

Proporcionalidad numérica

Razones y proporciones

1. Averigua en cada caso si con las dos razones que se dan se puede formar una proporción:

a) $\frac{0,5}{1,1}$ y $\frac{5}{11}$ b) $\frac{8}{32}$ y $\frac{2}{8}$ c) $\frac{1,5}{6}$ y $\frac{0,5}{2}$ d) $\frac{35}{28}$ y $\frac{5}{4}$

2. Calcula el término desconocido x en cada una de las proporciones:

a) $\frac{8,1}{32} = \frac{2,2}{x}$ c) $\frac{5,2}{3,02} = \frac{x}{2,1}$ c) $\frac{3,1}{8,2} = \frac{x}{1,06}$ d) $\frac{10,2}{x} = \frac{3,3}{0,2}$

3. Completa las siguientes series de razones iguales, escribiendo dos razones más en cada una:

a) $\frac{1}{0,25} = \frac{2}{0,5} = \frac{3}{0,75} = \dots$ b) $\frac{8}{2} = \frac{12}{3} = \frac{16}{4} = \dots$

4. Calcula el cuarto proporcional en cada caso:

a) $\frac{4}{6} = \frac{8}{x}$ b) $\frac{3}{2} = \frac{1,5}{x}$ c) $\frac{3}{2,5} = \frac{60}{x}$ d) $\frac{6}{2,5} = \frac{30}{x}$

5. Calcula el medio proporcional¹ en cada caso:

a) $\frac{1}{x} = \frac{x}{25}$ b) $\frac{4}{x} = \frac{x}{25}$ c) $\frac{2}{x} = \frac{x}{200}$ d) $\frac{5}{x} = \frac{x}{125}$

Magnitudes proporcionales y no proporcionales

6. Indica los pares de magnitudes que son directamente proporcionales (D.P.), los que son inversamente proporcionales (I.P.) y los que no guardan relación de proporcionalidad (N.P.).

- a) El gasto de energía de una bombilla y el tiempo que está encendida.
- b) La velocidad de un tren y el tiempo que tarda en cubrir el trayecto entre dos ciudades.
- c) El número de asistentes a una excursión y la cantidad que aporta cada uno para pagar el autobús.
- d) El diámetro de la rueda de un coche y la velocidad que este alcanza.
- e) El precio de un coche y el número de asientos que lleva.
- f) La edad de un árbol y su altura.
- g) La cantidad de agua que arroja una fuente y el tiempo transcurrido en llenar un recipiente.
- h) El caudal de un grifo y el tiempo que tarda en llenar un cántaro.
- i) El coste de un bolígrafo y el tiempo que dura.
- j) El número de kilos vendidos y el dinero recaudado.
- k) El número de operarios que hacen un trabajo y el tiempo invertido en realizar dicho trabajo.
- l) La edad de una persona y su altura.
- m) La velocidad de un vehículo y la distancia recorrida en media hora.
- n) El tiempo que permanece abierto un grifo y la cantidad de agua que arroja.
- o) El caudal de un grifo y el tiempo que tarda en llenar un depósito.
- p) El número de páginas de un libro y su precio.

¹ Recuerda que la operación inversa del cuadrado es la raíz cuadrada, y que las raíces cuadradas solo tienen un valor.

Magnitudes directamente proporcionales**Ejemplo:**

Si un kg de uva roja cuesta 3,19 €, ¿cuánto pagaremos por 2,250 kg?

Recogemos los datos en una tabla:

Nº de kg	1	2,250
Precio (€)	3,19	x

Por una parte, tenemos en cuenta que, si compramos más kilos de uvas, el precio aumentará y lo hará en la misma proporción y, por otra, que, si es el doble de kilos (el triple...), pagaremos el doble (triple...). Así:

$$x = \frac{3,19 \cdot 2,250}{1} = 7,1775 \approx 7,18$$

esto es, por 2,250 kg pagaremos 7,18 €.

Definición:

Diremos que dos magnitudes A y B son **directamente proporcionales** cuando al multiplicar (dividir) la primera por un número, la segunda queda multiplicada (dividida) por ese mismo número.

