

Unidad 5.2: CÓNICAS

Contenido

1. CONCEPTO DE LUGAR GEOMÉTRICO	1
1.1. Regla para hallar la ecuación de un lugar geométrico	2
1.2. Mediatriz de un segmento	2
1.3. Bisectrices de un ángulo	2
2. LAS CÓNICAS COMO SECCIONES PLANAS DE UNA SUPERFICIE CÓNICA	3
2.1. Superficie cónica de revolución	3
2.2. Secciones planas de una superficie cónica.....	4
3. LA CIRCUNFERENCIA.....	5
3.1. Ecuaciones de la circunferencia	5
3.2. Intersección de una circunferencia y una recta	6
3.3. Potencia de un punto respecto de una circunferencia	6
3.4. Eje radical de dos circunferencias.....	7
3.5. Intersección de dos circunferencias	7
3.6. Centro radical de tres circunferencias	7
4. LA ELIPSE	7
4.1. Elementos.....	8
4.2. Ecuación de la elipse.....	8
4.3. Intersección de una elipse y una recta.....	9
5. LA HIPÉRBOLA.....	10
5.1. Elementos.....	10
5.2. Ecuación de la hipérbola	11
5.3. Intersección de una hipérbola y una recta.....	11
5.4. Hipérbola equilátera. asíntotas. ecuación referida a sus asíntotas	12
6. LA PARÁBOLA.....	14
6.1. Elementos.....	14
6.2. Ecuación de la parábola	14
6.3. Intersección de una parábola y una recta	16
7. LAS ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO HOMOGÉNEAS Y LAS CÓNICAS	17
8. PROPIEDADES Y CURIOSIDADES SOBRE LAS CÓNICAS	17

1. CONCEPTO DE LUGAR GEOMÉTRICO

El **lugar geométrico** definido por una cierta propiedad es el conjunto de puntos del plano que verifican esa propiedad.

Ejemplo:

Una recta es el lugar geométrico de los puntos del plano alineados con un punto dado y con una dirección dada.

Determinar un lugar geométrico equivale a determinar un conjunto de puntos que cumplen una propiedad característica.

Si L es un lugar geométrico definido por la propiedad p , se verifica que:

- a) Todo punto de L posee la propiedad p .
- b) Todo punto que posee la propiedad p pertenece a L .

La condición b) puede sustituirse por la siguiente:

- c) Todo punto no perteneciente a L no posee la propiedad p .

Si un punto $P(x, y)$ pertenece a un lugar geométrico L , la condición que debe cumplir dicho punto P conduce a una ecuación entre las variables x e y que es la llamada **ecuación del lugar geométrico L** .

1.1. Regla para hallar la ecuación de un lugar geométrico

Para hallar la ecuación de un lugar geométrico se suelen realizar los siguientes pasos:

- a) Se toma un punto cualquiera $P(x, y)$ del lugar geométrico, al que se acostumbra a llamar **punto genérico**.
- b) Se expresa teóricamente la propiedad que determina el lugar geométrico.
- c) Se sustituye esta ecuación por su expresión analítica.
- d) Se simplifica esta ecuación hasta obtener la expresión más sencilla posible.

1.2. Mediatriz de un segmento

La **mediatriz de un segmento \overline{AB}** es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de los extremos del segmento, es decir, es la recta perpendicular a \overline{AB} y que pasa por su punto medio.

Ejercicio 1. ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de los vértices de un triángulo?

Ejercicio 2. Si $A(3,5)$ y $B(7,3)$, obtener la mediatriz del segmento \overline{AB} por dos procedimientos distintos:

- a) Mediante condiciones de perpendicularidad.
- b) Tomando un punto genérico $P(x, y)$ y desarrollando la expresión $d(P, A) = d(P, B)$.

1.3. Bisectrices de un ángulo

Sean

$$r \equiv Ax + By + C = 0 \quad \text{y} \quad r' \equiv A'x + B'y + C' = 0$$

dos rectas no paralelas.

El lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de las rectas r y r' está formado por dos rectas perpendiculares entre sí que se cortan en el mismo punto que r y r' . Son las bisectrices de los cuatro ángulos determinados por dichas rectas.

Siendo $P(x, y)$ es un punto de dicho lugar geométrico. Se tiene que $d(P, r) = d(P, r')$, luego:

$$\left| \frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right| = \left| \frac{A'x + B'y + C'}{\sqrt{A'^2 + B'^2}} \right| \quad \text{o, lo que es lo mismo, } (x, y) \text{ ha de hacer cierta al menos una de}$$

las dos siguientes igualdades que son las bisectrices de r y r' :

$$b_1 = \frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{A'x + B'y + C'}{\sqrt{A'^2 + B'^2}}$$

$$b_2 = \frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{-A'x - B'y - C'}{\sqrt{A'^2 + B'^2}}$$

Ejercicio 3. Determina el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los ejes de coordenadas.

Ejercicio 4. Dadas las rectas $r \equiv 8x - 6y + 2 = 0$ y $s \equiv 3x + 4y - 11 = 0$. Calcula las bisectrices de los cuatro ángulos que forman r y s . Comprueba que b_1 y b_2 son perpendiculares. Comprueba que b_1 y b_2 se cortan en el mismo punto que r y s .

Ejercicio 5. Halla el lugar geométrico de los puntos del plano tales que:

- Su distancia al eje de abscisas es 3.
- Su distancia al eje de ordenadas es 5.
- Su distancia a la recta $3x + 4y - 3 = 0$ es 2.
- Su distancia al punto $A(1,1)$ es igual a su distancia a la recta $x - y = 3$.
- Su distancia a la recta $x - y = 0$ es doble que su distancia a la recta $y = 0$.
- Su distancia al punto $A(2,0)$ es doble que al punto $B(5,3)$.
- Equidistan del punto $A(5,0)$ y de la bisectriz del primer cuadrante.

2.LAS CÓNICAS COMO SECCIONES PLANAS DE UNA SUPERFICIE CÓNICA

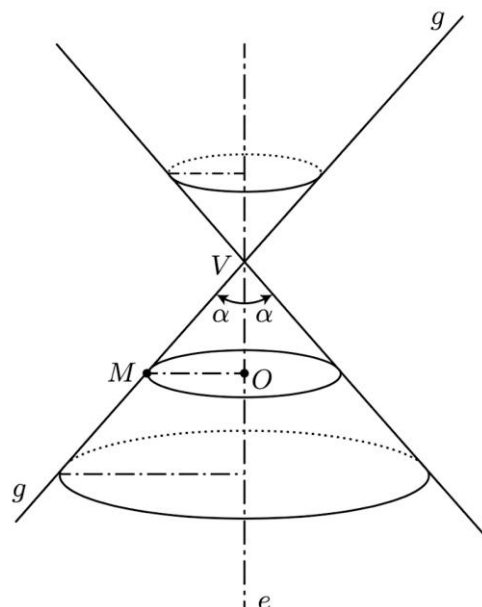
2.1. Superficie cónica de revolución

Una **superficie cónica de revolución** es la engendrada por una recta g al girar alrededor de una recta fija e que la corta en un punto V , llamado **vértice** de la superficie cónica.

