SdA 6: Desentrañando el misterio: las partes y el todo

1. La aventura de los números fraccionarios

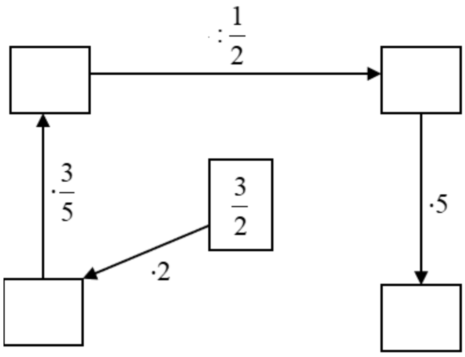
Imagina que eres un explorador en una isla misteriosa. La isla está dividida en secciones que se representan con números fraccionarios. Algunas secciones son seguras (+) y otras son peligrosas (–).

1. Comienzas en la sección 0.
2. Te mueves a la sección $+\frac{3}{4}$, que es segura. ¿En qué sección estás ahora?
3. Luego, te mueves a la sección $-\frac{5}{6}$, que es peligrosa. ¿A qué sección vas?
4. Encuentras un mapa que te indica moverte a la sección $+\frac{7}{8}$. ¿En qué sección te encuentras?
5. Finalmente, el mapa te indica moverte a la sección $-\frac{2}{3}$. ¿En qué sección terminas? (***Indica el resultado final mediante una operación combinada, teniendo en cuenta todos los movimientos***)

2. Planificación de un viaje

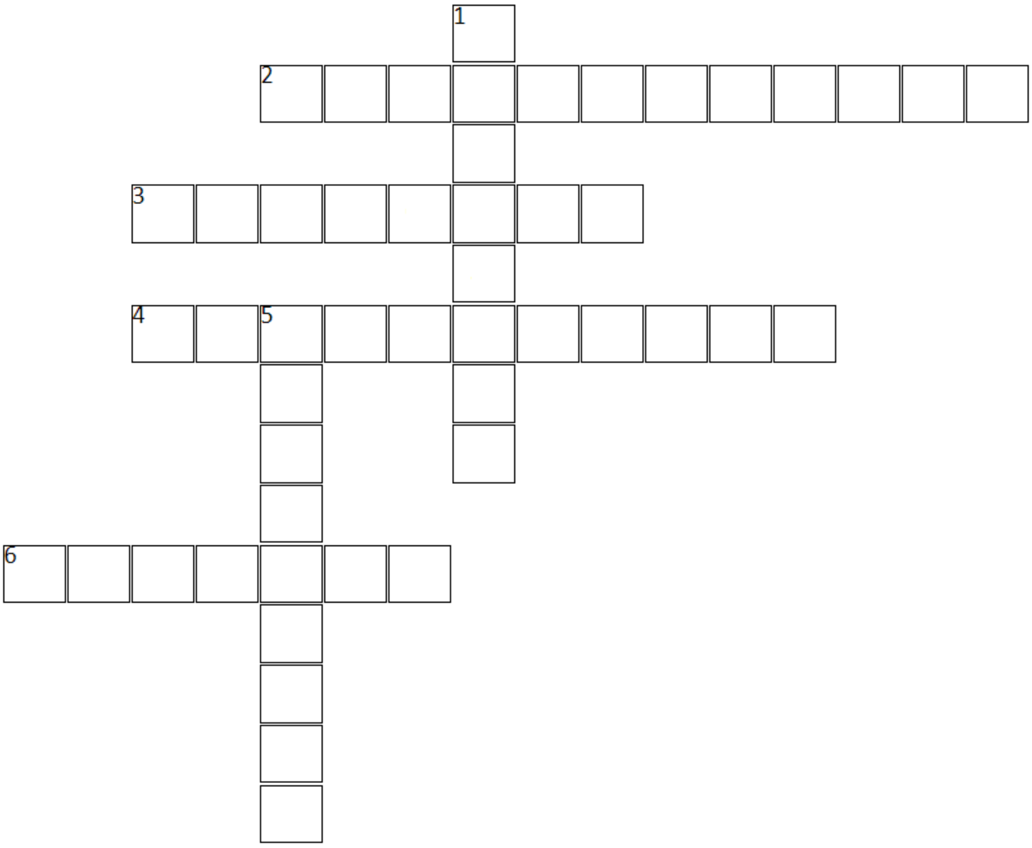
Estás planeando un viaje de 4 horas y quieres pasar $\frac{1}{4}$ del tiempo conduciendo, $\frac{1}{2}$ del tiempo visitando un museo y el resto del tiempo comiendo y descansando. ¿Cuánto tiempo dedicarías a cada actividad? Puedes explorar esto más a fondo al cambiar el número de actividades que quieres hacer, o la cantidad de tiempo que tienes para el viaje. Esto te ayudará a entender cómo las fracciones pueden ayudarte a planificar tu tiempo de manera efectiva.

