

**Definición:** Sea  $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ . Un número complejo  $\omega \in \mathbb{C}$  se denomina algebraico si  $P(\omega) = 0$ , es decir, si es solución de una ecuación polinómica con coeficientes enteros. Los números complejos que no son algebraicos se denominan trascendentes.

**Teorema de Liouville, 1844:** Existen números trascendentes.

**Teorema de Cantor, 1874:** El conjunto de los números algebraicos es numerable.

**Corolario de Cantor, 1874:** El conjunto de los números trascendentes es no numerable.

**Teorema de Hermite, 1873:** El número  $e$  es trascendente.

**Demostración: (Hilbert)**

Sea  $k \in \mathbb{N}$  y llamemos  $I_k = \int_0^{+\infty} x^k e^{-x} dx$ . Integrando por partes, se tiene que

$$I_k = \int_0^{+\infty} x^k e^{-x} dx = \left[ -x^k e^{-x} \right]_{x=0}^{x=+\infty} + k \int_0^{+\infty} x^{k-1} e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} x^{k-1} e^{-x} dx$$

es decir,

$$I_k = k I_{k-1} = k(k-1) I_{k-2} = \dots = k! I_0 = k!$$

por inducción.

Sea ahora  $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$  y con término constante  $p(0)$ . Para  $m \geq 0$

$$\int_0^{+\infty} x^m p(x) e^{-x} dx \equiv p(0) m! (\text{mod } (m+1)!)$$

y como consecuencia  $\int_0^{+\infty} x^m p(x) e^{-x} dx$  no es igual a cero si  $(m+1)$  no divide a  $p(0)$ .

Supongamos que  $e$  es algebraico. Entonces,  $\exists a_0, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ ,  $a_0 \neq 0$  tales que

$$a_0 + a_1 e + \dots + a_n e^n = 0 \quad [1]$$

Sea  $r \in \mathbb{N}$  e  $I_b^c = \int_b^c x^r \{(x-1)(x-2)\dots(x-n)\}^{r+1} e^{-x} dx$  con  $0 \leq b \leq c \leq +\infty$ . Multiplicando [1] por

$I_0^{+\infty}$  obtenemos:

$$P_1 + P_2 = 0$$

donde

$$\begin{cases} P_1 = a_0 I_0^{+\infty} + a_1 e I_1^{+\infty} + \dots + a_n e^n I_n^{+\infty} \\ P_2 = a_1 e I_1^0 + \dots + a_n e^n I_0^{+\infty} \end{cases} \quad [2]$$

Obtendremos una contradicción al demostrar que  $\frac{P_1}{r!}$  es un entero distinto de cero, mientras que

$\frac{|P_2|}{r!} < 1$  para  $r$  suficientemente grande.

Haciendo el cambio de variable  $y = x - k$  resulta que

$$\begin{aligned} a_k e^k I_k^{+\infty} &= a_k \int_k^{+\infty} x^r \{(x-1)\dots(x-n)\}^{r+1} e^{-(x-k)} dx = \\ &= a_k \int_0^{+\infty} (y+k)^r \{(y+k-1)\dots(y+k-n)\}^{r+1} e^{-y} dy = \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} a_0 \int_0^{+\infty} y^r p_0(y) e^{-y} dy & \text{si } k = 0 \\ a_0 \int_0^{+\infty} y^{r+1} p_k(y) e^{-y} dy & \text{si } 0 < k \leq n \end{cases}$$

donde  $p_0(y), \dots, p_n(y) \in \mathbb{Z}$ .

Por tanto, todos los términos que contribuyen a  $P_1$  en [2] son números enteros y todos estos términos menos el primero son múltiplos de  $(r+1)!$ . Como consecuencia,

$$P_1 \equiv a_0 p_0(0) r! \equiv a_0 (-1)^{n(r+1)} (n!)^{r+1} r! (\mod (r+1)!)$$

es decir,

$$P_1 \equiv a_0 (-1)^{n(r+1)} (n!)^{r+1} r! + q(r+1)! \text{ con } q \in \mathbb{Z}$$

es un múltiplo de  $r!$ . Además,  $P_1 = 0$  implica que  $a_0 (-1)^{n(r+1)} (n!)^{r+1} r! + q(r+1)! = 0$ , pero esto es imposible siempre que  $(r+1)$  tenga un factor primo que no divida a  $a_0 n!$ . Por lo tanto, si  $r$  es suficientemente grande, entonces  $P_1 \neq 0$ .

