UCLM Universidad Castilla-La Mancha

Prueba de acceso a la Universidad

Curso 2025/2026

Materia: Matemáticas II

INSTRUCCIONES: El estudiante **deberá resolver obligatoriamente las preguntas 1 a 3,** y **elegir una opción de las dos propuestas en la pregunta 4 y 5.** Es decir, en las preguntas 4 y 5, contestará UNA sola de las opciones propuestas. Si resuelve más, se corregirá solo el primero de los dos apartados resueltos. Las respuestas a los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando dichas respuestas, ya que **se valorará en estas y en los procedimientos desarrollados el rigor matemático. Su falta se podrá penalizar con hasta 1 punto en todo el examen.** Solo se permite el uso de **calculadoras de tipo 1 y 2,** tal y como se indica en la información de las pruebas. Cada ejercicio completo puntuará 2 puntos. **Duración de la prueba: 90 minutos**.

PARTE A (preguntas 1, 2 y 3). Conteste TODAS las preguntas de esta parte

Pregunta 1.

Durante la misión Dulcinea, el equipo de control clasifica las alertas técnicas detectadas a bordo en tres sistemas: sistema de navegación, que genera el 50% de las alertas, el sistema de comunicaciones, que genera el 30% de las alertas y el sistema de soporte vital, que genera el 20% de las alertas.

Además, se sabe que el 4% de las alertas de navegación, el 6% de las de comunicaciones y el 10% de las alertas de soporte vital, son críticas. Si se elige una alerta al azar.

a) **[1 punto]** Calcula la probabilidad de que la alerta sea crítica.
b) **[1 punto]** Sabiendo que la alerta no es crítica, calcula la probabilidad de que proceda del soporte vital.

Pregunta 2.

Durante una campaña de promoción de productos de Castilla-La Mancha, una empresa dedicada a la venta de azafrán estima que el beneficio diario obtenido, expresado en cientos de euros, viene dado por la función:

$$B(x) = 80x \cdot e^{-0,5x}$$

Donde x representa el número de días transcurridos desde el inicio de la campaña

a) **[1,25 puntos]** Estudia el crecimiento y decrecimiento de la función $B(x)$ y determina el día en que el beneficio diario es máximo
b) **[0,75 puntos]** A largo plazo, ¿tiende el beneficio diario a estabilizarse en algún valor? En caso afirmativo determina dicho valor e interprételo en el contexto del problema.

Pregunta 3.

a) **[1 punto]** Determina los valores de a y b para que las matrices A y B cumplan que A·B=I, donde I es la matriz identidad de orden 3.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & b \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) **[1 punto]** Resuelve razonadamente el siguiente sistema de ecuaciones $\begin{cases} X + Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \\ 2X + 3Y = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} \end{cases}$

PARTE B (preguntas 4 y 5)

Pregunta 4. Conteste solo UNA de las siguientes preguntas (4.1 o 4.2)

4.1. Dados los vectores $\vec{u} = (1, -1, a), \vec{v} = (2, a, 1)\ y\ \vec{w} = (-1, 1, -1),$ se pide:

a) **[0,75 puntos]** Halla los valores reales de a para que los tres vectores sean coplanarios. Justifica tu respuesta.

b) **[1,25 puntos]** Halla los valores reales de a para que el volumen del paralelepípedo formado por los vectores del enunciado sea 10 u^3.

.

4.2. [2 puntos] En un parque público, se está instalando un sistema de vigilancia mediante sensores de movimiento a ambos lados de un muro recto. Dicho muro está representado por el plano de ecuación:

$$\pi \equiv x + y + z - 6 = 0.$$

Uno de los sensores está situado en el punto de coordenadas P(1,2,6) y se desea instalar un segundo sensor en el punto P', simétrico del anterior respecto del plano π.

a) **[1,25 puntos]** Determina razonadamente las coordenadas del punto de instalación del segundo sensor, P'.

b) **[0,75 puntos]** Calcula la distancia entre los dos sensores.

