

## SdA 11: De teorema en teorema: áreas contando puntos

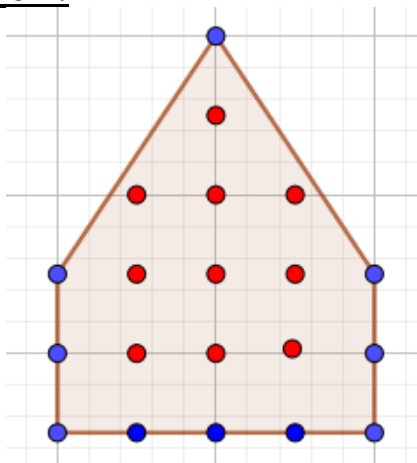
Tras haber descubierto la ley universal que conecta los lados de los triángulos rectángulos (Teorema de Pitágoras), la Academia de Ciencias os ha encomendado una nueva misión aún más delicada. Habéis encontrado en los archivos secretos un manuscrito perdido de 1899, escrito por un brillante matemático llamado Georg Alexander Pick. En su nota, Pick afirma haber descubierto un «atajo mágico»: es posible calcular el área de cualquier figura dibujada sobre una cuadrícula simplemente contando puntos, sin necesidad de usar reglas complicadas ni fórmulas largas. Sin embargo, hay un problema: la fórmula parece demasiado simple para ser verdad. Además, la historia de Pick es triste; sufrió mucho durante la guerra por su origen, pero su descubrimiento sobrevivió al tiempo. Vuestro deber es honrar su legado verificando si su fórmula funciona realmente. ¿Es posible que contar puntos interiores y puntos del borde nos dé la superficie exacta de un terreno? ¿Funciona igual si el terreno tiene lagos en medio (agujeros)? Tenéis que investigar, validar y demostrar si el «Código de Pick» es la herramienta definitiva para los topógrafos del futuro.

### **Teorema de Pick** [Georg Alexander Pick<sup>1</sup> (1899)]

En un *polígono simple cuyos vértices tienen coordenadas enteras*, si  $B$  es el número de puntos enteros en el borde e  $I$  el número de puntos enteros en el interior del polígono, entonces el área  $A$  del polígono se puede calcular con la fórmula:

$$A = I + \frac{B}{2} - 1$$

### **Ejemplo 1:**



Aplicando el teorema de Pick:

$$I = 10$$

$$B = 10$$

Así:

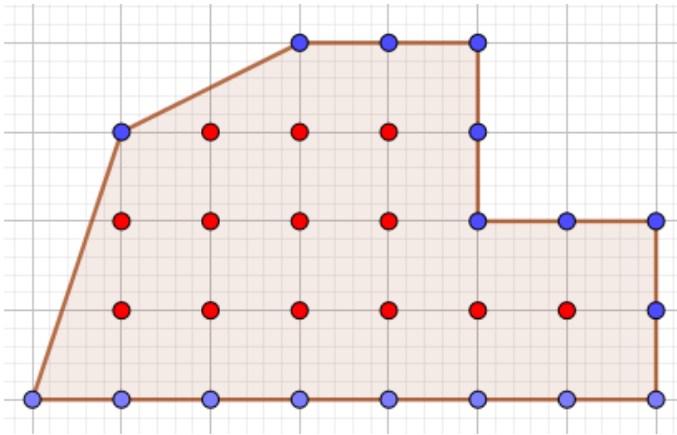
$$\text{Área} = 10 + \frac{10}{2} - 1 = 14$$

<sup>1</sup> Georg Alexander Pick (10 de agosto de 1859 - 26 de julio de 1942) fue un matemático de origen judío nacido en Austria. Murió durante la Segunda Guerra Mundial en el Campo de concentración de Theresienstadt, donde había sido internado tras la invasión alemana.