La recta fija e se llama **eje**, y la g , **generatriz** de la superficie cónica. Las distintas posiciones que toma la recta g durante el giro se llaman generatrices de dicha superficie. Todas las generatrices forman con el eje un ángulo constante α que se llama **semiángulo** en el vértice.

La superficie cónica se compone de dos hojas separadas por el vértice. Cuando se considera una sola de dichas hojas se dice que la superficie cónica es **simple**.

Cada punto M de la generatriz describe una circunferencia situada en un plano perpendicular al eje y cuyo centro está en el eje. Dichas circunferencias se llaman **paralelos** de la superficie cónica.



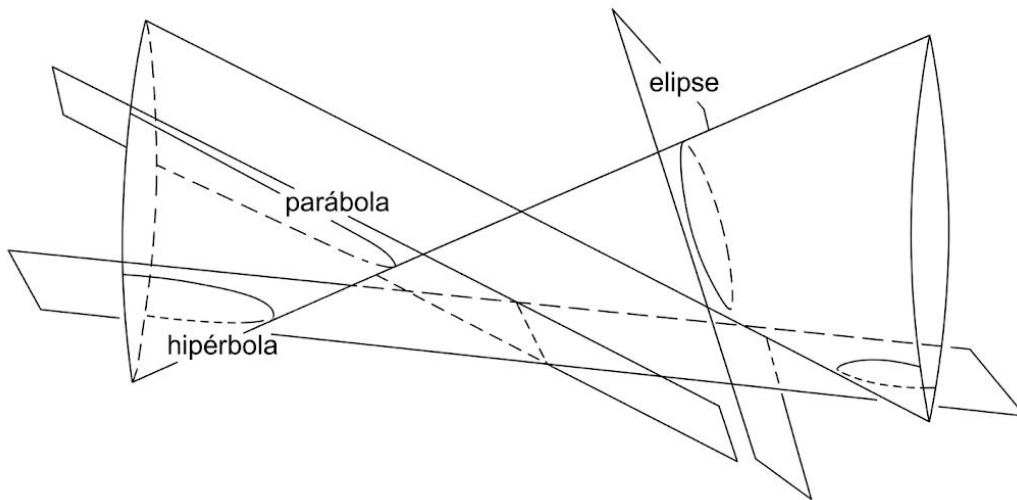
Los planos que pasan por el eje se llaman **meridianos** de la superficie cónica de revolución y la cortan según sus generatrices que forman el ángulo 2α , esto es, el doble del semiángulo en el vértice.

2.2. Secciones planas de una superficie cónica

Dada una superficie cónica y un plano π cualquiera, determinemos, según la posición de π , los puntos comunes al plano π y a la superficie cónica, es decir, la intersección de ambos.

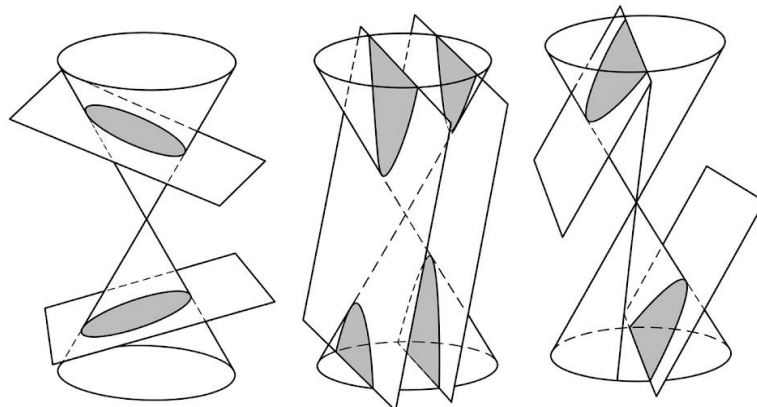
a) Si el plano π pasa por el vértice V y forma con el eje un ángulo:

- Mayor que α : la intersección es solamente el **punto V**.
- Igual a α : se dice que π es tangente a la superficie cónica, la intersección es **una generatriz**.
- Menor que α : la intersección son **dos generatrices**.



b) Si el plano π no pasa por el vértice V y:

- Es perpendicular al eje, la intersección es una **circunferencia** con centro sobre el eje e .
- Es oblicuo al eje y corta a todas las generatrices en una de las hojas, la intersección es una **elipse**.
- Es oblicuo al eje y paralelo a una generatriz, la intersección es una **parábola**.
- Es oblicuo al eje y corta a una parte de las generatrices en una de las hojas y al resto en la otra hoja, la intersección es una **hipérbola**.



Las cónicas tienen múltiples aplicaciones en las ciencias:

- Las trayectorias de los electrones en torno al núcleo del átomo son elipses.

- Las trayectorias de los planetas alrededor del Sol son elipses.
- La trayectoria de un proyectil lanzado horizontalmente desde una altura dada, es parabólica.

Apolonio de Pérgamo, geómetra griego del siglo III a. C., estudió por primera vez este tipo de curvas.

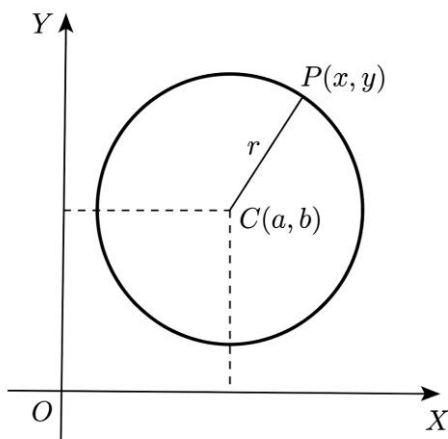
Un gran número de propiedades geométricas hacen de las cónicas un instrumento adecuado para distintas aplicaciones prácticas.

3. LA CIRCUNFERENCIA

La **circunferencia** es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado **centro**.

Llamamos **radio** de la circunferencia a la distancia de un punto cualquiera de dicha circunferencia al centro.

3.1. Ecuaciones de la circunferencia



Para que un punto $P(x, y)$ pertenezca a la circunferencia se tiene que verificar:

$$d(P, C) = r \Leftrightarrow \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$$

Elevando al cuadrado dicha igualdad resulta:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

que es la **ecuación de la circunferencia de centro $C(a, b)$ y radio r** .

Desarrollando:

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = r^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$$

Llamando $A = -2a$; $B = -2b$ y $C = a^2 + b^2 - r^2$, resulta la

ecuación:

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

que recibe el nombre de **ecuación general de la circunferencia**.

Para que la expresión $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ sea la ecuación de una circunferencia se tiene que

verificar que $A^2 + B^2 - 4C > 0$, en cuyo caso, su centro es $C\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$ y su radio $r = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4C}}{2}$.

