

ASÍNTOTAS DE UNA FUNCIÓN

1. Estudia, y calcula en su caso, las asíntotas de una función:

1) $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}$

8) $f(x) = \log(x^2 - 16)$ (Solo verticales)

2) $f(x) = \frac{x}{x^2 - 9}$

9) $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$ (Solo horizontales)

3) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 1}$

10) $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^4 + 3}}$ (Solo horizontales)

4) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 4}$

11) $f(x) = \frac{x}{e^x}$

5) $f(x) = \ln \sqrt{x^2 + 1}$

12) $f(x) = e^{\frac{2x}{x^2 + 1}}$

6) $f(x) = \frac{x^2}{x - 1}$

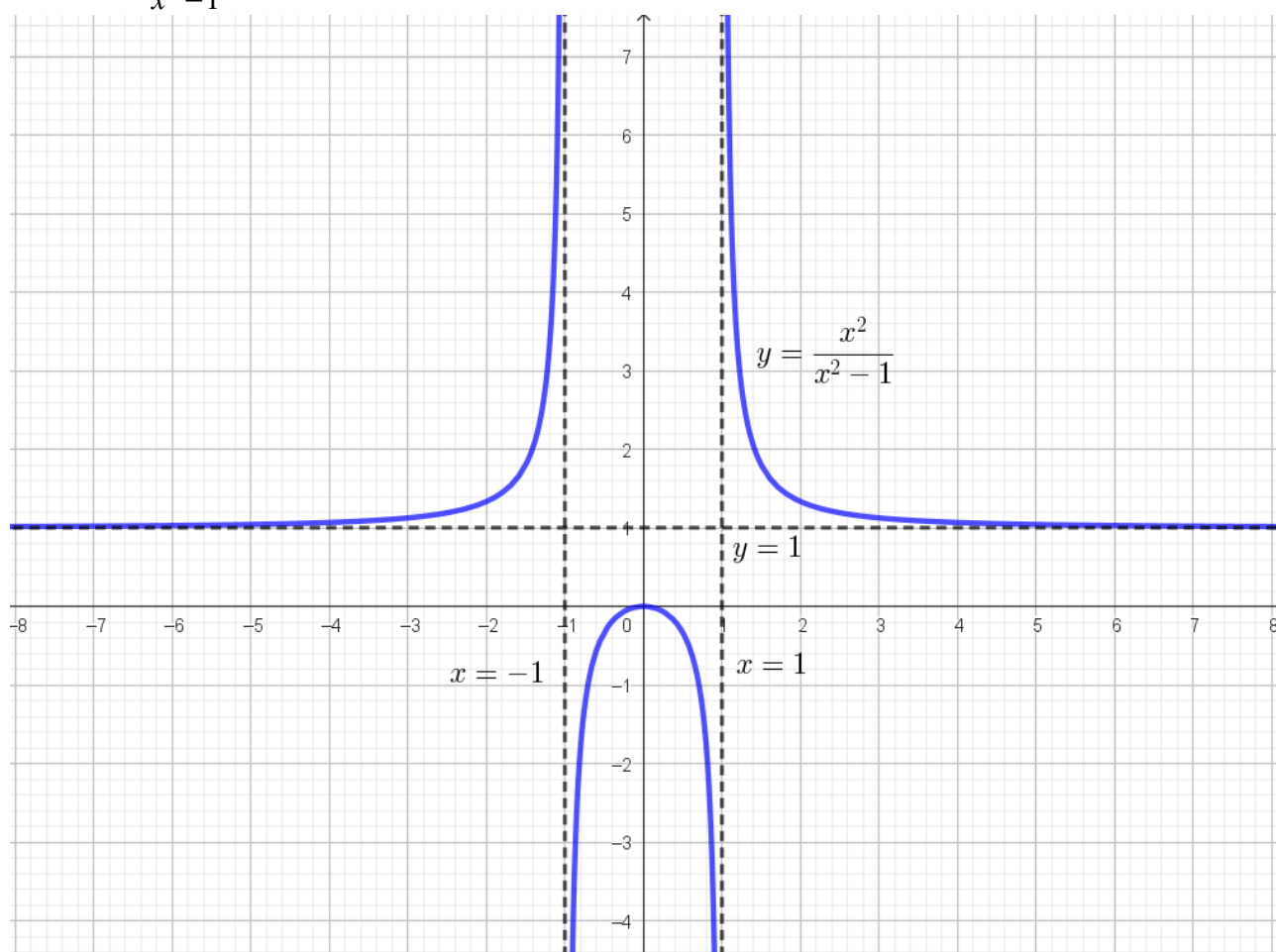
13) $f(x) = 2\sqrt{\frac{1}{x} - 1}$

7) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

14) $f(x) = \frac{x + 3}{e^x}$

Soluciones

1) $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}$



Asíntotas verticales

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \infty \text{ con } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty \end{cases} \Rightarrow x = 1 \text{ es una asíntota vertical}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \infty \text{ con } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty \end{cases} \Rightarrow x = -1 \text{ es una asíntota vertical}$$