3. Completa:



4. Crucigrama:

1. ¿Qué operación es una fracción?
2. Representan la misma cantidad.
3. División con divisor distinto de cero
4. Partes en que se divide la unidad.
5. Partes que se toman.
6. Fracción que, al multiplicarla por la fracción dada, da como resultado 1.



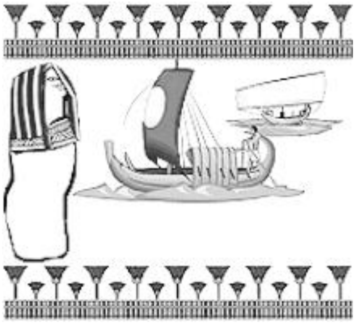
5. Lectura: un poco de historia de las fracciones

¿Qué es un número fraccionario?

En esta explicación, nos va a ayudar nuestro amigo el **UNO** egipcio.

Todos los años, en mi país, el Antiguo Egipto (ya sabes... el de las pirámides y los faraones) a mediados de año, hacia el mes de julio, el río crecía y crecía; traía tanta agua desde el interior de África que inundaba todas las tierras de labranza por las que cruzaba camino del mar Mediterráneo.

Esto, por muy raro que parezca, era esperado con mucha alegría por toda la gente. La razón está en que, gracias a las inundaciones, el río dejaba sobre los campos una fina capa de elementos fertilizantes (el limo) que traía arrastrando en sus aguas. La inundación duraba hasta el mes de septiembre.

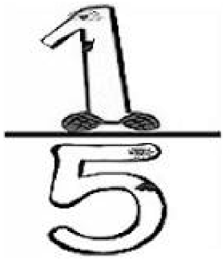


En esas fechas el faraón enviaba a los agrimensores (señores que medían los campos), que, ayudados de una cuerda con nudos a una misma distancia, repartían los terrenos entre los campesinos.

A estos medidores de cuerda les asaltó un gran problema:

Había veces que, al medir un campo, sobraba o faltaba un trozo de cuerda. Los campos no podían medir lo que ellos quisieran.

Las cuerdas eran unidades de medida y ellos tenían que verificar que cada campo tenía un determinado número de cuerdas por cada lado.



¿Qué hacer?
Ellos lo solucionaron inventando un nuevo número, el número fraccionario, que es el cociente de dos números naturales (bueno, en realidad de dos números enteros).
Sin embargo, los egipcios utilizaron solo las fracciones cuyo numerador es 1 y cuyo denominador es 2, 3, 4, ... y las fracciones 2/3 y 3/4 y con ellas conseguían hacer cálculos fraccionarios de todo tipo. Imagínate lo que es trabajar solo con esas fracciones.

Chris Brown

¿Quién más utilizó las fracciones?
Por su parte los babilonios (que vivían en Mesopotamia y fueron (entre otros) los constructores de los Zigurats; también os tiene que sonar el rey Nabucodonosor) desarrollaron un eficaz sistema de notación fraccionaria (cómo representar las fracciones), que permitió establecer aproximaciones decimales verdaderamente sorprendentes. Esta evolución y simplificación del método fraccionario permitió el desarrollo de nuevas operaciones que ayudaron a la comunidad matemática de siglos posteriores a hacer buenos cálculos de, por ejemplo, las raíces cuadradas.

Para los babilónicos era relativamente fácil conseguir aproximaciones muy precisas en sus cálculos utilizando su sistema de notación fraccionaria, la mejor de que dispuso civilización alguna hasta la época del Renacimiento.

En la china antigua destaca el hecho de que en la división de fracciones se exige la previa reducción de éstas a común denominador.
Los chinos conocían bien las operaciones con fracciones ordinarias, hasta el punto de que en este contexto hallaban el mínimo común denominador de varias fracciones, aunque algunas veces adoptaron ciertas «artimañas» de carácter decimal para aligerar un poco la manipulación de las fracciones.