¿Cómo comprobamos que dos magnitudes dadas en forma de tabla son directamente proporcionales?

Las magnitudes A y B

A	a	a'	...	a''
B	b	b'	...	b''

son **directamente proporcionales** cuando

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \dots = \frac{a''}{b''}$$

¿Cómo se calcula el término desconocido de una tabla de magnitudes directamente proporcionales?

A	a	a'
B	b	x

El término desconocido es x (también llamado *cuarto proporcional*). Para calcularlo, usamos lo visto anteriormente, es decir, los cocientes de las cantidades correspondientes tienen que ser iguales:

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{x}$$

de donde deducimos que

$$x = \frac{b \cdot a'}{a}$$

7. Determina en cada caso si las magnitudes que se nombran dependen habitualmente una de la otra y justifica tu respuesta:

- En una persona, la edad y la estatura.
- En una ciudad, el número de habitantes y el consumo de agua.
- En un país, número de coches y consumo de leche.

8. Indica si son magnitudes directamente proporcionales:

- El número de hojas de un libro y su peso.
- El lado de un cuadrado y su perímetro.

- 9.** Resuelve:
- a) Dos cajas de galletas cuestan 7,60 €. ¿Cuánto costarán tres cajas?
 - b) Doscientos gramos de mortadela cuestan 1,89 €. ¿Cuánto cuestan 300 gramos?
- 10.** Un empleado recibió la semana pasada 675 € por 5 horas extraordinarias de trabajo. ¿Cuánto recibirá esta semana por solo 3 horas?
- 11.** Un niño tarda 4 horas en hacer 36 problemas. ¿Cuántos problema resolverá en 7 horas?
- 12.** Un grifo llena un bidón de 420 litros en 6 minutos. ¿Cuál tiene que ser la capacidad del bidón, si tenemos abierto el grifo 15 minutos?
- 13.** Un empleado cobró la semana pasada 1280 € por mes (40 horas). ¿Cuánto cobrará un mes en el que solo trabaja 18 horas? ¿Y si trabaja 15 hora y media?
- 14.** En la oferta que nos hacen, el precio de las copias, en papel, de 36 fotografías es de 15,99 €. ¿Cuánto nos cuestan las copias en papel de 24 fotografías? ¿Cuál es el precio por copia según esa oferta?
- 15.** En una ciudad hay 4 hombres por cada 5 mujeres. Si el número total de mujeres es de 185 000, halla el número total de hombres que hay en la ciudad.
- 16.** En una fábrica en la que fabrican chips para automóviles, se han fabricado 5 880 chips en 21 días. Si se mantiene el ritmo de producción, ¿cuántos chips se fabricarán en los próximos 15 días?
- 17.** Una familia pagó 92,15 € por su consumo de luz durante el mes de enero. Si tiene una promoción en la que consumo diario es siempre el mismo, ¿cuánto pagó en febrero?
- 18.** Un lenguado de un kilo y doscientos gramos ha costado 14,40 €. ¿Cuánto costará otro lenguado de ochocientos gramos?
- 19.** Eva va 12 veces por semana en autobús y paga con un bonobús de 24,40 €, válido para 20 viajes.
- a) ¿Cuánto gasta por semana en autobús?
 - b) ¿Cuánto gasta anualmente en autobús?
 - c) ¿Cuál es el precio por viaje?
- 20.** En tecnología creativa hemos realizado el plano de una casa y el salón mide 10 cm de largo por 7 cm de ancho. Si en la realidad el largo es de 5 m, ¿cuál es la anchura del salón?
- 21.** Dos ciudades A y B separadas 185 km en la realidad, están a 35 cm de distancia en un plano. ¿Cuál será la distancia real entre otras dos ciudades M y N separadas 12 cm en el plano?
- 22.** Si yo trabajo 4 horas y mi compañero trabaja 3 horas, ¿cuánto debemos cobrar cada uno si nos han pagado 490 € entre los dos?

Magnitudes inversamente proporcionales**Ejemplo:**

Si una máquina asfalta la carretera entre Infantes y Cózar en 6 días, ¿cuánto tardarán en hacer el mismo trabajo dos máquinas?