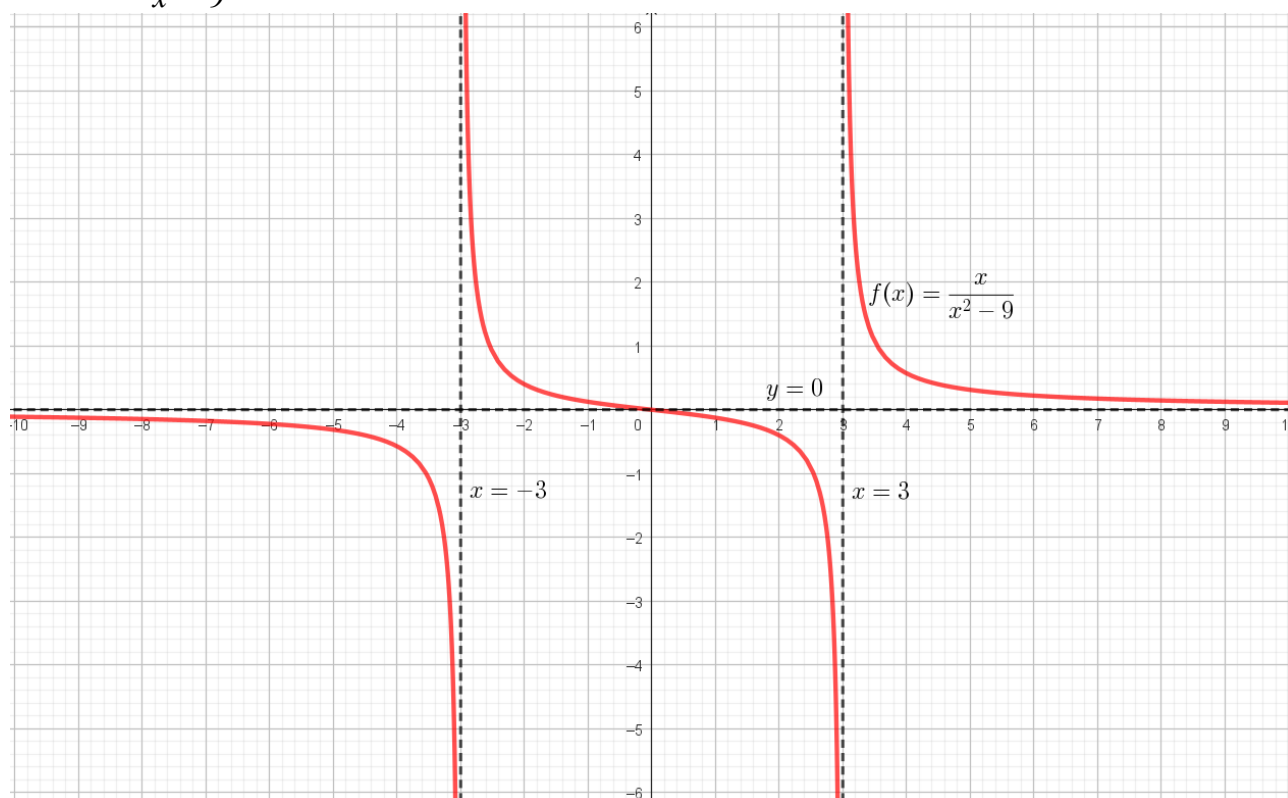
Asíntotas horizontales

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 - 1} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x^2}}{\frac{x^2 - 1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{x^2}} = 1 \Rightarrow y = 1 \text{ es una}$$

asíntota horizontal

Como consecuencia, la función no tiene asíntotas oblicuas.

$$2) f(x) = \frac{x}{x^2 - 9}$$



Asíntotas verticales

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \infty \text{ con } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty \end{cases} \Rightarrow x = 3 \text{ es una asíntota vertical}$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \infty \text{ con } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = -\infty \end{cases} \Rightarrow x = -3 \text{ es una asíntota vertical}$$