Cuando el centro $C(a, b)$ es el origen de coordenadas, se obtiene la **ecuación reducida** de la circunferencia:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Ejercicio 6: Halla la ecuación de la circunferencia, en los siguientes casos:

- Pasa por el punto $(3, 2)$ y tiene su centro en el origen de coordenadas.
- Su diámetro es el segmento de extremos $(2, 3)$ y $(-2, -3)$.
- Pasa por los puntos $P(0, -3)$, $Q(5, 3)$ y $R(-2, -3)$.

Ejercicio 7: Calcula el centro y el radio de la circunferencia $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$.

Ejercicio 8: Estudia si la ecuación $2x^2 + 2y^2 - 8x - 4y - 6 = 0$ representa una circunferencia.

3.2. Intersección de una circunferencia y una recta

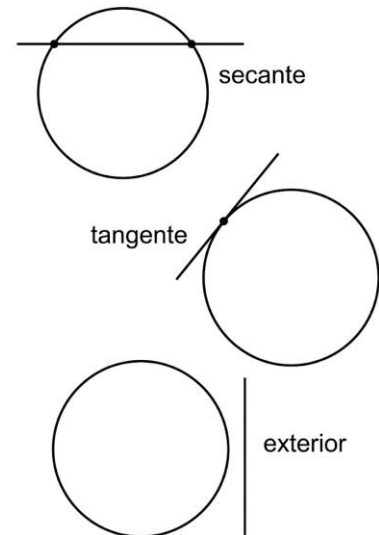
¿Qué posiciones pueden adoptar en el plano una recta y una circunferencia?

Por geometría elemental la recta con respecto a la circunferencia puede ser:

Secante. Si tiene dos puntos comunes con la circunferencia.

Tangente. Si tiene un punto común con la circunferencia.

Exterior. Si no tiene ningún punto común con la circunferencia.



Ejercicio 9: Halla la posición relativa de la recta $x - y + 5 = 0$ respecto de las circunferencias:

- a) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$
- b) $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 29 = 0$
- c) $(x - 1)^2 + y^2 = 25$
- d) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 16$

3.3. Potencia de un punto respecto de una circunferencia

Si desde un punto P del plano se trazan dos rectas secantes a una circunferencia se obtienen los puntos M, N, M' y N' .

Como los triángulos MPN' y $M'PN$ son semejantes por tener los ángulos iguales entre sí, los lados son proporcionales:

$$\frac{\overline{PM}}{\overline{PM'}} = \frac{\overline{PN'}}{\overline{PN}} \Rightarrow \overline{PM} \cdot \overline{PN} = \overline{PM'} \cdot \overline{PN'}$$

Este producto es constante e independiente de cuál sea la recta trazada desde P .

La **potencia de un punto P respecto de una circunferencia** es el producto escalar siguiente:

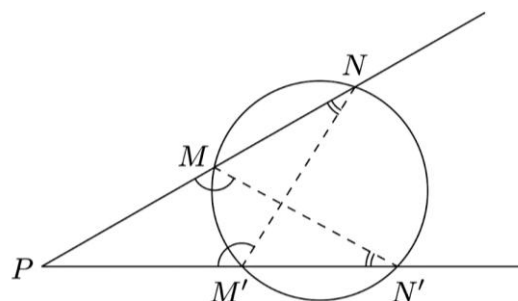
$$Pot_C(P) = \overline{PM} \cdot \overline{PN}$$

donde M y N son los puntos de la circunferencia que una recta secante que pasa por P .

Geoméricamente: $Pot_C(P)$ es el cuadrado de la distancia del punto P al punto de contacto M de la tangente trazada por P .

$$Pot_C(P) = (p_1 - a)^2 + (p_2 - b)^2 - r^2$$

$$Pot_C(P) = p_1^2 + p_2^2 + Ap_1 + Bp_2 + C$$



Es decir, la $Pot_C(P)$ se obtiene sustituyendo las coordenadas del punto P en la ecuación de la circunferencia.

Si llamamos $d = d(P, C)$, se tiene que $Pot_C(P) = d^2 - r^2$ y como consecuencia resulta:

$$Pot_C(P) \begin{cases} > 0 \Rightarrow d^2 > r^2 \Rightarrow d > r \Rightarrow P \text{ es exterior a la circunferencia} \\ = 0 \Rightarrow d^2 = r^2 \Rightarrow d = r \Rightarrow P \text{ es un punto de la circunferencia} \\ < 0 \Rightarrow d^2 < r^2 \Rightarrow d < r \Rightarrow P \text{ es interior a la circunferencia} \end{cases}$$

Ejercicio 10: Dados los puntos $P(2, 5)$, $Q(1, -2)$ y $R(2, -4)$, halla su potencia y posición relativa respecto de la circunferencia $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$.

3.4. Eje radical de dos circunferencias

Es el lugar geométrico de los puntos del plano que tienen igual potencia respecto de las dos circunferencias.

Ecuación del eje radical de C_1 y C_2 es:

$$(A - A')x + (B - B')y + (C - C') = 0$$

Ejercicio 11: Dadas las circunferencias

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0 \text{ y } x^2 + y^2 - 4x + 2y - 11 = 0$$

halla:

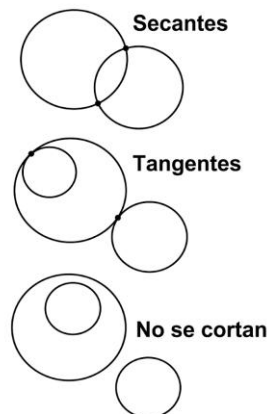
- Su eje radical
- El punto del eje OX que tiene la misma potencia respecto de las dos circunferencias

3.5. Intersección de dos circunferencias

¿Qué posiciones pueden adoptar en el plano dos circunferencias? Por geometría elemental pueden:

- Ser **secantes**. Si tienen dos puntos comunes.
- Ser **tangentes**. Si tienen un punto común.
- No cortarse**. Si no tienen puntos comunes.

Para detectar cada caso basta resolver el sistema de segundo grado que forman la ecuación de una de las dos circunferencias y el eje radical de ambas.

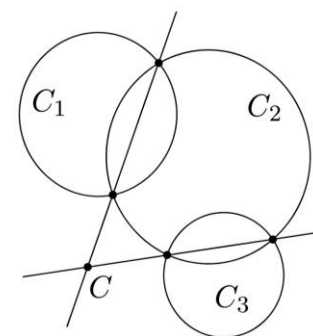


Ejercicio 12: Estudia la posición relativa de todas las parejas de circunferencias del ejercicio número 9.

3.6. Centro radical de tres circunferencias

Es el punto del plano que tiene igual potencia respecto de las tres circunferencias.

Si existe, se obtiene como intersección de los ejes radicales de cada dos circunferencias.



4. LA ELIPSE

La **elipse** es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos llamados **focos** es constante.

