Intervalo de confianza para la proporción de una distribución binomial

Problema 1 (Artículos defectuosos)
Un fabricante de componentes electrónicos quiere estimar la proporción de artículos defectuosos en su producción. Toma una muestra aleatoria de 400 artículos y encuentra que 32 son defectuosos. Se sabe que la proporción muestral se aproxima a una distribución normal. Con un nivel de confianza del 98 %:

a) Calcula el intervalo de confianza para la proporción poblacional de artículos defectuosos.
b) Explica, justificando la respuesta, cómo se podría obtener un intervalo de confianza con menor amplitud sin modificar el nivel de confianza.
c) El fabricante afirma que la proporción real de defectuosos es del 6 %. Con un nivel de confianza del 95 %, ¿se puede aceptar esta afirmación? (Calcula el intervalo de confianza al 95 % y decide).

Problema 2 (Intención de voto)
En una encuesta preelectoral, se pregunta a 500 ciudadanos elegidos al azar sobre su intención de voto a un determinado partido. 275 de ellos afirman que votarán a ese partido. Suponiendo que la distribución de la proporción muestral es aproximadamente normal, y con un nivel de confianza del 95 %:

a) Determina el intervalo de confianza para la proporción de votantes que apoyan al partido en toda la población.
b) ¿Cómo podría reducirse la amplitud del intervalo sin perder confianza? Justifica la respuesta.
c) El partido político afirma que tiene el 60 % de los votos. Con un nivel de confianza del 99 %, ¿se puede aceptar dicha afirmación? (Calcula el intervalo correspondiente y decide).

Problema 3 (Aprobados en una asignatura)
En una universidad, se desea estimar la proporción de estudiantes que aprueban una asignatura. Se toma una muestra aleatoria de 200 estudiantes y se observa que 140 han aprobado. Con un nivel de confianza del 97 %:

a) Construye el intervalo de confianza para la proporción poblacional de aprobados.
b) Explica cómo variaría la amplitud del intervalo si se aumentara el tamaño de la muestra, manteniendo el mismo nivel de confianza. Justifica.
c) Un profesor afirma que la proporción de aprobados es del 75 %. Con un nivel de confianza del 95 %, ¿se puede aceptar esta afirmación? (Calcula el intervalo de confianza al 95 % y decide).

Problema 4 (Efectividad de un tratamiento)
Un laboratorio farmacéutico prueba un nuevo medicamento en una muestra de 150 pacientes con una cierta enfermedad. 120 de ellos muestran mejoría. Se supone que la proporción de mejoría sigue una distribución binomial (aproximación normal). Con un nivel de confianza del 99 %:

a) Obtén el intervalo de confianza para la proporción poblacional de pacientes que mejoran con el tratamiento.
b) Sin modificar el nivel de confianza, ¿qué cambio en el diseño del estudio permitiría obtener un intervalo más preciso? Justifica.
c) El laboratorio afirma que el medicamento es efectivo en el 85 % de los casos. Con un nivel de confianza del 90 %, ¿se puede aceptar dicha afirmación? (Calcula el intervalo de confianza al 90 % y justifica).

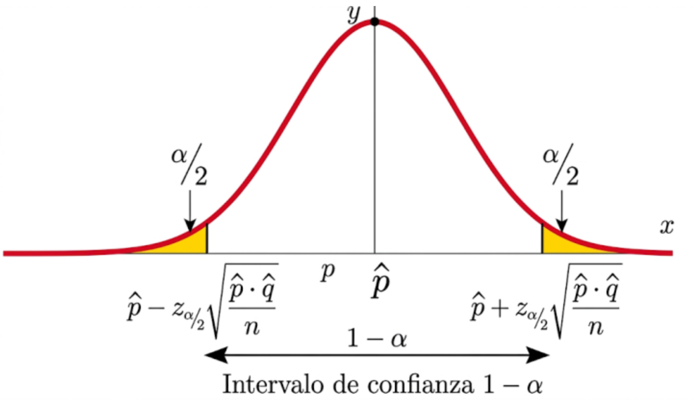
SOLUCIONES

Al intervalo

$$\boxed{\left(p - Z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}, p + Z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}\right)}$$

se le llama intervalo de confianza para la proporción muestral: en este caso la confianza es $1-\alpha$.