Por su parte, los griegos mostraron sus grandes dotes en cuanto a geometría en algunas construcciones geométricas de segmentos cuyas longitudes son fraccionarias.
Los hindúes (Aryabhata, Bramagupta…), en los siglos VI y VII, fueron quienes establecieron las reglas de las operaciones con fracciones. Sin embrago, las reglas que utilizamos en la actualidad para trabajar con fracciones, fueron obra de Mahavira, en el siglo IX, y Bhaskhara, en el siglo XII.

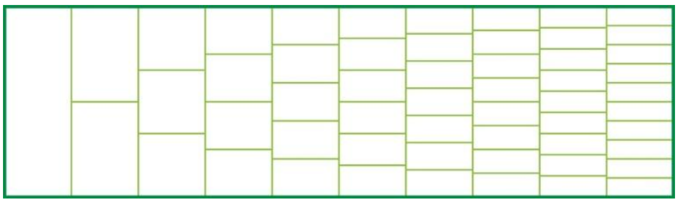
Por último, parece que el nombre de fracción se lo debemos a Juan de Luna, que tradujo al latín, en el siglo XII, el libro de aritmética de «Al-Juarizmi». Él empleó la palabra «Fractio» para traducir la palabra árabe «al Kasr», que significa quebrar o romper.

Responde a las siguientes preguntas:

a) ¿Qué es un número fraccionario según los antiguos egipcios y cómo lo utilizaban en la medición de campos?
b) ¿Cómo los babilonios desarrollaron un sistema de notación fraccionaria y cómo les ayudó en sus cálculos matemáticos?
c) ¿Cómo los antiguos chinos manejaban las operaciones con fracciones ordinarias y qué técnicas utilizaban para simplificar la manipulación de las fracciones?
d) ¿Quiénes fueron los responsables de establecer las reglas de las operaciones con fracciones que utilizamos en la actualidad y en qué siglo se establecieron estas reglas?

6. Diagrama de Freudenthal

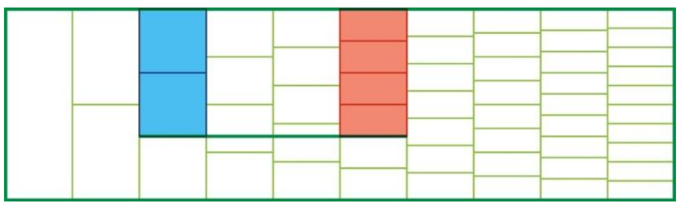
La figura que ves a continuación se llama ***diagrama de Freudenthal***. Vamos a utilizarlo para comparar fracciones.



Usando este diagrama vamos a ver si $\frac{2}{3}$ y $\frac{4}{6}$ son equivalentes. Fíjate en el proceso:

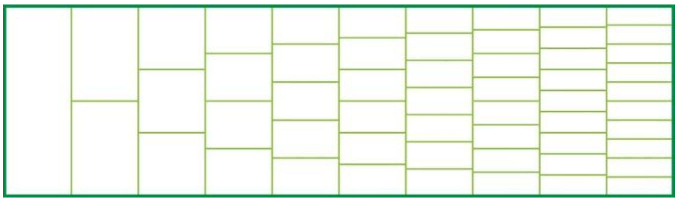
1.º Coloreamos $\frac{2}{3}$ y $\frac{4}{6}$ en el diagrama.

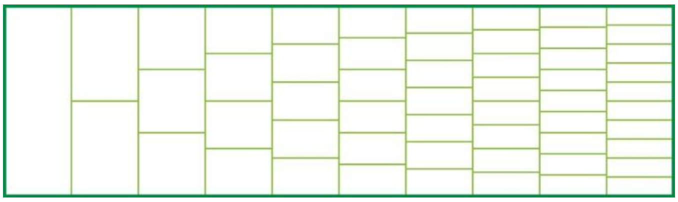
2.º Trazamos una línea horizontal por $\frac{2}{3}$.



3.º Si la línea coincide con el final de $\frac{4}{6}$ que las fracciones son equivalentes, como pasa en este caso.

