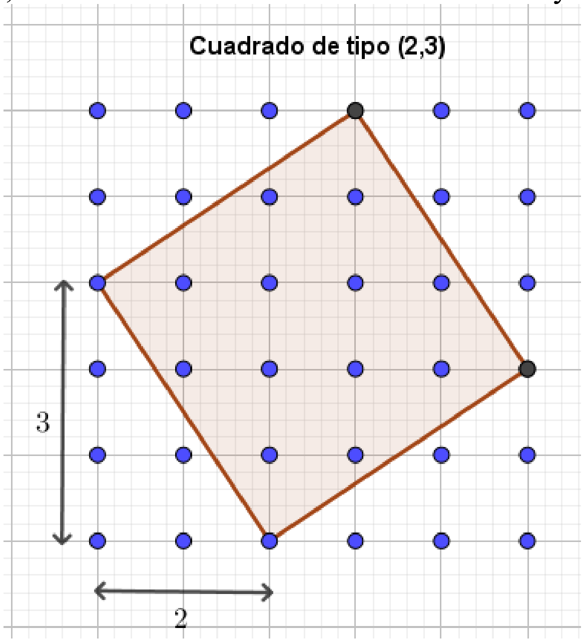
SdA 10: Tu primer teorema[1]: dos catetos y una hipotenusa

Imagina que eres miembro de un equipo de "Detectives Matemáticos" recién reclutado por la Academia de Ciencias.
Habéis recibido un antiguo manuscrito (el dossier que tenéis a continuación) que pertenece a una sociedad secreta de matemáticos de la antigüedad. El manuscrito afirma haber descubierto una «Ley Universal» que conecta las tres partes de un triángulo rectángulo. Sin embargo, la ley está incompleta y hay que verificarla paso a paso.
Vuestro misión no es solo calcular, sino descubrir el patrón que se esconde detrás de las formas. Primero, investigaréis cuadrados dibujados sobre una cuadrícula (como planos de construcción). Luego si la ley se rompe o se mantiene cuando cambiáis los cuadrados por hexágonos (como paneles solares o celdas de panal). Finalmente, descubriréis que un presidente de los Estados Unidos, James Garfield, encontró una forma ingeniosa de demostrar por qué esto es siempre verdad usando un trapecio.

Para completar vuestra misión y validar la «Ley Universal», debéis superar cuatro fases de investigación basadas en las siguientes actividades.

Actividad 1:

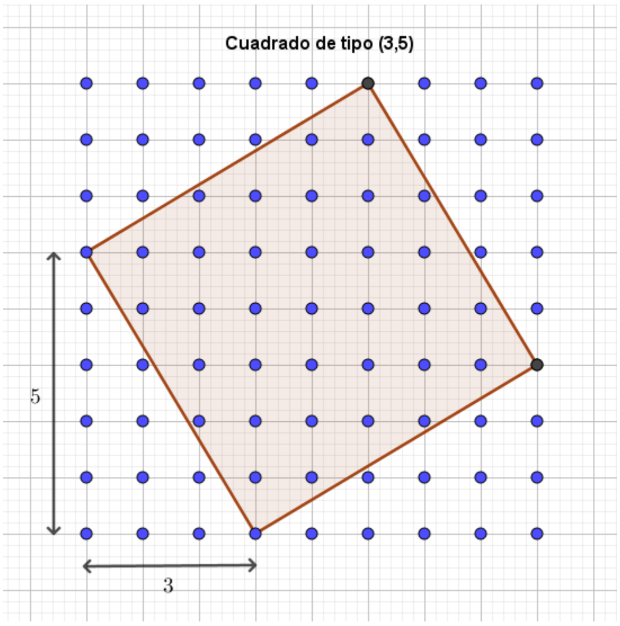
A partir de la figura adjunta, encuentra el área del cuadrado coloreado y explica cómo lo has hecho.

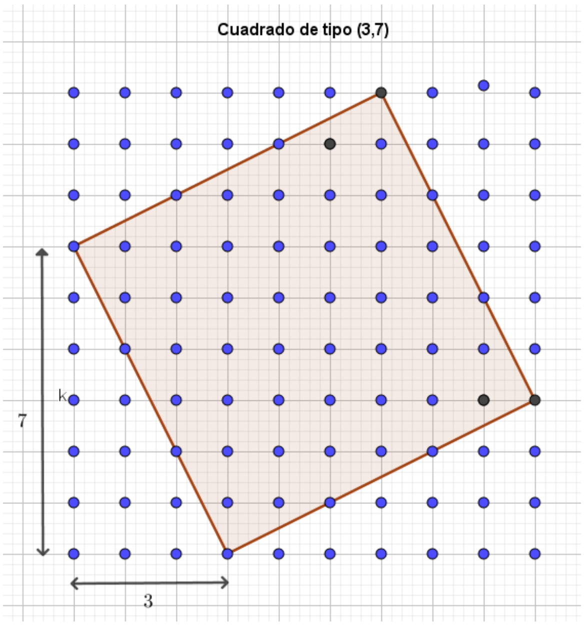


Actividad 2:

Responde a la misma pregunta que en la actividad anterior, pero ahora, dibujando los cuadrados de tipo (3,5) y (3,7). Intenta que el método de cálculo del área no sea el mismo que has usado en la actividad anterior.

[1] En matemáticas, a las propiedades más importantes se les llama teoremas.





Actividad 3:

Dibuja en tu cuaderno un triángulo rectángulo, cuyos catetos midan 3 y 4 cm, respectivamente.

a) ¿Cuánto mide la hipotenusa?
b) Dibuja un cuadrado sobre cada uno de los lados de triángulo.
c) Calcula el área de cada uno de los cuadrados del apartado anterior.
d) ¿Qué relación hay entre el área del cuadrado que has dibujado sobre la hipotenusa y las áreas de los cuadrados que has dibujado sobre los catetos?

Actividad 4: generalizamos un poco

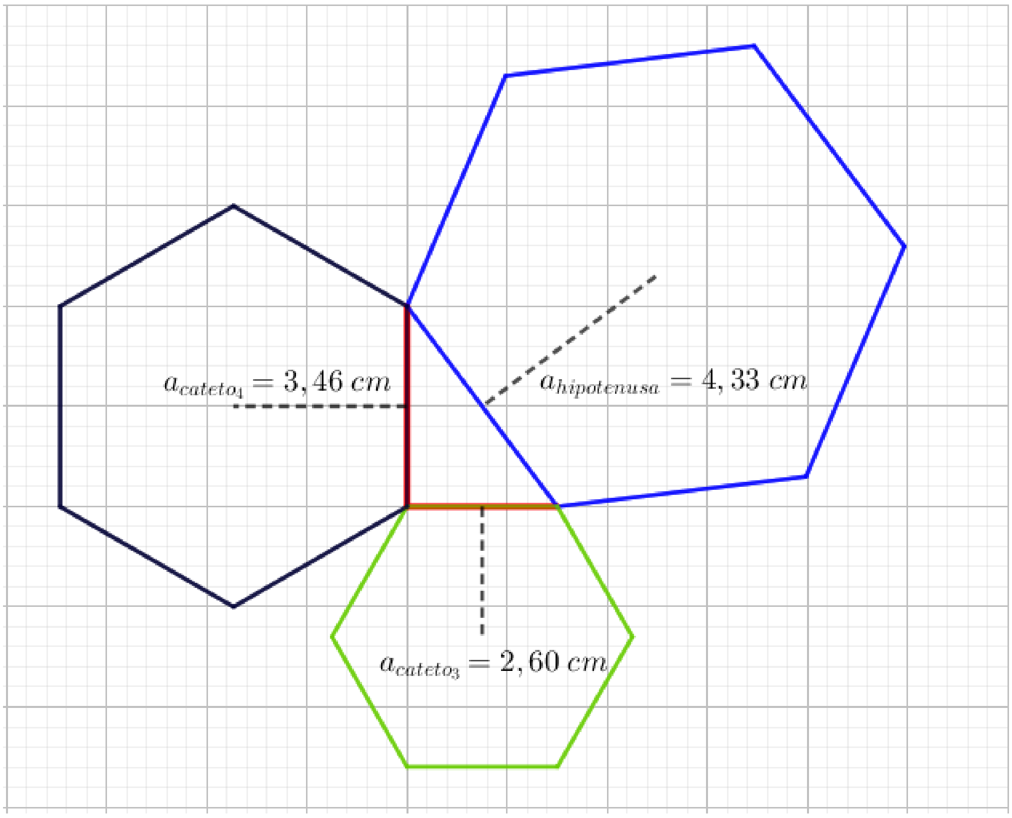
Dibuja en tu cuaderno un triángulo rectángulo, cuyos catetos midan 3 y 4 cm, respectivamente.

a) ¿Cuánto mide la hipotenusa? (Ya sabemos la respuesta, porque es el mismo triángulo de la actividad anterior)
b) Dibuja un hexágono sobre cada uno de los lados de triángulo.
(Si no lo sabes, busca cómo dibujar un hexágono, de lado conocido, con regla y compás)
c) Calcula el área de cada uno de los hexágonos del apartado anterior.

$$A_{\substack{\text{Polígono}\\ \text{regular}}} = \frac{p \cdot a}{2} \text{ donde } \begin{cases} p = \text{perímetro} \\ a = \text{apotema} \end{cases}$$

La apotema del hexágono sobre la hipotenusa mide 4,33 cm, la apotema del hexágono sobre el cateto de lado 3 mide 2,60 cm y la apotema del hexágono sobre el cateto de lado 4 mide 3,46 cm.