Para obtener una cota superior de  $|P_2|$ , consideramos

$$M = \max_{0 \leq x \leq n} |x(x-1)\dots(x-n)| \quad y \quad N = \max_{0 \leq x \leq n} |(x-1)\dots(x-n)e^{-x}|$$

Para  $1 \leq k \leq n$

$$|a_0 I_0^k| \leq |a_k| \int_0^k M' N dx = k |a_k| M' N$$

Como consecuencia,

$$|P_2| \leq \{ |a_1| e + 2 |a_2| e^2 + \dots + n |a_n| e^n \} M' N$$

y como

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{M^r}{r!} = 0$$

se obtiene que

$$|P_2| < r!$$

si  $r$  es suficientemente grande.

C.Q.D.

### **Resultados sobre la trascendencia de números:**

**Teorema:** Si  $\alpha$  y  $\beta$  son números trascendentes, entonces al menos uno de los números  $\alpha + \beta$ ,  $\alpha\beta$  es trascendente.

**Teorema de Lindemann, 1882:** El número  $e^\alpha$  es trascendente para todo número algebraico  $\alpha \neq 0$ .

**Corolario:** Si  $\alpha \in \mathbb{C} - \{0,1\}$  es un número algebraico, entonces  $\log \alpha$  es trascendente.

**Teorema de Lindemann-Weierstrass, 1885:** Si  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  son números algebraicos linealmente independientes sobre  $\mathbb{Q}$ , entonces  $e^{\alpha_1}, \dots, e^{\alpha_n}$  son algebraicamente independientes sobre  $\mathbb{Q}$ , es decir,  $[\mathbb{Q}(e^{\alpha_1}, \dots, e^{\alpha_n}) : \mathbb{Q}] = n$ .

**Corolario:**  $\alpha \in \mathbb{C} - \{0\}$  es un número algebraico, entonces  $e^\alpha$ ,  $\cos \alpha$ ,  $\sin \alpha$  y  $\operatorname{tg} \alpha$  son trascendentes.

**Teorema de Gelfond-Schneider, 1934-1935:** Si  $\alpha$  y  $\beta$  son números algebraicos  $\neq 0, 1$ , y si  $\beta \notin \mathbb{Q}$ , entonces  $\alpha^\beta$  es un número trascendente.

**Teorema:** Sea  $\alpha \in \mathbb{C}$  un número algebraico e  $i \in \mathbb{C}$  la unidad imaginaria. Entonces,  $i\alpha$  también es algebraico.

**Teorema:** Sean  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  dos números algebraicos y  $P \in \mathbb{Q}[x, y]$ . Entonces,  $P(\alpha, \beta)$  es un número algebraico.

**Teorema de Thue-Siegel-Roth, 1955:** Si  $\alpha \in \mathbb{R}$  es algebraico, entonces para cada  $\varepsilon > 0$ , la inecuación  $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^{2+\varepsilon}}$  solo tiene un número finito de soluciones racionales  $\frac{p}{q}$ .

**Corolario (Criterio de trascendencia):** Si para algún  $\varepsilon > 0$  hay infinitas soluciones racionales, el número  $\alpha \in \mathbb{R}$  es trascendente.

**Limitación del criterio de Thue-Siegel-Roth:** El conjunto de números trascendentes que pueden ser identificados por el criterio de Thue-Siegel-Roth es un conjunto de medida (de Lebesgue) nula.

**Conjetura de Schanuel, ~1960:** Sean  $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$  linealmente independientes sobre  $\mathbb{Q}$ . Entonces,  $[\mathbb{Q}(z_1, \dots, z_n, e^{z_1}, \dots, e^{z_n}) : \mathbb{Q}] \geq n$ .