<u>Definición:</u> Sea $P(x)=a_n x^n+...+a_1 x+a_0 \in \mathbb{Z}[x]$. Un número complejo $\omega \in \mathbb{C}$ se denomina algebraico si $P(\omega)=0$, es decir, si es solución de una ecuación polinómica con coeficientes enteros. Los números complejos que no son algebraicos se denominan trascendentes.

Teorema de Liouville, 1844: Existen números trascendentes.

Teorema de Cantor, 1874: El conjunto de los números algebraicos es numerable.

Corolario de Cantor, 1874: El conjunto de los números trascendentes es no numerable.

Teorema de Lindemann, 1882: El número π es trascendente.

***<u>Demostración:</u>* (Ian Stewart, 1970)**
Supongamos que π es algebraico. Entonces, $i\pi$ también es algebraico, es decir, $\exists p_1(x)\in \mathbb{Z}[x]$ tal que $p_1(i\pi)=0$ y sean $\alpha_1=i\pi,\alpha_2,...,\alpha_n \in \mathbb{C}$ sus raíces.
Por otra parte, como $e^{i\pi}+1=0$ (fórmula de Euler), se tiene que

$$\left(e^{\alpha_1}+1\right)\left(e^{\alpha_2}+1\right)...\left(e^{\alpha_n}+1\right)=0$$

y, además, $p_2\left(\alpha_j+\alpha_k\right)=0 \quad \forall j,k=1,...,n$ para $j\neq k$, luego

$$p_2\left(\alpha_j+\alpha_k+\alpha_l\right)=0 \quad \forall j,k,l=1,...,n \text{ para } j\neq k\neq l$$

y como consecuencia, $p(x)=p_1(x)p_2(x)...p_n(x)=0$ es una ecuación polinómica cuyas raíces son todas las sumas que pueden hacerse con las raíces α_k.
Eliminando las raíces que son cero, si las hay, obtenemos que

$$p(x)=cx^r+c_1x^{r-1}+...+c_r \in \mathbb{Z}[x]$$

con $c_r\neq 0$, y conocemos todas sus raíces.
Llamamos $\beta_1,...,\beta_r$ a estas raíces, y obtenemos que

$$e^{\beta_1}+...+e^{\beta_r}+e^0+...+e^0=0$$

esto es,

$$\sum_{j=1}^{r} e^{\beta_j}+k=0$$

Donde $k\in\mathbb{N}$, ya que siempre aparece algún 1.
Definimos ahora las funciones

$$f(x)=c^{rp-1}x^{p-1}\frac{\left[p(x)\right]^p}{(p-1)!}$$

y

$$F(x)=f(x)+f'(x)+...+f^{rp-1)}(x)$$

Se tiene que

$$\frac{d}{dx}\left[e^{-x}F(x)\right]=-e^{-x}f(x)$$

y, por tanto,

$$e^{-x}F(x)-F(0)=-\int_0^x e^{-y}f(y)\ \mathrm{d}y$$

Multiplicamos la igualdad anterior por e^x y tomamos $y = \lambda x$:

$$F(x) - e^x F(0) = -x\int_0^1 e^{(1-\lambda)x} f(\lambda x)\ \mathrm{d}\lambda$$

Consideramos ahora x en el rango de los β_j, y sumamos en j. Como

$$\sum_{j=1}^{r} F(\beta_j) + kF(0) = -\sum_{j=1}^{r} \beta_j \int_0^1 e^{(1-\lambda)\beta_j} f(\lambda\beta_j)\ \mathrm{d}\lambda$$

Vamos a demostrar que el miembro de la izquierda de la igualdad es un entero distinto de cero.
Por definición de f, se tiene que

$$\sum_{j=1}^{r} f^{t)}(\beta_j) = 0 \text{ para } 0 < t < p$$

Cada derivada de orden p o mayor, tiene un factor c^{rp-1} y $f^{t)}(\beta_j)$ es un polinomio en β_j con $\deg f^{t)}(\beta_j) \le rp - 1$.