Es conocido por el Teorema de Pick, una elegante fórmula matemática que permite determinar el área de polígonos cuyos vértices se sitúan sobre los puntos de una retícula regular. Publicado en un artículo en 1899, se popularizó cuando Hugo Steinhaus lo incluyó en la edición de 1969 de Mathematical Snapshots.

(Fuente: [https://es.wikipedia.org/wiki/Georg\\_Alexander\\_Pick](https://es.wikipedia.org/wiki/Georg_Alexander_Pick))

## Ejemplo 2:



Aplicando el teorema de Pick:

$$I = 13$$

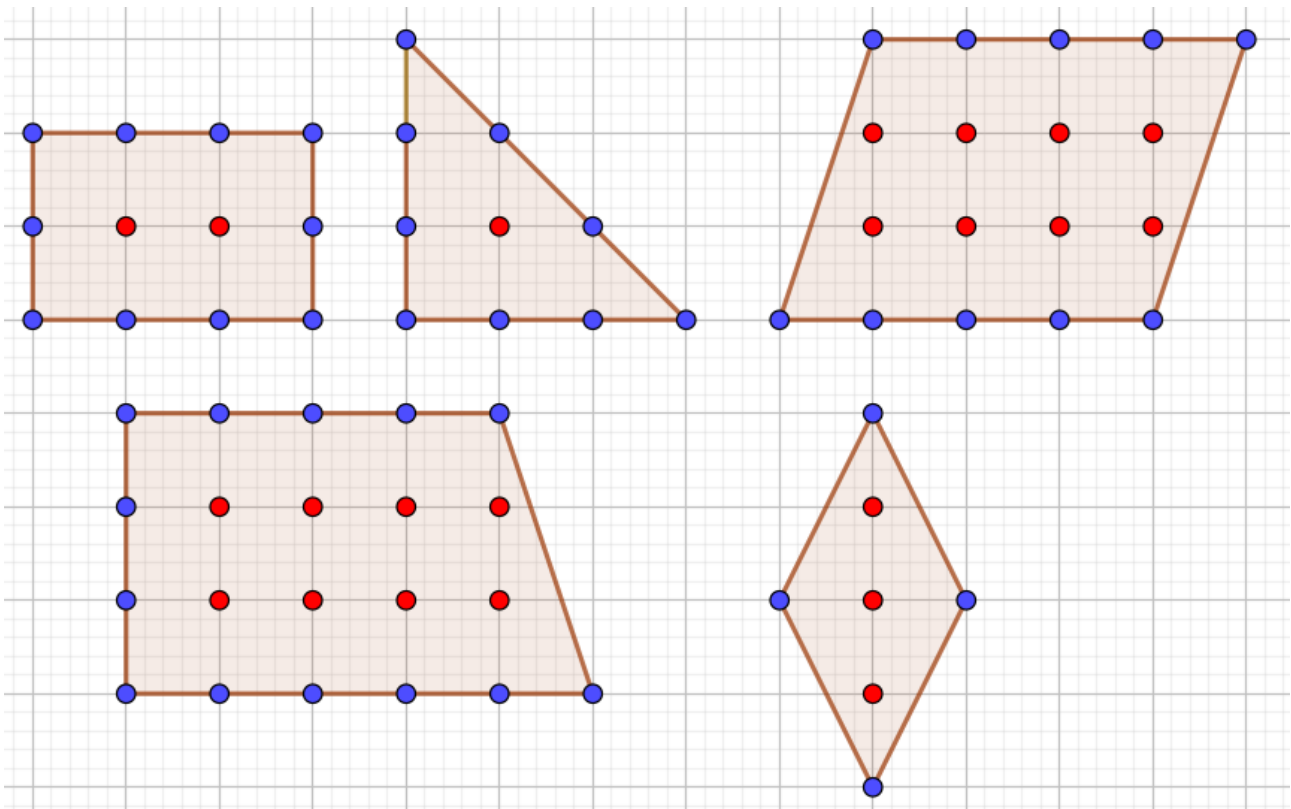
$$B = 17$$

Así:

$$\text{Área} = 13 + \frac{17}{2} - 1 = \frac{41}{2} = 20,5$$

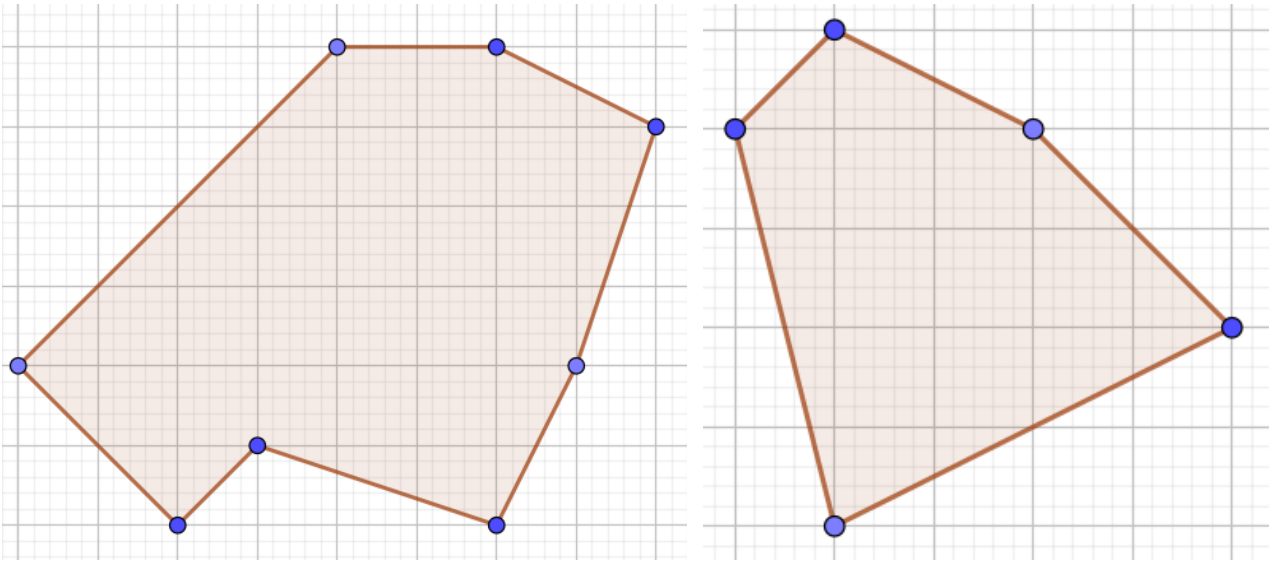
## Actividad 1:

Calcula el área de los siguientes polígonos y comprueba el resultado obtenido, calculando dichas áreas mediante las fórmulas correspondientes:



## Actividad 2:

Calcula el área de los siguientes polígonos:



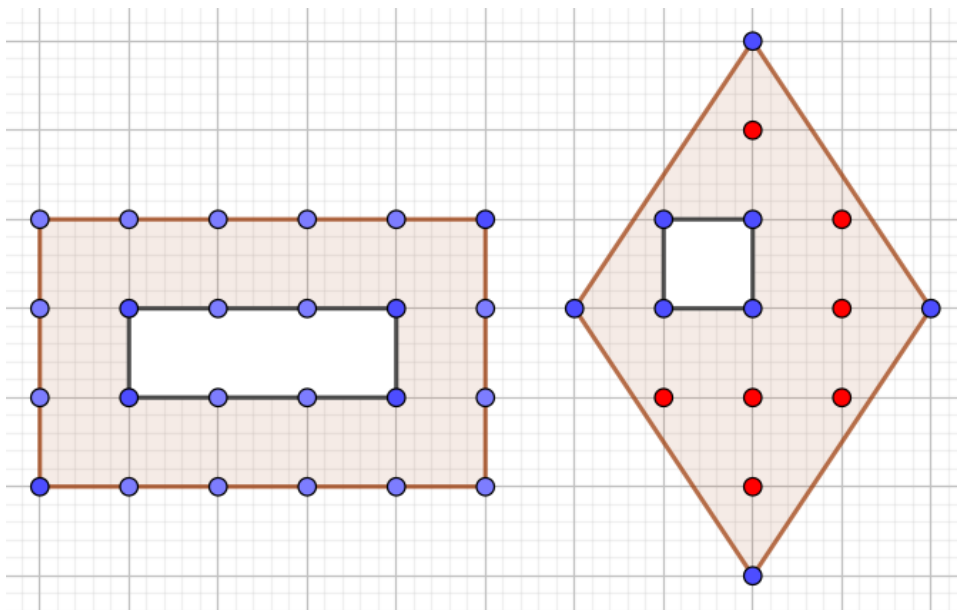
*¡Importante!* Recuerda que los puntos que se cuentan tienen que tener coordenadas enteras y tienes que contar tanto los del borde como los interiores.

### Actividad 3:

*Investiga:* hay una fórmula más general, para poder aplicar el teorema de Pick cuando el polígono tiene agujeros. ¿Cuál es?

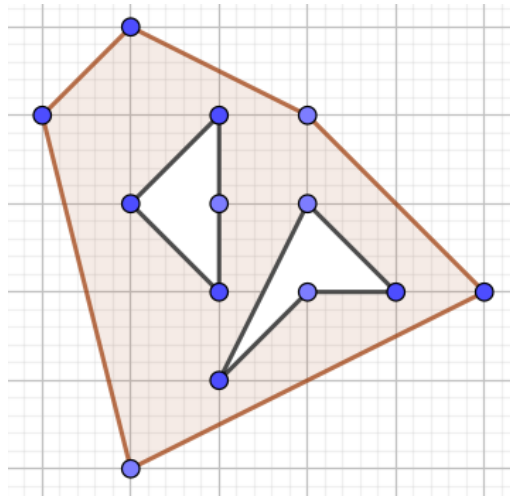
### Actividad 4:

Calcula el área de las siguientes figuras, y comprueba el resultado, calculando dichas áreas mediante las fórmulas correspondientes:

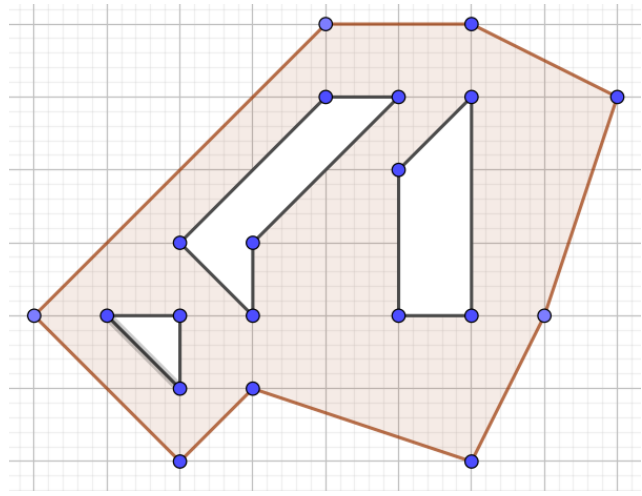


### Actividad 5:

Calcula el área de las siguientes figuras:



¡Cuidado!



¡Cuidado!

### Pregunta de reflexión:

El Teorema de Pick nos permite calcular una magnitud continua (el área o la superficie) contando elementos discretos (puntos enteros). ¿Qué nos dice esto sobre la relación entre el «conteo» y la «medida» en matemáticas? Además, sabiendo que Pick murió en un campo de concentración, pero su teorema sigue vivo hoy, ¿crees que las matemáticas pertenecen a una persona o a un país, o son un patrimonio universal de la humanidad?