Pregunta 5. Conteste solo UNA de las siguientes preguntas (5.1 o 5.2)

5.1.

a) **[1 punto]** Calcula justificadamente el siguiente límite: $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-3}\right)^x$

b) **[1 punto]** Calcula justificadamente la siguiente integral: $\int e^x \cdot senx\, dx$

5.2. **[2 puntos]** Sea la función $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & si\ \ x < 1 \\ ax + b & si\ \ x \geq 1 \end{cases}$, donde a y b son números reales. Determina los valores de a y b para que la función sea continua y derivable en x=1

JUNIO 2026

©$\vec{C}ipr\vec{i}$

① Nombramos los sucesos:

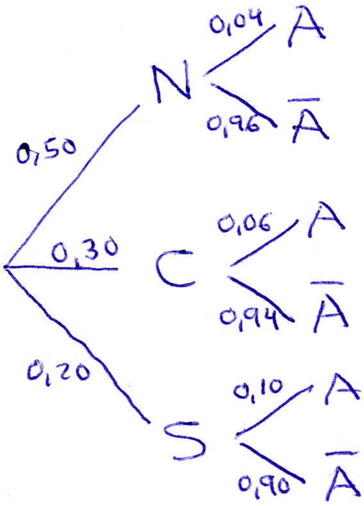
N = la alerta proviene del sistema de navegación

C = " " " " " " comunicaciones

S = " " " " " " soporte vital

A = la alerta es crítica

y construimos el árbol de probabilidades:



a) Para calcular $P(A)$ aplicamos el teorema de la probabilidad total:

$$\boxed{P(A)}=P(N)P(A/N)+P(C)P(A/C)+$$

$$+P(S)P(A/S)=0{,}50\cdot0{,}04+0{,}30\cdot0{,}06+0{,}20\cdot0{,}10=$$

$$=\boxed{0{,}058}$$

b) Para calcular $P(S/\bar{A})$ aplicamos el teorema de Bayes:

$$\boxed{P(S/\bar{A})}=\frac{P(S\cap\bar{A})}{P(\bar{A})}=\frac{P(S)P(\bar{A}/S)}{1-P(A)}=\frac{0{,}10\cdot0{,}90}{1-0{,}058}=\boxed{\frac{30}{157}\simeq0{,}1911}$$

② $B(x)=80x\cdot e^{-0{,}5x}$ (beneficio diario en cientos de €)

x = nº de días transcurridos desde el inicio de la campaña

a) Crecimiento, decrecimiento y día de beneficio máximo

$$B'(x)=80e^{-0{,}5x}+80x\cdot e^{-0{,}5x}\cdot(-0{,}5)=80e^{-0{,}5x}-40xe^{-0{,}5x}=$$

$$=40e^{-0{,}5x}(2-x)$$

$B'(x)=0 \Rightarrow 2-x=0 \Rightarrow x=2$ ya que $e^{-0{,}5x}\neq0 \;\forall x$

signo de B'

$$\begin{array}{ccc} + & & - \\ \hline \nearrow & 2 & \searrow \end{array}$$

B es $\begin{cases}\text{creciente en } (-\infty,2)\\ \text{decreciente en } (2,+\infty)\end{cases}$

$$B''(x) = -0{,}5 \cdot 40\, e^{-0{,}5x}(2-x) + 40 e^{-0{,}5x}(-1)$$

$B''(2) < 0 \Rightarrow x = 2$ es un máx. relativo de $B(x)$

Conclusión: suponiendo que el inicio de la campaña es en $x=0$

$$B \text{ es } \begin{cases} \text{creciente en } (0,2) \\ \text{decreciente en } (2,+\infty) \end{cases}$$

Tiene un máximo a los 2 días del inicio de la campaña

b) Comportamiento a largo plazo

$$\lim_{x\to+\infty} B(x) = \lim_{x\to+\infty} 80x\,e^{-0{,}5x} = [\infty \cdot 0] = \lim_{x\to+\infty} \frac{80x}{e^{0{,}5x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{(1)}{=}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{80}{0{,}5\,e^{0{,}5x}} = \left[\frac{80}{\infty}\right] = 0$$

donde en (1) hemos usado la regla de L'Hôpital.

Conclusión: a largo plazo el beneficio tiende a estabilizarse en 0 cientos de € (0 €), esto es, con el paso del tiempo la campaña de promoción deja de generar beneficios diarios.