La suma es simétrica y dado que cada coeficiente es divisible entre c^{rp-1}, esa suma es un número entero, y al tener a p como factor se tiene que

$$\sum_{j=1}^{r} f^{t)}(\beta_j) = pk_t \text{ para } t = p, \ldots, p + (rp - 1)$$

Como consecuencia, el miembro de la izquierda es un número entero más $kF(0)$.
Se tiene que

$$f^{t)}(0) = 0 \text{ para } t = 0, \ldots, p-2$$

$$f^{p-1)}(0) = c^{rp-1} c_r^p \text{ con } c_r \neq 0$$

$$f^{t)}(0) = p \in \mathbb{Z} \text{ para } t = p, p+1, \ldots$$

Por tanto, el miembro de la izquierda de la igualdad es un entero múltiplo de $p + c^{rp-1} c_r^p k$, que no es divisible por p tomando $p > k,\ c,\ c_r$.
Así, para valores suficientemente grandes de p, el miembro de la izquierda es un entero no nulo, pero, por otra parte,

$$\lim_{p \to +\infty} \left(-\sum_{j=1}^{r} \beta_j \int_0^1 e^{(1-\lambda)\beta_j} f(\lambda\beta_j)\ \mathrm{d}\lambda \right) = 0$$

lo que constituye una contradicción.

C.Q.D.

Resultados sobre la trascendencia de números:

Teorema: Si α y β son números trascendentes, entonces al menos uno de los números $\alpha + \beta$, $\alpha\beta$ es trascendente.

Teorema: Si α y β son números trascendentes, entonces al menos uno de los números $\alpha + \beta$, $\alpha\beta$ es trascendente.

Teorema de Lindemann, 1882: El número e^α es trascendente para todo número algebraico $\alpha \neq 0$.

Corolario: Si $\alpha \in \mathbb{C} - \{0,1\}$ es un número algebraico, entonces $\log \alpha$ es trascendente.

Teorema de Lindemann-Weierstrass, 1885: Si $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ son números algebraicos linealmente independientes sobre $\mathbb{Q}$, entonces $e^{\alpha_1}, \ldots, e^{\alpha_n}$ son algebraicamente independientes sobre $\mathbb{Q}$, es decir, $\left[\mathbb{Q}\left(e^{\alpha_1}, \ldots, e^{\alpha_n}\right) : \mathbb{Q}\right] = n$.

Corolario: $\alpha \in \mathbb{C} - \{0\}$ es un número algebraico, entonces e^{α}, $\cos \alpha$, $\operatorname{sen} \alpha$ y $\operatorname{tg} \alpha$ son trascendentes.

Teorema de Gelfond-Schneider, 1934-1935: Si α y β son números algebraicos $\neq 0,1$, y si $\beta \notin \mathbb{Q}$, entonces α^{β} es un número trascendente.

Teorema: Sea $\alpha \in \mathbb{C}$ un número algebraico e $i \in \mathbb{C}$ la unidad imaginaria. Entonces, $i\alpha$ también es algebraico.

Teorema: Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ dos números algebraicos y $P \in \mathbb{Q}[x, y]$. Entonces, $P(\alpha, \beta)$ es un número algebraico.

Teorema de Thue-Siegel-Roth, 1955: Si $\alpha \in \mathbb{R}$ es algebraico, entonces para cada $\varepsilon > 0$, la inecuación $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^{2+\varepsilon}}$ solo tiene un número finito de soluciones racionales $\frac{p}{q}$.

Corolario (Criterio de trascendencia): Si para algún $\varepsilon > 0$ hay infinitas soluciones racionales, el número $\alpha \in \mathbb{R}$ es trascendente.

Limitación del criterio de Thue-Siegel-Roth: El conjunto de números trascendentes que pueden ser identificados por el criterio de Thue-Siegel-Roth es un conjunto de medida (de Lebesgue) nula.

Conjetura de Schanuel, $\sim$ 1960: Sean $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ linealmente independientes sobre $\mathbb{Q}$. Entonces, $\left[\mathbb{Q}\left(z_1, \ldots, z_n, e^{z_1}, \ldots, e^{z_n}\right) : \mathbb{Q}\right] \geq n$.