Demostraciones elementales

Definición: Un número entero m es par si $\exists k \in \mathbb{Z}$ tal que $m = 2k$ con $k \in \mathbb{Z}$.

Proposición: El producto de un número par por cualquier otro número entero es un número par.

Demostración:
Sea $m = 2k$ con $k \in \mathbb{Z}$, un número par y $n \in \mathbb{Z}$. Entonces,
$$mn = 2kn = 2(kn) = 2a$$
que es un número par, con $a = kn \in \mathbb{Z}$ -

Proposición: Sea $m \in \mathbb{Z}$. Entonces, m es par si, y solo si, m^2 es par.

Demostración:
$\Rightarrow$) Si m es par, entonces $m = 2k$ con $k \in \mathbb{Z}$ y, por tanto, $m^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2) = 2h$ con $h \in \mathbb{Z}$, es decir, m^2 es par.

$\Leftarrow$) Supongamos, por reducción al absurdo, que m no es par. Entonces, m es impar y, por tanto, $m = 2k + 1$ con $k \in \mathbb{Z}$, luego
$$m^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2h + 1$$
con $h = 2k^2 + 2k \in \mathbb{Z}$, es decir, m^2 es impar.

Definición: Un número entero m es impar si $\exists k \in \mathbb{Z}$ tal que $m = 2k + 1$ con $k \in \mathbb{Z}$.

Proposición: La suma de dos números impares es un número par.

Demostración:
Sean $m = 2k + 1$ con $k \in \mathbb{Z}$ y $n = 2h + 1$ con $h \in \mathbb{Z}$ dos números impares. Entonces:
$$m + n = 2k + 1 + 2h + 1 = 2k + 2h + 2 = 2(k + h + 1) = 2a$$
que es un número par, con $a = k + h + 1 \in \mathbb{Z}$.

Proposición: La suma de un número par y un número impar es un número impar.

Demostración:
Sean $m = 2k$ con $k \in \mathbb{Z}$ un número par y $n = 2h + 1$ con $h \in \mathbb{Z}$ un número impar. Entonces:
$$m + n = 2k + 2h + 1 = 2(k + h) + 1 = 2a + 1$$
que es un número impar, con $a = k + h \in \mathbb{Z}$.

Proposición: El producto de dos números impares es un número impar.

Demostración:
Sean $m = 2k + 1$ con $k \in \mathbb{Z}$ y $n = 2h + 1$ con $h \in \mathbb{Z}$ dos números impares. Entonces:
$$mn = (2k+1)(2h+1) = 2 \cdot 2kh + 2k + 2h + 1 = 2(2kh + k + h) + 1 = 2a + 1$$
que es un número impar, con $a = 2kh + k + h \in \mathbb{Z}$.

Proposición: Sea $n \in \mathbb{Z}$. Si n es par, entonces n^3 es par.

Demostración:
Lo vamos a demostrar por contrarrecíprocos: $\left[(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\text{ no } q \Rightarrow \text{no } p)\right]$ (en lenguaje formal).

Supongamos que n no es par, entonces n^3 no es par, es decir, tenemos que demostrar que si n es impar, entonces n^3 también es impar.
Si n es impar, entonces $\exists k \in \mathbb{Z}$ tal que $n = 2k+1$ y, por tanto,

$$n^3 = (2k+1)^3 = 8k^3 + 12k^2 + 6k + 1 = 2\left(4k^3 + 6k^2 + 3k\right) + 1 = 2a + 1$$

es un número impar, donde $a = 4k^3 + 6k^2 + 3k \in \mathbb{Z}$.

Proposición: Si $n \in \mathbb{Z}$ y n^2 es par, entonces n es par.

Demostración:
Lo demostramos por contrarrecíprocos. Supongamos que n^2 es par es par. Entonces, $n^2 = 2k$ para algún $k \in \mathbb{Z}$ y, por tanto, $n^2 - 2k = 0$. Ahora bien,

$$n = n + 0 = n + \left(n^2 - 2k\right) = n(n+1) - 2k$$

y tanto $n(n+1)$ como $2k$ son números pares. Como consecuencia, n es par.

Proposición: $0,\widehat{9} = 1$

Demostración:
Algebraica: Si $x = 0,\widehat{9}$, entonces $10x = 9,\widehat{9}$, de donde, $10x - x = 9,\widehat{9} - 0,\widehat{9} = 9$ y, por tanto, $9x = 9 \Rightarrow x = 1$.

Numérica: Sabemos que $\frac{1}{3} = 0,\widehat{3}$, luego $3 \cdot \frac{1}{3} = 3 \cdot 0,\widehat{3}$ y efectuando las operaciones $1 = 0,\widehat{9}$.