3) a) $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & b \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$AB = I \Rightarrow AB = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-a & a-1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2-b & 0 & b-1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} 2-a = 1 \Rightarrow a = 1 \\ a-1 = 0 \Rightarrow a = 1 \\ 2-b = 0 \Rightarrow b = 2 \\ b-1 = 1 \Rightarrow b = 2 \end{array}$$

Solución: para $(a,b) = (1,2)$ se tiene que $AB = I$

b) Sistema de ecuaciones matriciales

$$\begin{cases} X + Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \\ 2X + 3Y = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} \end{cases} \xrightarrow{\cdot(-2)} \begin{array}{l} -2X - 2Y = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -4 & -6 \end{pmatrix} \\ 2X + 3Y = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$Y=\begin{pmatrix}-2&0\\-4&-6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4&1\\7&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\3&3\end{pmatrix}$$

Como $X+Y=\begin{pmatrix}1&0\\2&3\end{pmatrix} \Rightarrow X=\begin{pmatrix}1&0\\2&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&1\\3&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-1\\-1&0\end{pmatrix}$

$$\boxed{\text{Solución: } (X,Y)=\left(\begin{pmatrix}-1&-1\\-1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2&1\\3&3\end{pmatrix}\right)}$$

4) Pregunta 4.1

a) $\vec{u}=(1,-1,a)$, $\vec{v}=(2,a,1)$, $\vec{w}=(-1,1,-1)$

¿a para que $\vec{u},\vec{v}$ y $\vec{w}$ sean coplanarios?

$\vec{u},\vec{v}$ y $\vec{w}$ coplanarios $\Leftrightarrow [\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=0$

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=\det\begin{pmatrix}1&-1&a\\2&a&1\\-1&1&-1\end{pmatrix}=-a+2a+1+a^2-1-2=$$

$$=a^2+a-2=0 \Rightarrow a=\begin{cases}1\\-2\end{cases}$$

$$\boxed{\text{Conclusión: si } a=\begin{cases}1\\-2\end{cases}, \text{ entonces } \vec{u},\vec{v} \text{ y } \vec{w} \text{ son coplanarios}}$$

b) ¿a para que $V_{\text{Paralelepípedo}}=10\ u^3$?

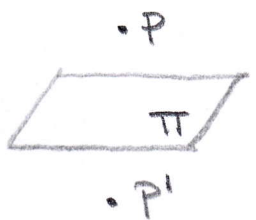
$$V_{\text{Paralelepípedo}}=\left|[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]\right|=|a^2+a-2|=10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a^2+a-2=10 \Rightarrow a^2+a-12=0 \Rightarrow a=\begin{cases}3\\-4\end{cases}\\ a^2+a-2=-10 \Rightarrow a^2+a+8=0 \Rightarrow a\notin\mathbb{R}\end{cases}$$

$$\boxed{\text{Conclusión: para } a=\begin{cases}3\\-4\end{cases}, \text{ se tiene que } V_{\text{Paralelepípedo}}=10\ u^3}$$

Pregunta 4.2

a) Punto simétrico de $P(1,2,6)$ respecto de $\pi\equiv x+y+z-6=0$



i) Calculamos la recta r perpendicular a π que pasa por el punto P

$$r\equiv\{P,\vec{n_\pi}\}$$

$$r \equiv \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 2+\lambda \\ z = 6+\lambda \end{cases} \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{ya que } \vec{n_\pi} = (1,1,1)$$

ii) Calculamos M, punto de intersección de r y π. Para ello, sustituimos las ecs. de r en π:

$$(1+\lambda)+(2+\lambda)+(6+\lambda)-6=0 \Rightarrow 3\lambda+3=0 \Rightarrow \lambda=-1$$

El punto M es $M(1+(-1), 2+(-1), 6+(-1)) = (0,+1,5)$

iii) El punto M es el punto medio del segmento $\overline{PP'}$: $P'(P_1', P_2', P_3')$

$$(0,1,5) = \left(\frac{1+P_1'}{2}, \frac{2+P_2'}{2}, \frac{6+P_3'}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{cases} 0 = \dfrac{1+P_1'}{2} \Rightarrow P_1' = -1 \\ 1 = \dfrac{2+P_2'}{2} \Rightarrow P_2' = 0 \\ 5 = \dfrac{6+P_3'}{2} \Rightarrow P_3' = 4 \end{cases}\right\} \Rightarrow P'(-1,0,4)$$