Ejemplos:

- Las trayectorias de los electrones en torno al núcleo del átomo son elipses.
- Las trayectorias de los planetas alrededor del Sol son elipses.
- El corte oblicuo de un salchichón es una elipse.
- La curva superior de la mayoría de las latas de conserva es una elipse.
- El borde superior del líquido de una cazuela inclinada es una elipse.

4.1. Elementos

Focos. Puntos fijos F y F' .

Eje focal. Recta que pasa por los focos.

Eje secundario. Mediatriz del segmento $\overline{F'F}$.

Centro. Punto medio del segmento $\overline{F'F}$.

Radio vector de P . Los segmentos \overline{PF} y $\overline{P'F}$.

Distancia focal: $\overline{F'F} = 2c$.

Eje mayor. Longitud del segmento $\overline{A'A} = 2a$.

Semieje mayor: $\overline{OA} = a$

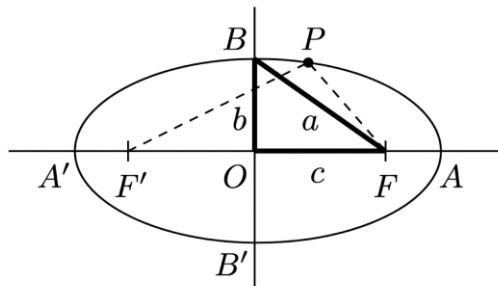
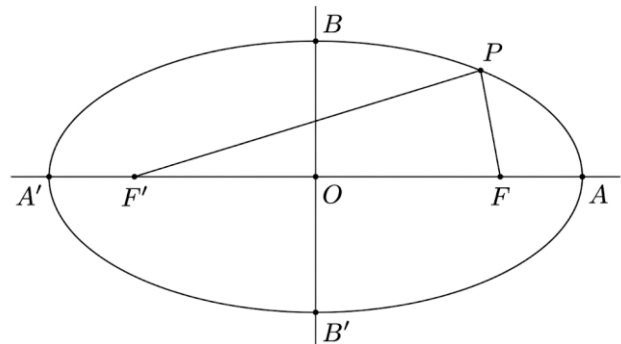
Eje menor. Longitud del segmento $\overline{B'B} = 2b$.

Semieje menor: $\overline{OB} = b$.

Vértices. Puntos de intersección de la elipse con los ejes: A, A', B, B' .

Excentricidad. Número que mide el achatamiento de la elipse. Se define: $e = \frac{c}{a}$ con $c < a$.

Relación entre las constantes a, b y c: $b^2 + c^2 = a^2$.



4.2. Ecuación de la elipse

PRIMER CASO. El centro es $(0,0)$, el eje focal el eje de abscisas, $A(a,0), A'(-a,0), B(0,b), B'(0,-b), F(c,0), F'(-c,0)$. Sea $P(x, y)$ un punto de la elipse. Por la definición, se cumple:

$$\overline{PF} + \overline{P'F} = 2a \Leftrightarrow \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

Haciendo operaciones se llega a la expresión:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

que es la **ecuación reducida o canónica de la elipse**.

Ejercicio 13: Escribe la ecuación de la elipse de focos $F(2,0)$ y $F'(-2,0)$ y de eje mayor 6.

Ejercicio 14: ¿Qué ocurre en una elipse cuando $a = b$?

Ejercicio 15: Calcula: a , b , c y e en la elipse $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Ejercicio 16: Escribe la ecuación de la elipse de eje mayor 16 y excentricidad $\frac{1}{4}$.

SEGUNDO CASO: El centro es (h, k) y sus ejes son paralelos a OX y OY . Para obtener la ecuación reducida de esta elipse basta con trasladar la elipse de centro el origen de coordenadas:

$$\boxed{\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1}$$

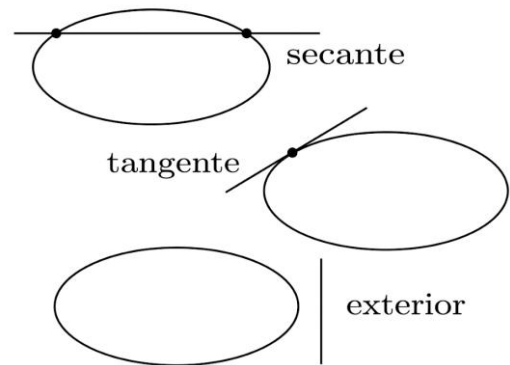
Ejercicio 17: El centro de una elipse es el punto $(2, -3)$ y el vértice y el foco a un mismo lado del centro son los puntos $(-3, -3)$ y $(-2, -3)$, respectivamente. Halla la ecuación de la elipse, su excentricidad y la longitud del eje menor.

Ejercicio 18: Reduce la ecuación $x^2 + 4y^2 - 6x + 16y + 21 = 0$ a forma canónica y determina las coordenadas del centro, vértices y focos.

4.3. Intersección de una elipse y una recta

¿Qué posiciones pueden adoptar en el plano una recta y una elipse? Por geometría elemental la recta puede ser:

- **Secante**. Si tiene dos puntos comunes con la elipse.
- **Tangente**. Si tiene un punto común con la elipse.
- **Exterior**. Si no tiene ningún punto común con la elipse.



Para detectar cada caso basta resolver el sistema de segundo grado que forman las ecuaciones de la recta y de la elipse.

Ejercicio 19: Calcula la intersección de la recta $x - y - 1 = 0$ y la elipse $2x^2 + 3y^2 = 11$.

Ejercicio 20: Calcula la intersección de la recta $x - 2y - 3 = 0$ y la elipse $x^2 + 2y^2 = 3$.

Ejercicio 21: Calcula la intersección de la recta $x = 4$ y la elipse $4x^2 + 9y^2 = 36$.

Ejercicio 22: Calcula la ecuación de la elipse en cada caso, sabiendo que:

- a) $a = 5$ y $c = 3$.
- b) $c = 3$ y $b = 4$.
- c) $2c = 12$ y $e = \frac{3}{4}$.
- d) Pasa por el punto $P(6,4)$ y $2a = 18$.
- e) Pasa por el punto $P(2,1)$ y $2b = 4$.
- f) Pasa por el punto $P(4,3)$ y $2c = 10$.
- g) El área del rectángulo circunscrito es 80 y $2c = 8\sqrt{6}$.
- h) Un vértice dista 8 de un foco y 18 del otro.

i) Un punto P suyo dista 2 y 6 de los focos respectivamente y $2c = 4$.

Ejercicio 23: El punto $P(5, \frac{5\sqrt{3}}{2})$, ¿pertenece a la elipse de $a = 10$ y $b = 5$?

5. LA HIPÉRBOLA

La **hipérbola** es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya diferencia de distancias, en valor absoluto, a dos puntos fijos llamados **focos** es constante.