Recogemos los datos en una tabla:

Nº de máquinas	1	2
Tiempo (días)	6	x

Por una parte, tenemos en cuenta que, si hay más máquinas trabajando, tardarán menos tiempo en hacer el trabajo y, por otra, que, si es el doble número de máquinas, realizarán el trabajo en la mitad de tiempo. Así:

$$x = \frac{1 \cdot 6}{2} = 3$$

esto es, dos máquinas tardarán 3 horas en asfaltar la carretera.

Definición:

Diremos que dos magnitudes A y B son ***inversamente proporcionales*** cuando al multiplicar (dividir) la primera por un número, la segunda queda dividida (multiplicada) por ese mismo número.

¿Cómo comprobamos que dos magnitudes dadas en forma de tabla son inversamente proporcionales?

Las magnitudes A y B

A	a	a'	$\dots$	a''
B	b	b'	$\dots$	b''

son ***inversamente proporcionales*** cuando

$$a \cdot b = a' \cdot b' = \dots = a'' \cdot b''$$

¿Cómo se calcula el término desconocido de una tabla de magnitudes inversamente proporcionales?

A	a	a'
B	b	x

El término desconocido es x . Para calcularlo, usamos lo visto anteriormente, es decir, los productos de las cantidades correspondientes tienen que ser iguales:

$$a \cdot b = a' \cdot x$$

de donde deducimos que

$$x = \frac{a \cdot b}{a'}$$

- 23.** Comprueba, en cada caso, si las magnitudes son inversamente proporcionales o no.

A	1	2	4	10
B	2	0,5	0,25	0,2

A	12	5	10	15
B	42	100,8	50,4	33,7

- 24.** Completa las siguientes tablas, sabiendo que las magnitudes son inversamente proporcionales:

A	32	8	x	1	6	16	t
B	3	12	4	96	y	z	w

A	1	5	10	15	20	30
B	x	12	6	y	z	t

- 25.** Resuelve:
- Dos jardineros limpian un parque en 3 horas y media. ¿Cuánto tardaría uno solo? ¿Y tres jardineros?
 - Un ciclista, a 20 km/h, tarda 35 minutos en cubrir cierto recorrido. ¿Cuánto tardará una moto a 75 km/h?
- 26.** Dispongo de tres grifos iguales para llenar un depósito. Si abro uno, el depósito se llena en 12 minutos. ¿Cuánto tardará en llenarse si abro dos grifos? ¿Y si abro los tres?
- 27.** Cuatro segadores cortan un campo de heno en tres horas y media. ¿Cuánto tardará un solo segador? ¿Y seis segadores?
- 28.** En una bodega con dos máquinas embotelladoras se envasa la cosecha de vino en 15 días. ¿Cuánto se tardaría teniendo tres máquinas más?
- 29.** Un autobús de línea, a 80 km/h, tarda 25 minutos en cubrir la distancia entre dos pueblos. ¿Cuánto tardaría si fuera a 120 km/h?
- 30.** Con un depósito de agua, se abastece una cuadra de 20 caballos durante 15 días. ¿Cuánto duraría el depósito si se vendieran 8 caballos?
- 31.** Un grifo, con un caudal de 12 litros por minuto, ha tardado tres cuartos de hora en llenar un depósito. ¿Cuál deberá ser el caudal para llenar el mismo depósito en 20 minutos?
- 32.** Dos socios montan un negocio aportando 20 000 € y 15 000 €, respectivamente. Para compensar la diferencia, cada uno se compromete a trabajar un número de horas inversamente proporcional a la cantidad aportada. Si el primero dedica al negocio 3 horas al día, ¿cuántas horas al día debe dedicar el segundo?
- 33.** Una piscina se llena en 15 horas con un grifo que arroja 120 litros de agua al minuto. ¿Cuánto tiempo tardará en llenar la piscina otro grifo que arroja 240 litros por minuto?
- 34.** Un rectángulo tiene 12 m de base y 7 m de altura. Otro rectángulo con la misma área tiene 5 m de base. ¿Cuánto tiene de altura?
- 35.** Normalmente, suelo tardar 4 horas y 20 minutos en cortar el césped de mi casa con un cortacésped. Si dos de mis primos me ayudaran con otras cortadoras, ¿cuánto tardaríamos?
- 36.** Para construir un muro, 8 obreros necesitan 7 días y 5 horas. ¿Cuánto tiempo tardarán 3 obreros? ¿Cuántos obreros se necesitarían para construirlo en la mitad de tiempo?
- 37.** En una granja avícola hay 300 gallinas que se comen un camión de grano en 20 días. Si se compran 100 gallinas más ¿En cuánto tiempo comerán la misma cantidad de grano?
- 38.** Un grifo que vierte 15 litros por minuto tarda 13 minutos en llenar una bañera. ¿Cuánto tardará en llenar la misma bañera si vierte 12 litros por minuto?