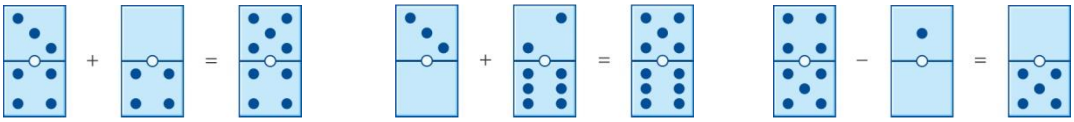
Repitiendo el proceso anterior, decide si $\frac{1}{2}$ y $\frac{5}{10}$ son equivalentes. Haz lo mismo para $\frac{4}{5}$ y $\frac{5}{7}$.





7. **Dominó**

Las siguientes fichas de dominó representan sumas y restas de fracciones. Añade a las fichas que están en blanco los puntos necesarios para que se cumplan las igualdades.



8. **Lectura: el té de las cinco**

–Eso significa que el Sombrerero Loco y sus amigos están tomando el té de las cinco –comentó Charlie–. Lo cual no tiene nada de extraño, pues lo toman a todas horas.

Y, efectivamente, siguieron avanzando por la diagonal del bosque de números y poco tiempo después vieron al Sombrerero y la Liebre de Marzo tomando el té en una mesa dispuesta bajo un árbol. Entre ellos, el Lirón dormía profundamente.

La mesa era muy grande, y sin embargo los tres comensales se habían agrupado muy juntos en una esquina. Al ver acercarse a Alicia, la Liebre y el Sombrerero empezaron a gritar:

–¡No hay sitio! ¡No hay sitio!

–Hay sitio de sobra –replicó la niña, indignada, a la vez que se sentaba en una amplia butaca que había a la cabecera de la mesa. Charlie, que la seguía sonriendo enigmáticamente, se sentó a su lado.

–¿Qué prefieres, media tarta de manzana o dos cuartas partes? –le preguntó la Liebre de Marzo a Alicia, mientras le ofrecía una obsequiosa sonrisa.

–¿Te estás quedando conmigo? Media tarta es lo mismo que dos cuartas partes –dijo la niña.

–Muy bien, acabas de descubrir las fracciones equivalentes –la felicitó el Sombrerero Loco.

–Claro: $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}$ –añadió la Liebre.

–Aunque a lo mejor eres una glotona y prefieres comerte el 50 % de la tarta –dijo el Sombrerero.

–¡Ya está bien de tomarme el pelo! –protestó Alicia–. El 50 % de la tarta también es lo mismo que la mitad.

–¡Qué niña tan lista! –exclamó la Liebre de Marzo, aplaudiendo con las orejas.

–¿Por qué el 50 % es lo mismo que la mitad? –preguntó el Lirón sin abrir los ojos.

–Porque si de cien partes tomas cincuenta, es lo mismo que tomar la mitad –contestó rápidamente Alicia.

–Ah, ¿sí? ¡Cómo se nota que no eres tú la que tiene que partir la tarta! –replicó el Sombrerero–. ¿Crees que es lo mismo partirla en dos trozos y darte uno que partirla en cien trozos y darte cincuenta?

Carlo Frabetti: ***Malditas matemáticas.***
Alicia en el País de los Números, 2000.

Responde a las siguientes preguntas:

a) ¿Qué es una fracción equivalente y cómo se ilustra en la conversación entre Alicia, la Liebre de Marzo y el Sombrerero Loco?
b) ¿Cómo se explica el concepto del 50 % en la conversación y por qué es lo mismo que la mitad?
c) ¿Cómo se relaciona el concepto de fracciones equivalentes con la división de una tarta en la conversación?
d) ¿Por qué el Sombrerero Loco sugiere que puede haber una diferencia entre dividir una tarta en dos y dividirla en cien partes? ¿Qué concepto matemático podría estar implicado aquí?

9. Ejercicio con calculadora: tu serie favorita

Estima el valor de la siguiente suma «infinita». Para ello, ve sumando las dos primeras fracciones, luego las tres primeras… hasta que seas capaz de estimar dicha suma.

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 8}+\ldots$$

10. El triángulo de Sierpinski

Consideremos un triángulo de área 1 (iteración 0). En la primera iteración del triángulo de Sierpinski (se quita el triángulo del centro), cada uno de los triángulos que aparecen tiene área $\frac{1}{3}$, en la segunda iteración (se quitan los triángulos del centro de cada uno de los tres triángulos que tenemos), cada triángulo tiene área $\frac{1}{9}$… ¿Qué área tendrá un triángulo de la 6ª iteración? ¿Y de una iteración cualquiera?