Ejemplo:

La ley de Boyle Mariotte (A temperatura constante, el volumen de un gas es inversamente proporcional a la presión que soporta:

$$P \cdot V = \text{cte (para } T = \text{cte)}$$

queda bien descrita por una hipérbola.

5.1. Elementos

Focos. Puntos fijos F y F' .

Eje focal. Recta que pasa por los focos.

Eje imaginario. Mediatriz del segmento $\overline{F'F}$

Centro. Punto medio del segmento $\overline{F'F}$

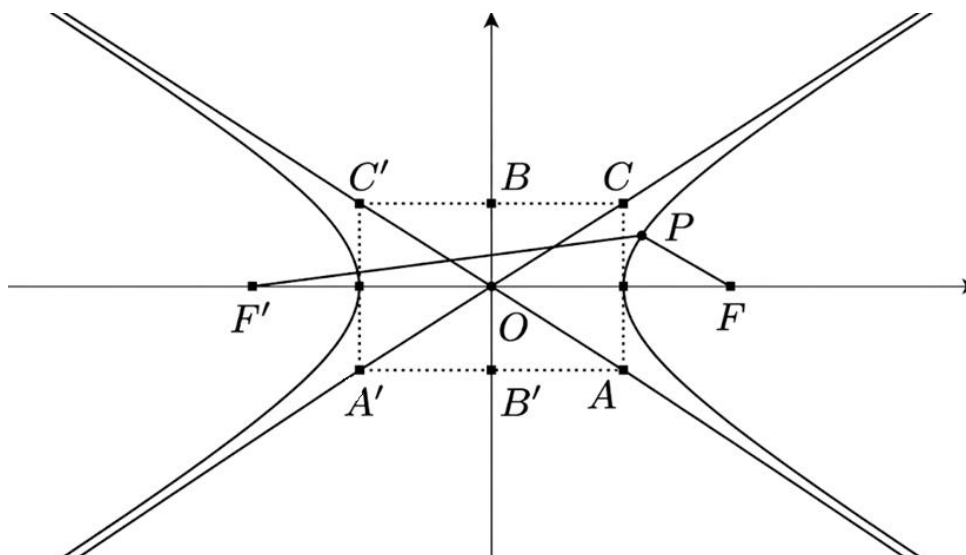
Radios vectores de P . Los segmentos \overline{PF} y $\overline{P'F}$

Distancia focal: $\overline{F'F} = 2c$

Eje mayor. Longitud del segmento $\overline{A'A} = 2a$

Semieje mayor: $\overline{OA} = a$

Eje menor. Es la longitud del segmento $\overline{B'B} = 2b$



Semieje menor: $\overline{OB} = b$

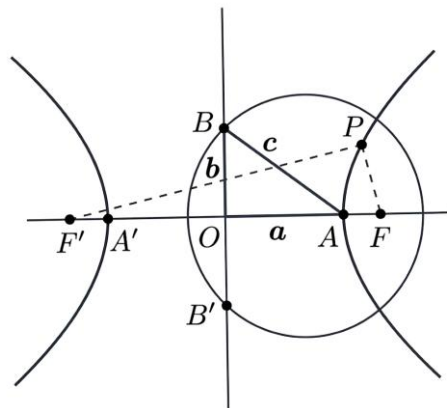
Vértices. Puntos A , A' , B y B' . Puntos medios de los lados del rectángulo fundamental.

Excentricidad. Número que mide la abertura de las ramas. Se define: $e = \frac{c}{a}$ con $c > a$.

Rectángulo fundamental: Rectángulo de vértices C, C' y sus simétricos respecto al eje OX .

Asíntotas de la hipérbola. Diagonales del rectángulo fundamental. Las rectas OC y OC' .

Relación entre las constantes a, b y c : $a^2 + b^2 = c^2$



5.2. Ecuación de la hipérbola

PRIMER CASO. El centro de la hipérbola es $(0, 0)$, el eje focal el eje de abscisas, $A(a, 0), A'(-a, 0), B(0, b), B'(0, -b), F(c, 0), F'(-c, 0)$. Sea $P(x, y)$ un punto de la hipérbola. Por la definición se cumple:

$$\overline{PF} - \overline{P'F} = 2a \Rightarrow \left| \sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \right| = 2a$$

Haciendo operaciones se llega a la expresión:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

que es la **ecuación de la hipérbola**.

Ejercicio 24: Escribe la ecuación de la hipérbola de focos $F(5, 0)$ y $F'(-5, 0)$ y de eje mayor 8.

Ejercicio 25: Calcula: a, b, c y e en la hipérbola $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$.

SEGUNDO CASO: El centro es el punto (h, k) y sus ejes son paralelos a los ejes de coordenadas OX y OY . Trasladando la ecuación obtenida antes, resulta:

$$\boxed{\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1}$$

Ejercicio 26: Calcula la ecuación de la hipérbola de centro $C(3, 5)$, sabiendo que uno de sus focos es $(6, 5)$ y que su excentricidad vale 2.

Ejercicio 27: Reduce la ecuación $9x^2 - 16y^2 + 54x + 64y - 127 = 0$ a forma canónica y determina las coordenadas del centro, vértices y focos.

5.3. Intersección de una hipérbola y una recta

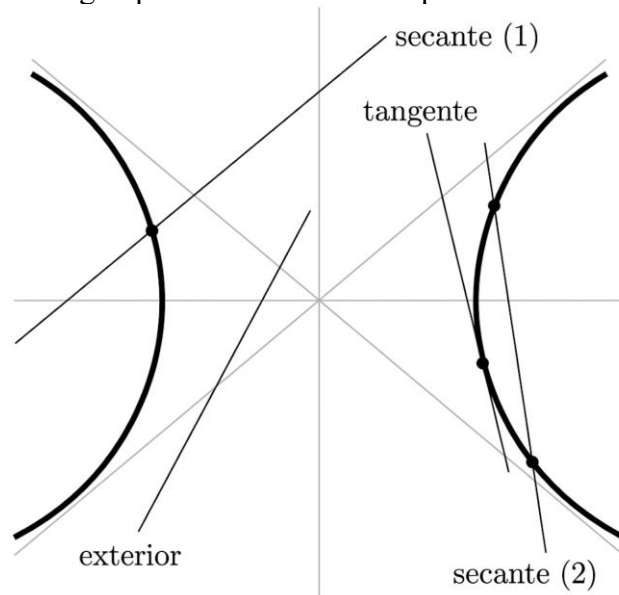
¿Qué posiciones pueden adoptar en el plano una recta y una hipérbola? Por geometría elemental la recta puede ser:

Secante (2). Tiene dos puntos comunes con la hipérbola.

Secante (1). Tiene un punto común con la hipérbola y la recta es paralela a alguna asíntota.

Tangente. Si tiene un punto común con la hipérbola y la recta no es paralela a ninguna asíntota.

Exterior. Si no tiene ningún punto común con la hipérbola.



Para detectar cada caso basta resolver el sistema de segundo grado que forman las ecuaciones de la recta y de la hipérbola.