39. Para almacenar una cierta cantidad de aceite, empleamos 24 garrafas de 5 litros cada una. Si queremos guardar solo 20 garrafas, ¿de qué capacidad deberán ser?

Porcentajes

¿Qué es el tanto por ciento?

Es una razón entre un número a y 100:

$$a \% = \frac{a}{100}$$

Ejemplos:

$$\text{a) } 25 \% = \frac{25}{100} = 0,25$$

$$\text{b) } 3,2 \% = \frac{3,2}{100} = 0,032$$

¿Cómo calcular el porcentaje de una cantidad?

$$a \% \text{ de } C = \frac{a \cdot C}{100}$$

Ejemplos:

$$\text{a) } 36 \% \text{ de } 1256 = \frac{36 \cdot 1256}{100} = 542,16$$

$$\text{b) } 43,5 \% \text{ de } 250 = \frac{43,5 \cdot 250}{100} = 108,75$$

Aumentos y disminuciones porcentuales

Aumenta una cantidad un x % es lo mismo que calcular el $(100 + x)$ % de esa cantidad.

Disminuir una cantidad un x % es lo mismo que calcular el $(100 - x)$ % de esa cantidad. 4,31

Ejemplos:

- a) El precio de unos filetes de pechuga es de 4,31 €, pero me han cobrado 4,74 €, ya que el IVA es del 10 %. ¿Es correcto?

Vamos a comprobarlo:

$$10 \% 4,31 = 0,431$$

Precio final: $4,31 + 0,431 = 4,741 \approx 4,74$ €, luego es correcto

$$\text{De otra forma: } (100 + 10) \% \text{ de } 4,31 = \frac{110 \cdot 4,31}{100} = 4,741 \approx 4,74 \text{ €}$$

- b) El precio de unos Levi's 501 es de 69,90 €, pero me hacen una rebaja del 20 %. ¿Cuánto pagaré por los pantalones?

$$20 \% \text{ de } 69,90 = \frac{20 \cdot 69,90}{100} = 13,98 \text{ € de descuento:}$$

Precio final: $69,90 - 13,98 = 55,92 \text{ €}$

$$\text{De otra forma: } (100 - 20) \% \text{ de } 69,90 = \frac{80 \cdot 69,90}{100} = 55,92 \text{ €}$$

40. El porcentaje de estudiantes de 13 años que se lavan los dientes cada día en España es del 45 % en chicas y del 33 % en chicos. ¿Cuántas veces es mayor el porcentaje en chicas que en chicos?

41. De las 235 000 toneladas de envases de hojalata que se consumen anualmente en España se quiere reciclar el 34 %.

- a) ¿Cuántas toneladas de hojalata se quieren reciclar?
 b) Si se calcula que los envases de hojalata son aproximadamente el 2% del total de basura que se produce, ¿qué cantidad de basura se produce anualmente en España?

42. La tabla siguiente muestra los resultados de unas elecciones municipales en una ciudad.

Partido	A	B	C	D
Nº de votos	180 000	135 000	67 500	217 500

Calcula el porcentaje de votos obtenido por cada partido.

43. En una autopista hay tres peajes de 3,5 €, 5 € y 5,5 €, respectivamente. Al año siguiente cada peaje aumenta en 1,40 €. ¿Cuál es el porcentaje de aumento en cada caso?