- El valor $1-\alpha$ da el ***nivel de confianza*** y mide la probabilidad que se tiene de que la proporción muestral pertenezca al intervalo de confianza. Si la confianza es $1-\alpha$, suele decirse que el ***nivel de significación*** es α (medida del riesgo que asumimos).



Es decir,

$$P \in \left(p - Z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}, p + Z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}\right) \Leftrightarrow P\left(p - Z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} \le P \le p + Z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}\right) = 1-\alpha$$

Problema 1

- Tamaño muestral $n = 400$
- Número de defectuosos $x = 32$
- Proporción muestral $p = \frac{32}{400} = 0,08$
- Nivel de confianza del 98 %

$$1-\alpha = 98\% = 0,98 \Rightarrow \alpha = 0,02 \Rightarrow P\left(Z < z_{\alpha/2}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - 0,01 = 0,99 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2,33$$

a) Intervalo de confianza al 98%

$$\left(p - Z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}, p + Z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}\right) = \left(0,08 - 2,33 \cdot \sqrt{\frac{0,08 \cdot 0,92}{400}} \ , \ 0,08 + 2,33 \cdot \sqrt{\frac{0,08 \cdot 0,92}{400}}\right) =$$

$$= (0,0484 \ , \ 0,1116)$$

Solución: el intervalo de confianza al 98 % para la proporción poblacional de artículos defectuosos es de entre el 4,84 % y el 11,16 %.

b) Obtener un intervalo de menor amplitud sin cambiar la confianza

Para reducir la amplitud del intervalo manteniendo el mismo nivel de confianza, se debe aumentar el tamaño de la muestra n. El margen de error es inversamente proporcional a $\sqrt{n}$; al aumentar n, el error estándar disminuye y, por tanto, el intervalo se estrecha.

c) Contraste de la afirmación (6 % defectuosos) con confianza del 95 %

Para el nivel de confianza del 95 %: $z = 1{,}96$, el error estándar es el mismo (pues la muestra no

$$\left(p - Z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}, p + Z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}\right) = \left(0{,}08 - 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}08 \cdot 0{,}92}{400}} \;\; , \;\; 0{,}08 + 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}08 \cdot 0{,}92}{400}}\right) =$$

$$= (0{,}0534 \;\; , \;\; 0{,}1066)$$

La afirmación del fabricante es $p = 0{,}06$. Como 0,06 se encuentra dentro del intervalo $(0{,}0534 \;\; , \;\; 0{,}1066)$, se puede aceptar la afirmación con un nivel de confianza del 95 %.

Problema 2 (Intención de voto)

- $n = 500,\ x = 275$ y $p = \dfrac{275}{500} = 0{,}55$
- Nivel de confianza $1 - \alpha =$ 95 % $\Rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}96$

a) Intervalo de confianza al 95 %

$$\left(p - Z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}, p + Z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}\right) = \left(0{,}55 - 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}55 \cdot 0{,}45}{500}} \;\; , \;\; 0{,}55 + 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}55 \cdot 0{,}45}{500}}\right) =$$

$$= (0{,}5064 \;\; , \;\; 0{,}5936)$$

b) Reducción de la amplitud

Sin modificar el nivel de confianza, la única forma de reducir la amplitud (longitud del intervalo) es aumentar el tamaño de la muestra.

c) Contraste de la afirmación (60 % de votos) con confianza del 99 %

Nivel de confianza 99 % $\Rightarrow 1 - \alpha = 99\ \% = 0{,}99 \Rightarrow \alpha = 1 - 0{,}99 = 0{,}01 \Rightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0{,}005$

$$P\left(Z < z_{\alpha/2}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - 0{,}005 = 0{,}995 \Rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{2{,}57 + 2{,}58}{2} = 2{,}575$$

Intervalo de confianza:

$$\left(p - Z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}, p + Z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}\right) = \left(0{,}55 - 2{,}575 \cdot \sqrt{\frac{0{,}55 \cdot 0{,}45}{500}} \;\; , \;\; 0{,}55 + 2{,}575 \cdot \sqrt{\frac{0{,}55 \cdot 0{,}45}{500}}\right) =$$

$$= (0{,}4927 \;\; , \;\; 0{,}6073)$$

Como $p = 0{,}60 \in (0{,}5042 \;\; , \;\; 0{,}5957)$, la afirmación se puede aceptar con un nivel de confianza del 99 %.