Ejercicio 28: Calcula la intersección de la recta $x + y - 1 = 0$ y la hipérbola $x^2 - 2y^2 = 1$.

Ejercicio 29: Calcula la intersección de la recta $8x - 3y - 14 = 0$ y la hipérbola $4x^2 - y^2 = 28$.

Ejercicio 30: Calcula la intersección de la recta $3x - 4y + 2 = 0$ y la hipérbola $9x^2 - 16y^2 = 144$.

Ejercicio 31: Calcula la intersección de la recta $x = 2$ y la hipérbola $9x^2 - 16y^2 = 144$.

5.4. Hipérbola equilátera. asíntotas. ecuación referida a sus asíntotas

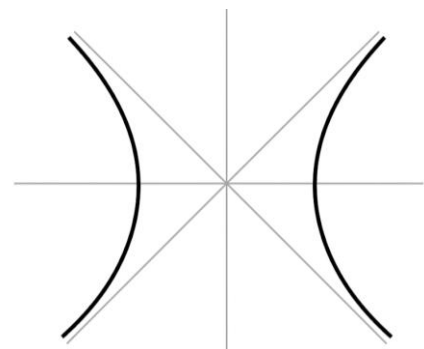
Una hipérbola es **equilátera** cuando $a = b$. Su ecuación es:

$$x^2 - y^2 = a^2$$

Su distancia focal: $c = a\sqrt{2}$

Su excentricidad: $e = \frac{c}{a} = \frac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2}$

Sus asíntotas: $y = x$, $y = -x$. Son las bisectrices de los cuadrantes.



Vamos a obtener la ecuación de la hipérbola referida a sus asíntotas, es decir, tomando como ejes de coordenadas las asíntotas y siendo el semieje de abscisas positivo la bisectriz del cuarto cuadrante.

Para ello giramos los ejes en el sentido de las agujas de un reloj hasta que el eje OX coincida con la bisectriz del cuarto cuadrante. Es decir: -45° .

Ahora: $F(a, a), F(-a, -a)$. Aplicando la definición de hipérbola, se tiene:

$$\overline{PF} - \overline{P'F} = 2a \Rightarrow \left| \sqrt{(x-a)^2 + (y-a)^2} - \sqrt{(x+a)^2 + (y+a)^2} \right| = 2a$$

Haciendo operaciones se llega a la expresión:

$$xy = \frac{a^2}{2} \quad \text{o} \quad xy = k$$

que es la ecuación de la **hipérbola equilátera, referida a sus asíntotas**.

Si $k > 0$, las ramas de la hipérbola están situadas en los cuadrantes primero y tercero y si $k < 0$, las ramas de la hipérbola están situadas en los cuadrantes segundo y cuarto.

Ejercicio 32: Calcula la ecuación referida a las asíntotas de la hipérbola $x^2 - y^2 = 4$.

Ejercicio 33: Calcula la ecuación referida a los ejes de la hipérbola $xy = 8$.

Ejercicio 34: Calcula los focos y los vértices de la hipérbola $x^2 - y^2 = 9$.

Ejercicio 35: Calcula los focos y los vértices de la hipérbola $xy = 6$.

Ejercicio 36: Calcula los focos y los vértices de la hipérbola $xy = 1$.

Ejercicio 37: Calcula la ecuación de la hipérbola en cada caso, sabiendo que:

- $a = 4$ y $c = 5$.
- Pasa por el punto $P(8,14)$ y $2a = 12$.
- $2a = 12$ y $e = \frac{4}{3}$.
- Pasa por los puntos $(5,0)$ y $(12,9)$.
- $b = 4$ y $e = 2$.
- $c = 6$ y $e = 2\sqrt{2}$.
- $F(4,0)$ y $A(2,0)$.
- Un foco dista 50 de un vértice y 2 del otro.
- $2c = 34$ y la distancia de un foco al vértice más próximo es 2.
- Es equilátera y pasa por el punto $P(2,1)$.
- Es equilátera y $2c = 24$.
- $2b = 8$ y sus asíntotas son $y = \pm \frac{2}{3}x$.

Ejercicio 38: Halla la intersección de la hipérbola $4x^2 - 9y^2 = 144$ y la recta $x - 3y + 5 = 0$.

Ejercicio 39: Determina m para que $mx^2 - 4y^2 = 9$ represente una hipérbola equilátera.

Ejercicio 40: ¿El punto $P(13,12)$ pertenece a la hipérbola equilátera de $2c = 10\sqrt{2}$?

Ejercicio 41: Halla las asíntotas de las hipérbolas:

a) $4x^2 - y^2 = 8$

b) $4x^2 - 5y^2 = 20$

c) $8x^2 - 6y^2 = 48$

Ejercicio 42: ¿Puede ser $a < b$ en una hipérbola? ¿Y $a > b$?

Ejercicio 43: ¿Cuál es la excentricidad de todas las hipérbolas equiláteras?

6. LA PARÁBOLA

La **parábola** es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado **foco** y de una recta fija llamada **directriz**.

Ejemplos:

- Son trayectorias parabólicas las que recorren los objetos al ser proyectados en un campo gravitatorio y que tienen por gráfica una parábola:
- Los tiros a canasta en el baloncesto.
- El lanzamiento de un proyectil lanzado horizontalmente desde una altura dada.
- El recorrido de un saltador de longitud.
- El salto del delfín.
- El recorrido de un chorro de agua que sale de una fuente.

6.1. Elementos

Foco. Es el punto fijo F .

Directriz. Es la recta fija d .

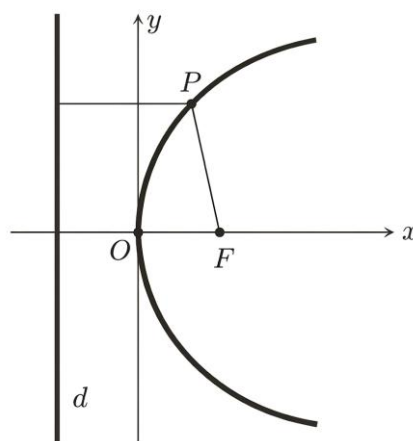
Parámetro. Distancia del foco a la directriz, se designa por la letra p .

Eje. Recta perpendicular a la directriz que pasa por el foco.

Vértice. Punto de intersección de la parábola con su eje.

Radio vector de un punto P de la parábola. Es el segmento \overline{PF} .

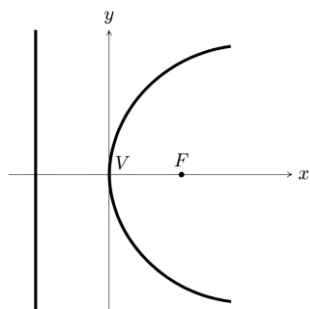
Cuerda focal. Segmento que une dos puntos de la parábola y que pasa por el foco.