$\boxed{\text{Conclusión: el segundo sensor hay que instalarlo en } P'(-1,0,4)}$

b) Distancia entre los sensores

$$d(P,P') = |\overrightarrow{PP'}| = \sqrt{(-2)^2+(-2)^2+(-2)^2} = 2\sqrt{3}$$

$$\overrightarrow{PP'} = (-1,0,4)-(1,2,6) = (-2,-2,-2)$$

$\boxed{\text{Conclusión: la distancia entre los sensores es de } 2\sqrt{3}\ u}$

5 Apartado 5.1

a) $$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-3}\right)^x = [1^\infty] = e^2$$

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{2x+1}{2x-3}-1\right) = \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{2x+1-(2x-3)}{2x-3}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{4}{2x-3}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{4x}{2x-3} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{4x}{x}}{\frac{2x}{x}-\frac{3}{x}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{4}{2-\frac{3}{x}} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\boxed{\text{Conclusión: } \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-3}\right)^x = e^2}$$

b) $$\int e^x \operatorname{sen} x\,dx = \left[\begin{array}{ll} u=e^x \longrightarrow du=e^x\,dx \\ dv=\operatorname{sen}x\,dx \to v=-\cos x \end{array}\right] =$$

$$= -\cos x\cdot e^x + \int \cos x\cdot e^x\,dx \underset{1}{=}$$

$$\int \cos x\cdot e^x\,dx = \left[\begin{array}{ll} u=e^x \longrightarrow du=e^x\,dx \\ dv=\cos x\,dx \to v=\operatorname{sen}x \end{array}\right] =$$

$$= e^x \operatorname{sen}x - \int e^x \operatorname{sen}x\,dx$$

$$\underset{1}{=} -e^x\cos x + e^x\operatorname{sen}x - \int e^x \operatorname{sen}x\,dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\int e^x \operatorname{sen}x\,dx = -e^x\cos x + e^x\operatorname{sen}x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\int e^x\operatorname{sen}x\,dx = \frac{1}{2}e^x(-\cos x + \operatorname{sen}x) + C}$$

Pregunta 5.2

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & x<1 \\ ax+b & x\geq 1 \end{cases}$$

¡Observación! $x-1=0 \Rightarrow x=1$ que no está en el dominio de $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$, luego $f(x)$ está bien definida.

¿a y b para que $f(x)$ sea continua y derivable en $x=1$?

Continuidad en $x=1$: ¿$\exists \lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$?

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{x-1} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 1}\frac{(x+1)\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}} = \lim_{x\to 1}(x+1) = 2$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(ax+b) = a+b = f(1)$$

$$\Rightarrow \boxed{a+b=2}$$

Derivabilidad en $x=1$: ¿$\exists f'(1)$?

$$y=\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{(x+1)\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}}=x+1 \Rightarrow y'=1 \Rightarrow f'(1^-)=1$$

$$y=ax+b \Rightarrow y'=a \Rightarrow f'(1^+)=a$$

$$\Rightarrow \boxed{a=1}$$

Resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} a+b=2 \longrightarrow b=2-1=1 \\ a=1 \end{cases}$$

Conclusión: para $(a,b)=(1,1)$, $f(x)$ es continua y derivable en $x=1$

¡Observaciones!

(1) Si $y=\dfrac{x^2-1}{x-1} \Rightarrow y'=\dfrac{2x(x-1)-(x^2-1)\cdot 1}{(x-1)^2}=\dfrac{2x^2-2x-x^2+1}{x^2-2x+1}=$

$$=\frac{x^2-2x+1}{x^2-2x+1}=1$$, es decir, obtenemos lo mismo.

(2) ¿Por qué podemos simplificar $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ para $x<1$?

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{para } x<1 \\ h(x)=x+1 & \text{para } x<1 \end{cases}$$

Se tiene que:
- $Dom(g)=Dom(h)$
- $\forall x<1$, $g(x)=h(x)$, ya que $\dfrac{x^2-1}{x-1}=x+1 \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow x^2-1=(x+1)(x-1) \Leftrightarrow x^2-1=x^2-1$, que es cierta