Problema 3 (Aprobados en una asignatura)

- $n = 200,\ x = 140$ y $p = \dfrac{140}{200} = 0{,}70$
- Nivel de confianza 97 % $\Rightarrow \alpha = 0{,}03 \Rightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0{,}015 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2{,}17$

a) Intervalo de confianza al 97 %

$$\left(p - Z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}, p + Z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}\right) = \left(0{,}70 - 2{,}17 \cdot \sqrt{\frac{0{,}70 \cdot 0{,}30}{200}} \;\; , \;\; 0{,}70 + 2{,}17 \cdot \sqrt{\frac{0{,}70 \cdot 0{,}30}{200}}\right) =$$

$$=\left(0,6297\ \ ,\ \ 0,7703\right)$$

b) Reducción de la amplitud
Aumentando el tamaño de la muestra n se consigue un intervalo más estrecho con la misma confianza.

c) Contraste de la afirmación (75 % aprobados) con un nivel de confianza del 95 %:

$$¿\,p=0,75\in IC_{95\,\%}\,?$$

Nivel de confianza $1-\alpha=$ 95 % $\Rightarrow z_{\alpha/2}=1,96$

Intervalo de confianza:

$$\left(p-Z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{p\cdot q}{n}},p+Z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{p\cdot q}{n}}\right)=\left(0,70-1,96\cdot\sqrt{\frac{0,70\cdot 0,30}{200}}\ \ ,\ \ 0,70+1,96\cdot\sqrt{\frac{0,70\cdot 0,30}{200}}\right)=$$

$$=\left(0,6365\ \ ,\ \ 0,7635\right)$$

Como se tiene que $p=0,75\in\left(0,6365\ \ ,\ \ 0,7635\right)$, se puede aceptar la afirmación con un 95 % de confianza.

Problema 4 (Efectividad de un tratamiento)

- $n=150,\ x=120$ y $p=\dfrac{120}{150}=0,80$
- Nivel de confianza del 99 %$\Rightarrow z_{\alpha/2}=2,575$

a) Intervalo de confianza al 99 %

$$\left(p-Z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{p\cdot q}{n}},p+Z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{p\cdot q}{n}}\right)=\left(0,80-2,575\cdot\sqrt{\frac{0,80\cdot 0,20}{150}}\ \ ,\ \ 0,80+2,575\cdot\sqrt{\frac{0,80\cdot 0,20}{150}}\right)=$$

$$=\left(0,7159\ \ ,\ \ 0,8841\right)$$

b) Reducción de la amplitud
Para obtener un intervalo más preciso sin alterar la confianza, se debe aumentar el tamaño de la muestra.

c) Contraste de la afirmación (85 % de efectividad) con confianza del 90 %
Nivel de confianza:

$$1-\alpha=90\ \%=0,90\Rightarrow\alpha=1-0,90=0,10\Rightarrow\frac{\alpha}{2}=0,05\Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z<z_{\alpha/2}\right)=1-\frac{\alpha}{2}=1-0,05=0,95\Rightarrow z_{\alpha/2}=1,645$$

Intervalo de confianza:

$$\left(p-Z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{p\cdot q}{n}},p+Z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{p\cdot q}{n}}\right)=\left(0,80-1,645\cdot\sqrt{\frac{0,80\cdot 0,20}{150}}\ \ ,\ \ 0,80+1,645\cdot\sqrt{\frac{0,80\cdot 0,20}{150}}\right)=$$

$$=\left(0,7463\ \ ,\ \ 0,8537\right)$$

La afirmación $p=0,85\in\left(0,7463\ \ ,\ \ 0,8537\right)$ y, por tanto, se puede aceptar con un nivel de confianza del 90 %.