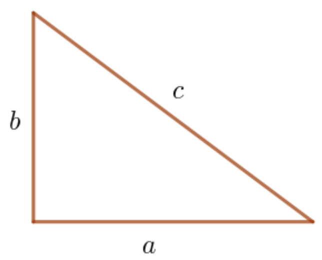
d) ¿Qué relación hay entre el área del hexágono que has dibujado sobre la hipotenusa y las áreas de los hexágonos que has dibujado sobre los catetos?



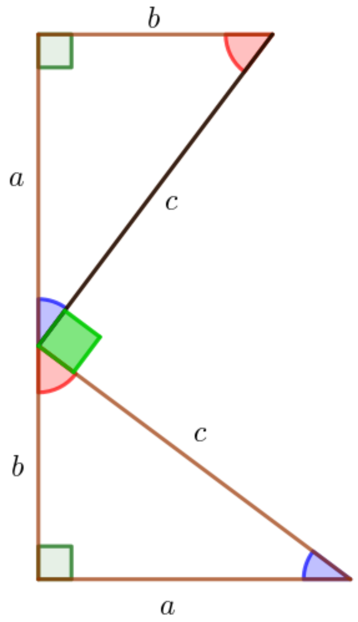
Pregunta de reflexión:

Si la relación entre las áreas se cumple para cuadrados y también para hexágonos, ¿crees que se cumpliría para cualquier otra figura geométrica (como triángulos equiláteros o semicírculos) dibujada sobre los lados del triángulo rectángulo? ¿Qué nos dice esto sobre la naturaleza de las matemáticas: son reglas inventadas por humanos o verdades que descubrimos en el universo?

Una **curiosa demostración del teorema de Pitágoras**: James Garfield (presidente de los EE.UU.)
Consideramos el siguiente triángulo rectángulo:



Colocamos dos triángulos como el anterior, como se muestra en la figura:



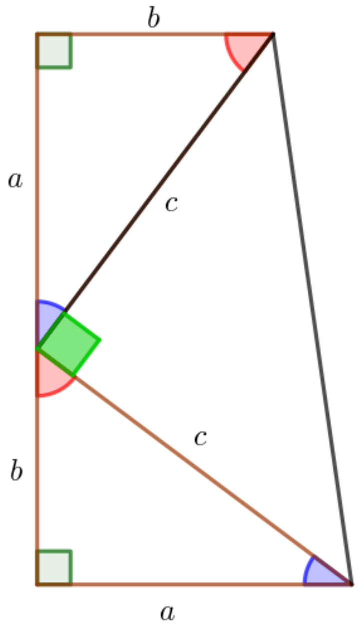
En el triángulo rectángulo de arriba:

- El ángulo verde mide 90º
- Los ángulos rojo y azul suman 90º

El triángulo rectángulo de abajo es igual y, por tanto, la suma del ángulo rojo del triángulo de abajo y el ángulo azul del triángulo de arriba suman 90º.

Como consecuencia, el ángulo que forman los dos lados c tiene una amplitud de 90º.

Ahora, formamos un trapecio, tal y como se muestra en la figura:



Calculamos el área del trapecio rectángulo obtenido de dos formas:

1º forma: suma de los tres triángulos rectángulos

$$\frac{ab}{2}+\frac{ba}{2}+\frac{c^2}{2}=\frac{2ab+c^2}{2} \qquad [1]$$

2ª forma: con la fórmula:

$$\frac{(a+b)(b+a)}{2}=\frac{ab+a^2+b^2+ba}{2}=\frac{a^2+b^2+2ab}{2} \qquad [2]$$

Igualamos [1] y [2] y simplificamos:

$$\frac{2ab+c^2}{2}=\frac{a^2+b^2+2ab}{2} \Rightarrow \cancel{2ab}+c^2=a^2+b^2\cancel{+2ab}$$

$$\Rightarrow \boxed{c^2=a^2+b^2}$$