44. La siguiente tabla muestra el precio del alquiler de una oficina durante 4 años.

AÑOS	Alquiler mensual
1 ^{er} año	900 €
2 ^o año	950 €
3 ^{er} año	1 000 €
4 ^o año	1 100 €

- a) Calcula el porcentaje de subida de cada año respecto del anterior.
 b) Calcula el porcentaje de subida del cuarto año con respecto al precio inicial.

45. A primeros de enero, el precio de un coche pasó de 14 400 € a 15 000 €. ¿Qué tanto por ciento aumentó el precio el coche?

46. Un embalse tenía, al finalizar el verano, 6,4 hectómetros cúbicos de agua. En otoño las reservas han aumentado en un 25 %. ¿Cuánta agua tiene al comenzar el invierno?

47. En una oferta vemos que hay un hotel para las vacaciones en la que un mes cuesta 1 232,5 €. Sin embargo, a la hora de pagar nos dicen que ese precio es sin IVA. ¿Cuánto tenemos que pagar al final, si el IVA es del 10 %?

48. En un parque natural se han plantado 2 500 árboles. Si sabemos que cada año se secan el 7 %, ¿cuántos árboles hay que volver a plantar cada año para que se mantenga el número de árboles?

49. Si el sueldo de un empleado ha subido este año y ha pasado de 1 250 € a 1 290 € cada mes. ¿Cuál es el porcentaje de subida? Si el IPC (índice de precios al consumo) subió el año pasado un 3,1 %, ¿ha sido mayor la subida del salario o la subida del IPC?

50. Debido a la crisis, a un trabajador se le ha reducido el sueldo un 7,5 %. Sabiendo que este ganaba, antes de la crisis 1 875 €, ¿cuánto cobrará después de la reducción de sueldo?

Ejercicios de repaso

51. Los alumnos de 1º de ESO van a una excursión al teatro. Por la entrada de 24 alumnos, el centro ha pagado un total de 180 €. ¿Cuánto tendrán que pagar si finalmente se apuntan 35 alumnos?

- 52.** Para limpiar el patio del instituto, 6 alumnos tardan 50 minutos. Si el director quiere que la limpieza se realice en 30 minutos para aprovechar mejor el recreo, ¿cuántos alumnos deberían participar en la limpieza?
- 53.** Una empresa de construcción necesita 8 obreros para terminar una piscina en 15 días. Debido a que tienen que empezar otra obra, necesitan terminar la piscina en 10 días. ¿Cuántos obreros más deberán contratar?
- 54.** Una papelería vende 15 cuadernos del mismo tipo por 22,50 €. Si un profesor quiere comprar 42 cuadernos para sus dos clases, ¿cuánto dinero deberá pagar?
- 55.** Ana ha ido al mercado y ha comprado 3 kg de naranjas por 4,35 €. ¿Cuánto pagará si compra 5 kg de las mismas naranjas?
- 56.** Un agricultor ha recogido la cosecha de aceitunas y ha obtenido 600 litros de aceite. Para almacenarlo, quiere utilizar garrafas de 5 litros, pero se da cuenta de que así necesitaría 120 garrafas. Si prefiere usar garrafas de 8 litros para ocupar menos espacio, ¿cuántas garrafas necesitará?
- 57.** Para preparar zumo de naranja natural, Carmen exprime 6 naranjas y obtiene 1,2 litros de zumo. Si quiere preparar 3,5 litros para una fiesta, ¿cuántas naranjas necesitará aproximadamente?
- 58.** Una empresa de reparto ha calculado que 5 trabajadores pueden repartir 1 250 folletos publicitarios en una jornada. ¿Cuántos folletos podrán repartir 8 trabajadores en la misma jornada si todos trabajan al mismo ritmo?
- 59.** Una familia quiere recorrer una ruta en bicicleta. Si pedalean a una velocidad media de 12 km/h, tardan 5 horas y media en completar el recorrido. Si quieren llegar antes y deciden aumentar la velocidad a 20 km/h, ¿cuánto tiempo tardarán en hacer el mismo recorrido?
- 60.** Un carpintero cobra 240 € por 8 horas de trabajo. ¿Cuánto cobrará si trabaja 5 horas?
- 61.** Para hacer una tortilla de patatas, una receta indica que se necesitan 6 huevos para 4 personas. ¿Cuántos huevos se necesitan para 10 personas?
- 62.** Una caja de folios cuesta 33 €. Sabiendo que una caja contiene 5 paquetes de 500 hojas cada uno, ¿cuánto costarán 1100 hojas del mismo tipo?
- 63.** Una familia consume 15 000 litros de agua en un mes. Si el precio del agua es de 1,92 € por cada 1 000 litros (es decir, por cada m³), ¿cuánto pagarán en un mes?
- 64.** Un camión transporta 12 000 kg de mercancía en 5 viajes. ¿Cuántos viajes necesitará para transportar 16 000 kg si la capacidad del camión es la misma?
- 65.** 20 obreros construyen un edificio en 180 días. ¿Cuántos días tardarán 30 obreros en construir el mismo edificio?
- 66.** En una excursión, los monitores han preparado bocadillos para 24 alumnos, con una ración que les alcanza para 5 días y 12 horas. Si finalmente van 30 alumnos a la excursión y se mantiene la misma cantidad total de comida, ¿para cuántos días alcanzará la comida?

