

Definición: Sea $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$. Un número complejo $\omega \in \mathbb{C}$ se denomina algebraico si $P(\omega) = 0$, es decir, si es solución de una ecuación polinómica con coeficientes enteros. Los números complejos que no son algebraicos se denominan trascendentes.

Teorema de Liouville, 1844: Existen números trascendentes.

Teorema de Cantor, 1874: El conjunto de los números algebraicos es numerable.

Corolario de Cantor, 1874: El conjunto de los números trascendentes es no numerable.

Teorema de Hermite, 1873: El número e es trascendente.

Demostración: (Hilbert)

Sea $k \in \mathbb{N}$ y llamemos $I_k = \int_0^{+\infty} x^k e^{-x} dx$. Integrando por partes, se tiene que

$$I_k = \int_0^{+\infty} x^k e^{-x} dx = \left[-x^k e^{-x} \right]_{x=0}^{x=+\infty} + k \int_0^{+\infty} x^{k-1} e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} x^{k-1} e^{-x} dx$$

es decir,

$$I_k = k I_{k-1} = k(k-1) I_{k-2} = \dots = k! I_0 = k!$$

por inducción.

Sea ahora $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$ y con término constante $p(0)$. Para $m \geq 0$

$$\int_0^{+\infty} x^m p(x) e^{-x} dx \equiv p(0) m! \pmod{(m+1)!}$$

y como consecuencia $\int_0^{+\infty} x^m p(x) e^{-x} dx$ no es igual a cero si $(m+1)$ no divide a $p(0)$.

Supongamos que e es algebraico. Entonces, $\exists a_0, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$, $a_0 \neq 0$ tales que

$$a_0 + a_1 e + \dots + a_n e^n = 0 \quad [1]$$

Sea $r \in \mathbb{N}$ e $I_b^c = \int_b^c x^r \{(x-1)(x-2)\dots(x-n)\}^{r+1} e^{-x} dx$ con $0 \leq b \leq c \leq +\infty$. Multiplicando [1] por $I_0^{+\infty}$ obtenemos:

$$P_1 + P_2 = 0$$

donde

$$\begin{cases} P_1 = a_0 I_0^{+\infty} + a_1 e I_1^{+\infty} + \dots + a_n e^n I_n^{+\infty} \\ P_2 = a_1 e I_1^0 + \dots + a_n e^n I_0^{+\infty} \end{cases} \quad [2]$$

Obtendremos una contradicción al demostrar que $\frac{P_1}{r!}$ es un entero distinto de cero, mientras que

$$\frac{|P_2|}{r!} < 1 \text{ para } r \text{ suficientemente grande.}$$

Haciendo el cambio de variable $y = x - k$ resulta que

$$\begin{aligned} a_k e^k I_k^{+\infty} &= a_k \int_k^{+\infty} x^r \{(x-1)\dots(x-n)\}^{r+1} e^{-(x-k)} dx = \\ &= a_k \int_0^{+\infty} (y+k)^r \{(y+k-1)\dots(y+k-n)\}^{r+1} e^{-y} dy = \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} a_0 \int_0^{+\infty} y^r p_0(y) e^{-y} dy & \text{si } k = 0 \\ a_0 \int_0^{+\infty} y^{r+1} p_k(y) e^{-y} dy & \text{si } 0 < k \leq n \end{cases}$$

donde $p_0(y), \dots, p_n(y) \in \mathbb{Z}$.

Por tanto, todos los términos que contribuyen a P_1 en [2] son números enteros y todos estos términos menos el primero son múltiplos de $(r+1)!$. Como consecuencia,

$$P_1 \equiv a_0 p_0(0) r! \equiv a_0 (-1)^{n(r+1)} (n!)^{r+1} r! \pmod{(r+1)!}$$

es decir,

$$P_1 \equiv a_0 (-1)^{n(r+1)} (n!)^{r+1} r! + q(r+1)! \text{ con } q \in \mathbb{Z}$$

es un múltiplo de $r!$. Además, $P_1 = 0$ implica que $a_0 (-1)^{n(r+1)} (n!)^{r+1} r! + q(r+1)! = 0$, pero esto es imposible siempre que $(r+1)$ tenga un factor primo que no divida a $a_0 n!$. Por lo tanto, si r es suficientemente grande, entonces $P_1 \neq 0$.

Para obtener una cota superior de $|P_2|$, consideramos

$$M = \max_{0 \leq x \leq n} |x(x-1)\dots(x-n)| \text{ y } N = \max_{0 \leq x \leq n} |(x-1)\dots(x-n)e^{-x}|$$

Para $1 \leq k \leq n$

$$|a_0 I_0^k| \leq |a_k| \int_0^k M^r N dx = k |a_k| M^r N$$

Como consecuencia,

$$|P_2| \leq \{|a_1|e + 2|a_2|e^2 + \dots + n|a_n|e^n\} M^r N$$

y como

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{M^r}{r!} = 0$$

se obtiene que

$$|P_2| < r!$$

si r es suficientemente grande.

C.Q.D.

Resultados sobre la trascendencia de números:

Teorema: Si α y β son números trascendentes, entonces al menos uno de los números $\alpha + \beta$, $\alpha\beta$ es trascendente.

Teorema de Lindemann, 1882: El número e^α es trascendente para todo número algebraico $\alpha \neq 0$.

Corolario: Si $\alpha \in \mathbb{C} - \{0, 1\}$ es un número algebraico, entonces $\log \alpha$ es trascendente.

Teorema de Lindemann-Weierstrass, 1885: Si $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ son números algebraicos linealmente independientes sobre \mathbb{Q} , entonces $e^{\alpha_1}, \dots, e^{\alpha_n}$ son algebraicamente independientes sobre \mathbb{Q} , es decir, $[\mathbb{Q}(e^{\alpha_1}, \dots, e^{\alpha_n}) : \mathbb{Q}] = n$.

Corolario: $\alpha \in \mathbb{C} - \{0\}$ es un número algebraico, entonces e^α , $\cos \alpha$, $\sin \alpha$ y $\operatorname{tg} \alpha$ son trascendentes.

Teorema de Gelfond-Schneider, 1934-1935: Si α y β son números algebraicos $\neq 0, 1$, y si $\beta \notin \mathbb{Q}$, entonces α^β es un número trascendente.

Teorema: Sea $\alpha \in \mathbb{C}$ un número algebraico e $i \in \mathbb{C}$ la unidad imaginaria. Entonces, $i\alpha$ también es algebraico.

Teorema: Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ dos números algebraicos y $P \in \mathbb{Q}[x, y]$. Entonces, $P(\alpha, \beta)$ es un número algebraico.

Teorema de Thue-Siegel-Roth, 1955: Si $\alpha \in \mathbb{R}$ es algebraico, entonces para cada $\varepsilon > 0$, la inecuación $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^{2+\varepsilon}}$ solo tiene un número finito de soluciones racionales $\frac{p}{q}$.

Corolario (Criterio de trascendencia): Si para algún $\varepsilon > 0$ hay infinitas soluciones racionales, el número $\alpha \in \mathbb{R}$ es trascendente.

Limitación del criterio de Thue-Siegel-Roth: El conjunto de números trascendentes que pueden ser identificados por el criterio de Thue-Siegel-Roth es un conjunto de medida (de Lebesgue) nula.

Conjetura de Schanuel, ~ 1960: Sean $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ linealmente independientes sobre \mathbb{Q} . Entonces, $\left[\mathbb{Q}(z_1, \dots, z_n, e^{z_1}, \dots, e^{z_n}) : \mathbb{Q} \right] \geq n$.