6.2. Ecuación de la parábola

PRIMER CASO. El foco es $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ y la directriz $x = -\frac{p}{2}$. Sea $P(x, y)$ un punto de la parábola.

Por definición se cumple:



$$|\overline{FP}| = d(P, d) \Rightarrow \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2}$$

Haciendo operaciones se llega a la expresión:

$$\boxed{y^2 = 2px}$$

que es la **ecuación de la parábola** de foco $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ y directriz $x = -\frac{p}{2}$.

Tiene por vértice el punto $(0,0)$, su eje es el eje de abscisas y está **abierta para la derecha**.

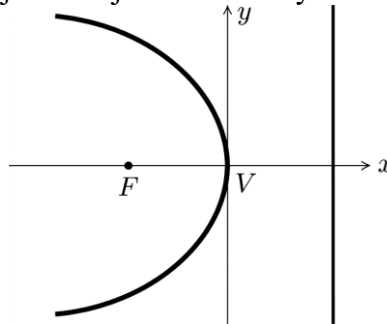
Ejercicio 44: Escribe la ecuación de la parábola de foco $F(2,0)$ y directriz $x = -2$.

Ejercicio 45: Calcula el foco y la directriz de la parábola: $y^2 = 12x$.

Si el foco es $F\left(-\frac{p}{2}, 0\right)$ y la directriz $x = \frac{p}{2}$. La ecuación de la parábola será:

$$y^2 = -2px$$

Tiene por vértice el punto $(0,0)$, su eje es el eje de abscisas y está **abierta para la izquierda**.



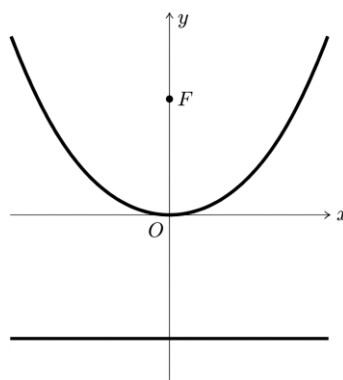
Ejercicio 46: Escribe la ecuación de la parábola de foco $F(-4,0)$ y directriz $x = 4$.

Ejercicio 47: Calcula el foco y la directriz de la parábola: $y^2 = -4x$.

SEGUNDO CASO. El foco es $F\left(0, \frac{p}{2}\right)$ y la directriz $y = -\frac{p}{2}$. La ecuación de la parábola sería:

$$x^2 = 2py$$

En ella: $F\left(0, \frac{p}{2}\right)$ y la directriz $y = -\frac{p}{2}$. Tiene por vértice el punto $(0,0)$, su eje es el eje de ordenadas y está **abierta hacia arriba**.



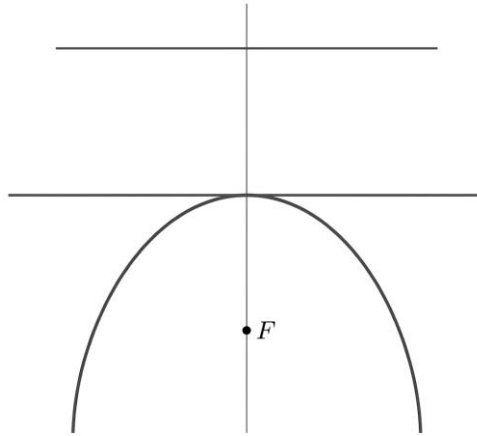
Ejercicio 48: Escribe la ecuación de la parábola de foco $F(0,3)$ y directriz $y = -3$.

Ejercicio 49: Calcula el foco y la directriz de la parábola: $x^2 = 20y$.

Si el foco es $F\left(0, -\frac{p}{2}\right)$ y la directriz $y = \frac{p}{2}$. La ecuación de la parábola será:

$$x^2 = -2py$$

Tiene por vértice el punto (0,0), su eje es el eje de ordenadas y está **abierta hacia abajo**.



Ejercicio 50: Escribe la ecuación de la parábola de foco $F(0,-2)$ y directriz $y = 2$.

Ejercicio 51: Calcula el foco y la directriz de la parábola: $x^2 = -28y$

6.3. Intersección de una parábola y una recta

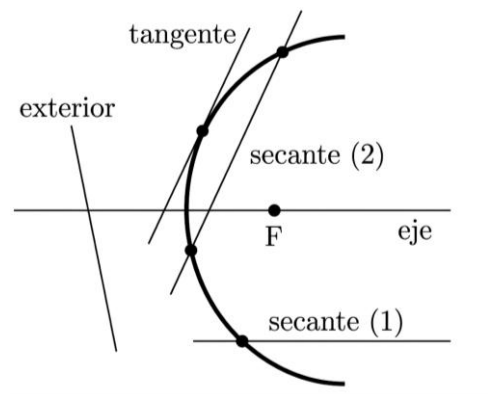
Por geometría elemental la recta puede ser:

Secante (2). Si tiene dos puntos comunes con la parábola.

Secante (1). Si tiene un punto común con la parábola y la recta es paralela al eje de la parábola.

Tangente. Si tiene un punto común con la parábola y la recta no es paralela al eje de la parábola.

Exterior. Si no tiene ningún punto común con la parábola.



Para detectar cada caso basta resolver el sistema de segundo grado que forman las ecuaciones de la recta y de la parábola.

Ejercicio 52: Calcula la intersección de la recta $x - 2y - 7 = 0$ con la parábola $x = y^2 + 4y + 4$.

Ejercicio 53: Calcula la intersección de la recta $4x - 3y + 1 = 0$ con la parábola $3y = 3x^2 + 10x + 4$.

Ejercicio 54: Calcula la intersección de la recta $y = 2x + 3$ y la parábola $y^2 = x$.

Ejercicio 55: Calcula la intersección de la recta $x = 3$ y la parábola $x^2 = y$.

Ejercicio 56: Representa las parábolas: a) $y = (x - 3)^2$; b) $y = (x - 3)^2 + 2$.

Ejercicio 57: Halla el valor de p de modo que la parábola $y^2 = 2px$ pase por el punto $P(3, -1)$.

Ejercicio 58: Calcula el eje, el vértice, el foco y la directriz de las parábolas:

a) $(x-7)^2 = 4(y+3)$ d) $(y-2)^2 = 4(x-1)$

b) $3y^2 + x = 0$ e) $(x-2)^2 = 2(y+1)$

c) $7x^2 = 3y$

7. LAS ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO HOMOGÉNEAS Y LAS CÓNICAS

Consideremos la ecuación de segundo grado homogénea en las variables (x, y) :

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

donde $A, B, C, D, E, F \in \mathbb{R}$. Se tiene la siguiente clasificación:

$$B^2 - 4AC \begin{cases} < 0 \Rightarrow \text{Elipse o un punto o vacía} \\ > 0 \Rightarrow \text{Hipérbola o una recta o dos rectas paralelas o vacía} \\ = 0 \Rightarrow \text{Parábola o dos rectas secantes} \end{cases}$$

8. PROPIEDADES Y CURIOSIDADES SOBRE LAS CÓNICAS

ILUMINACIÓN CON UNA LÁMPARA. El haz de luz que emite una lámpara con pantalla circular es un cono cuyo vértice está en el filamento de la bombilla.