- 67.** Una bomba llena un depósito de 24 000 litros en 8 horas. ¿Cuánto tardará en llenar el mismo depósito si se usan 2 bombas iguales más?
- 68.** Una fábrica produce 2 500 botellas de refresco en 8 horas. ¿Cuántas botellas producirá en 12 horas si mantiene el mismo ritmo?
- 69.** El precio de un ordenador es 850 € sin IVA. Si el IVA es del 21 %, ¿cuál será el precio final del ordenador?
- 70.** Un abrigo que cuesta 120 € tiene un descuento del 25 %. ¿Cuál será su precio después del descuento?
- 71.** Marta gana 1 500 € al mes y decide ahorrar el 12 % de su salario. ¿Cuánto dinero ahorrará en un año?
- 72.** Una ciudad tiene 85 000 habitantes. Si la población aumenta un 8 % en un año, ¿cuántos habitantes habrá al final del año?
- 73.** Un televisor de 43" que costaba 339 € tiene una rebaja del 15 %. ¿Cuál es su nuevo precio?
- 74.** El precio de la gasolina es 1,457 € por litro. Si el precio sube un 10 %, ¿cuál será el nuevo precio por litro?
- 75.** Por 5 días de trabajo he ganado 390 €. ¿Cuánto ganaré por 18 días?
- 76.** Tres cajas de cereales pesan dos kilos y cuarto. ¿Cuánto pesarán cinco cajas iguales a las anteriores?
- 77.** Tres palas excavadoras hacen la zanja de una conducción de cable telefónico en 10 días. ¿Cuánto tardarían en hacer la zanja cinco palas?
- 78.** Una fábrica de automóviles ha producido 8100 vehículos en 60 días. Si se mantiene el ritmo de producción, ¿cuántas unidades fabricará en un año?
- 79.** Un camión que carga 3 toneladas necesita 15 viajes para transportar cierta cantidad de arena. ¿Cuántos viajes necesita para hacer el mismo porte otro camión que carga 5 toneladas?
- 80.** Un conductor invierte tres horas y media en un recorrido de 329 km. ¿Cuánto tiempo invertirá en otro recorrido, en condiciones similares al anterior, de 282 km de longitud?
- 81.** En un concurso televisivo, cada participante recibe una cantidad de dinero inversamente proporcional al número de fallos cometidos. Un concursante que cometió cinco fallos se llevó 1 000 euros. ¿Cuánto se llevará uno que solamente haya cometido dos fallos?
- 82.** En una granja, el 15 % de los animales son vacas. Sabiendo que hay 30 vacas, ¿cuál es el número total de animales?
- 83.** Ayer la barra de pan subió un 10 %. Si ahora cuesta 70 céntimos, ¿cuál era el precio anterior?