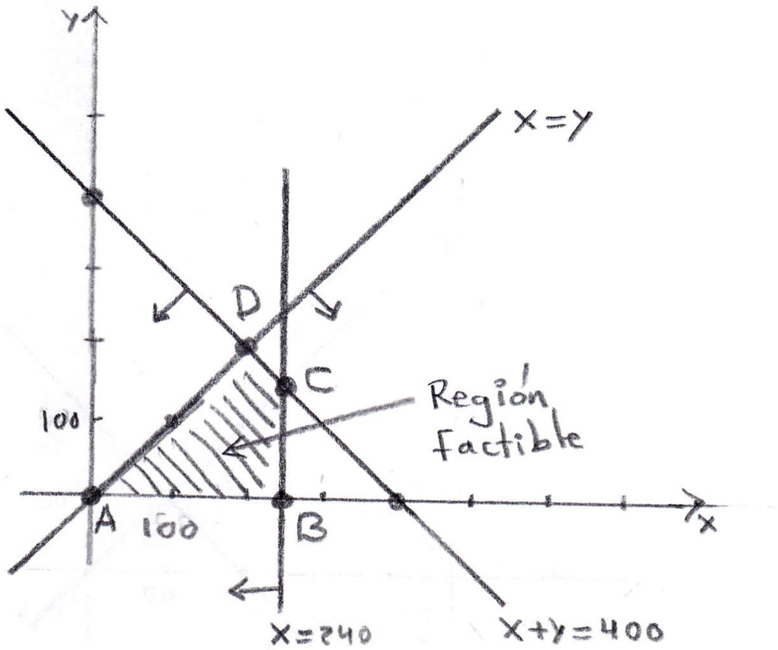
$$\boxed{X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 8 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 8 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}}$$

4) Apartado a)

$$\begin{cases} x = \text{número de conejos} \\ y = \text{número de perdices} \end{cases}$$

Restricciones: $\begin{cases} x + y \leq 400 \\ x \geq y \\ x \leq 240 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$

Función objetivo: $F(x,y) = 35x + 43y$



$x + y \leq 400$

$x + y = 400$

x	y
0	400
400	0

(0,0) verifica la inecuación

$x \geq y$

$x = y$

x	y
100	100
0	0

(100,50) verifica la inecuación

$x \leq 240$

$x = 240$

(0,0) verifica la inecuación

Vértices: $A(0,0)$, $B(240,0)$

$$C \begin{cases} x + y = 400 \\ x = 240 \end{cases} \Rightarrow C(240,160)$$

$$D \begin{cases} x = y \\ x + y = 400 \end{cases} \Rightarrow D(200,200)$$

Evaluamos los vértices en la función objetivo

$F_A(0,0) = 35 \cdot 0 + 43 \cdot 0 = 0$

$F_B(240,0) = 35 \cdot 240 + 43 \cdot 0 = 8400$

$F_C(240,160) = 35 \cdot 240 + 43 \cdot 160 = 15\,280$

$F_D(200,200) = 35 \cdot 200 + 43 \cdot 200 = 15\,600$

Conclusión: para que el beneficio sea máximo se deben cazar 200 conejos y 200 perdices, en cuyo caso, el beneficio máximo es de 15600 €.

Apartado b)

X = duración (en segundos) de las llamadas

$X \rightsquigarrow N(\mu, 60)$ $\begin{cases} \sigma = 60 \text{ segundos} \\ n = 36 \text{ llamadas} \\ \bar{x} = 240 \text{ segundos} \end{cases}$

b.1.) Intervalo de confianza al 95%

$$1-\alpha = 95\% = 0{,}95 \Rightarrow \alpha = 1-0{,}95 = 0{,}05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0{,}025$$

$$P(Z < z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - 0{,}025 = 0{,}975 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

Intervalo de confianza:

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(240 - 1{,}96 \cdot \frac{60}{\sqrt{36}}, 240 + 1{,}96 \cdot \frac{60}{\sqrt{36}}\right) =$$

$$= \boxed{(220{,}4 \ , \ 259{,}6)}$$

b.2) Amplitud si la muestra aumenta a 100

$$A = 2E = 2 z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2 \cdot 1{,}96 \frac{60}{\sqrt{100}} = \frac{588}{25} \simeq 23{,}52$$

<u>Justificación</u>: la amplitud disminuye porque el tamaño de la muestra está en el denominador y al aumentar n, el intervalo se estrecha.

También se puede justificar calculando la amplitud original

$$A_{original} = 2 \cdot 1{,}96 \cdot \frac{60}{\sqrt{36}} = \frac{196}{5} \simeq 39{,}2$$

y se tiene que $\underset{(n=36)}{A_{original}} > A_{n=100}$.

b.3) Excluir 230 segundos del I.C. del apartado b.1)

$230 \in I.C.$ y para que no esté incluido en dicho intervalo, tenemos que reducir la amplitud del intervalo, esto es, hay que disminuir $z_{\alpha/2}$ y, por tanto, hay que disminuir el nivel de confianza.

<u>Conclusión</u>: para que $230 \notin IC$, hay que disminuir el nivel de confianza