Si se proyecta este haz sobre la pared de una habitación oscura, se apreciará una circunferencia, una elipse, una parábola o una rama de una hipérbola, según la inclinación con que se haga la proyección, pues, en definitiva, lo que se está haciendo es cortar un cono (el haz de luz de la lámpara) por un plano (la pared).

BILLARES ELÍPTICOS. Lewis Carroll el matemático autor de *Alicia en el País de las Maravillas*, se construyó una mesa de billar de forma elíptica.

En ella, si una bola pasa por un foco, sin efecto, pasará necesariamente por el otro después de rebotar. Y así, sucesivamente, hasta que se pare.

En Estados Unidos se comenzaron a vender mesas elípticas en 1964, un anuncio a toda plana en The New York Times del 1 de julio de 1964 hacía saber que al día siguiente sería presentado este juego por los famosos actores Joane Woodward y Paul Newman. El Eliptipool, nombre comercial de esta mesa, es un invento patentado por Arthur Frigo, de Torrington, Connecticut, que terminaba por entonces sus estudios en el Union College de Schenedacty.

En Inglaterra también existen billares elípticos y es de suponer que también los haya en España.



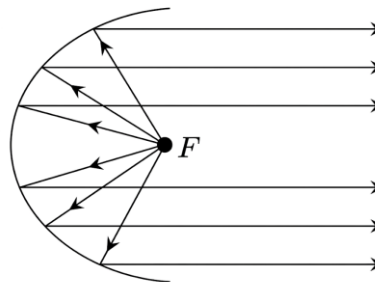
EN EL ANDÉN DEL METRO. A veces se produce el siguiente fenómeno: una persona oye hablar a otra persona con absoluta nitidez, pero no la encuentra cerca. Mirando a su alrededor, llega a descubrir que la voz procede de alguien que está en el andén de enfrente. Y no está hablando más fuerte que los demás.

Si la bóveda es elíptica, el sonido emitido desde un foco rebota en ella, dirigiéndose al otro foco.



PROPIEDAD DEL FOCO DE LA PARÁBOLA.

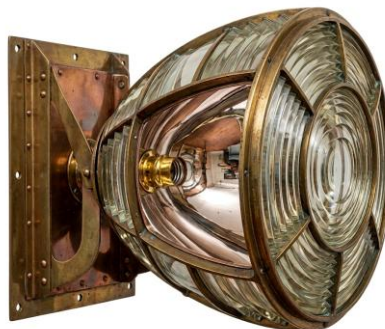
Debido a la propiedad de las normales, todo rayo luminoso que sale del foco de una parábola se refleja en ella con dirección paralela al eje.



Basándose en este hecho se construyen: estufas, linternas, flexos, faros de vehículos, etc.. En estos casos se consigue concentrar en un estrecho haz el calor de una resistencia, la luz de una bombilla, etc. Recíprocamente, los rayos que llegan paralelos al eje de la parábola, al reflejarse en ella, pasan todos por el foco.

En esta propiedad se basa la construcción de antenas parabólicas, radares aéreos, hornos solares, telescopios, etc. En estos casos se consigue atraer sobre un punto señales lejanas procedentes de satélites artificiales, rayos solares, etc.

El primer reflector parabólico para un faro de mar fue construido por William Hutchinson en 1752 y consistía en un conjunto de pequeños espejos planos adheridos a la parte cóncava de un soporte de yeso en forma de paraboloides de revolución.



Luego, se sustituyeron estos espejos por una chapa de cobre y plata batidos a mano y, hacia 1800, prácticamente todos los faros empleaban este tipo de reflector parabólico.

Aunque poco después, a partir de 1822, empezaron a ser sustituidos por un sistema de lentes ideado por Fresnel, sin embargo, la idea del reflector parabólico se implantó con éxito en el diseño de los faros de las bicicletas, de los automóviles y, general, de cualquier proyector que necesita concentrar la luz emitida desde una larga distancia (focos de seguimiento, proyectores de teatro, etc.).

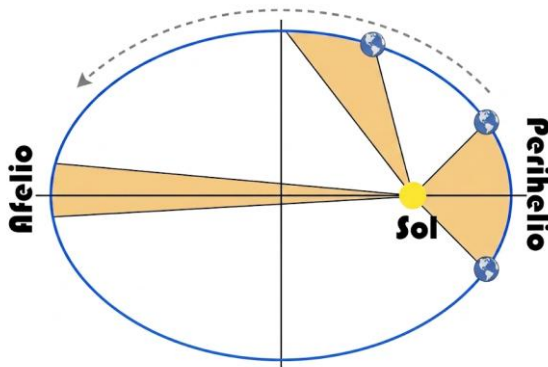
ÓRBITAS DE PLANETAS SATÉLITES Y COMETAS. Cuando en el siglo III antes de Cristo, **Apolonio** estudió las tres cónicas, estaba muy lejos de sospechar que dichas curvas se ajustaban a los movimientos de los cuerpos celestes. Durante muchos siglos se consideró que las órbitas de los planetas eran circulares con la Tierra como centro.

Estudiando las observaciones hechas durante mucho tiempo por **Tycho Brahe** sobre el movimiento del planeta Marte, **Kepler**, en 1610, descubrió que los planetas giran alrededor del Sol de modo que sus trayectorias son elipses y el Sol ocupa uno de los focos (el otro permanece vacío y no juega ningún papel en el movimiento de los planetas alrededor del Sol).

Las tres **leyes de Kepler** son:

1ª Ley: los planetas describen una órbita elíptica alrededor del Sol, encontrándose éste en uno de los focos de dicha elipse.

2ª Ley: al moverse el planeta en su órbita, el radio vector, segmento que une el planeta con el Sol, barre áreas iguales en tiempos iguales.



Planeta	Excentricidad
Mercurio	0.206
Venus	0.007
Tierra	0.017
Marte	0.093
Júpiter	0.049
Saturno	0.051
Urano	0.046
Neptuno	0.004
Plutón	0.246

3ª Ley: la relación que existe entre el radio medio de la órbita elevado al cubo y el período elevado al cuadrado es constante para todos los planetas.

Los cometas tienen órbitas elípticas más alargadas e, incluso, algunos de ellos, tienen órbitas hiperbólicas. A veces, si un cometa pasa, por ejemplo, muy cerca de Júpiter, éste, con su gravitación, modifica su órbita. Así, puede captar un cometa de órbita parabólica o hiperbólica convirtiéndola en elíptica o, por el contrario, hacer desaparecer el cometa del sistema solar, pues su órbita, antes elíptica, se transforma en parabólica o hiperbólica.