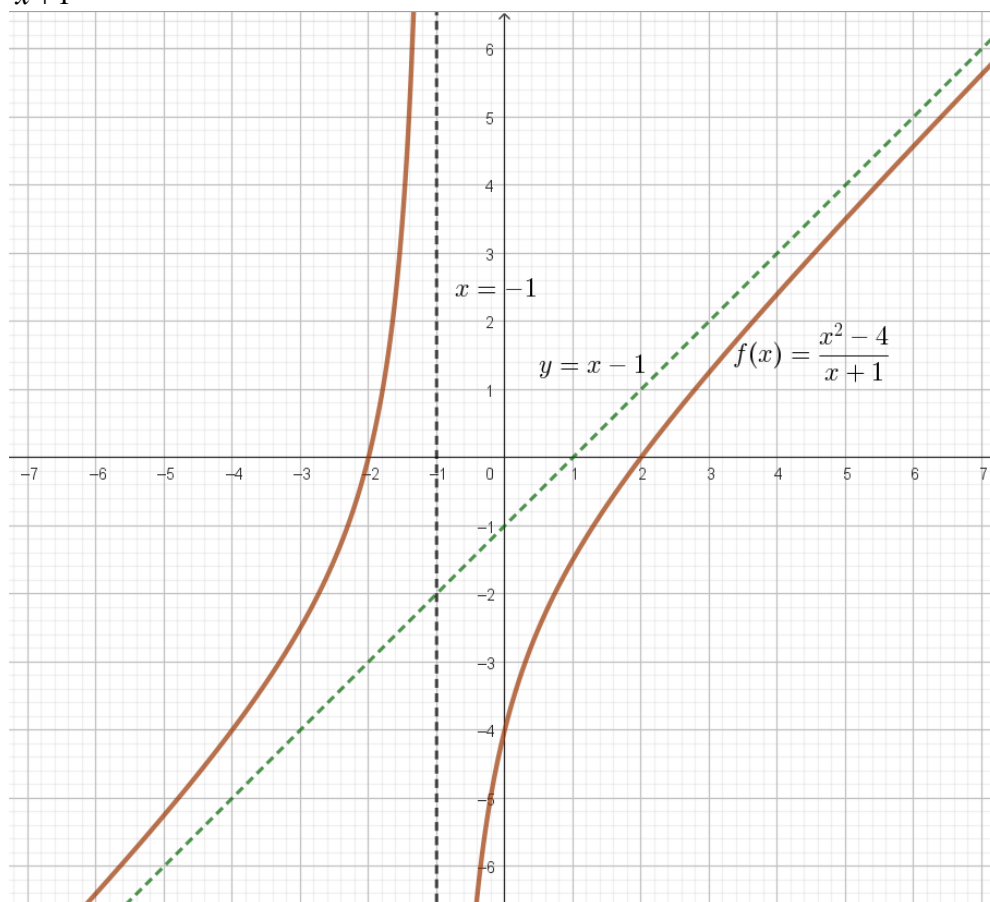
Asíntotas horizontales

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 - 9} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{x^2}}{\frac{x^2 - 9}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{9}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1 - \frac{9}{x^2}} = 0$$

$y = 0$ es una asíntota horizontal

Como consecuencia, la función no tiene asíntotas oblicuas.

3) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 1}$



Asíntotas verticales

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \infty \text{ con } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty \end{cases} \Rightarrow x = -1 \text{ es una asíntota vertical}$$

Asíntotas horizontales

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4}{x + 1} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2 - 4}{x^2}}{\frac{x + 1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} - \frac{4}{x^2}}{\frac{x}{x^2} + \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{4}{x^2}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \infty$$

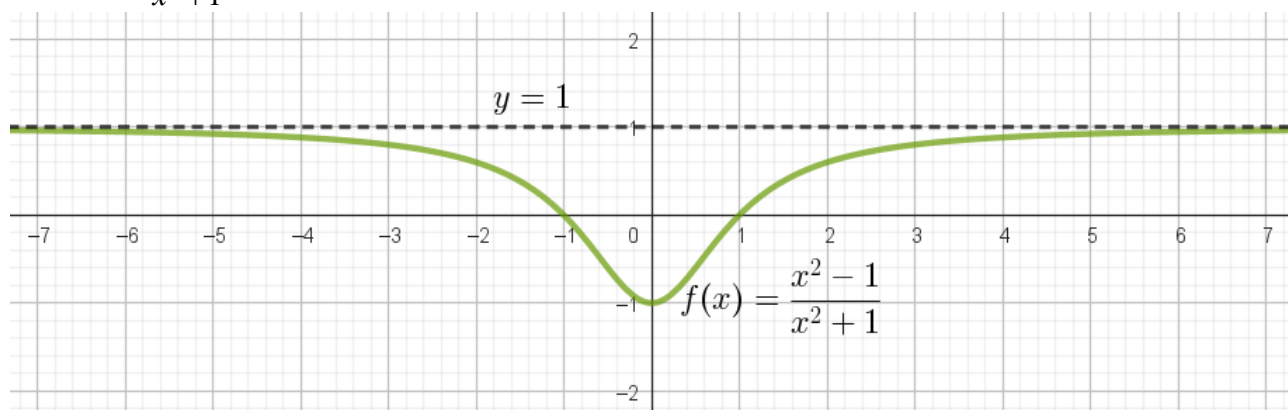
$\Rightarrow f(x)$ no tiene asíntotas horizontales

Asíntota oblicua

$$\begin{aligned}
 m &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2 - 4}{x + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4}{x(x + 1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4}{x^2 + x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2 - 4}{x^2}}{\frac{x^2 + x}{x^2}} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} - \frac{4}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} + \frac{x}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{4}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}} = 1 \Rightarrow m = 1 \\
 n &= \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 4}{x + 1} - x \right) = [\infty - \infty] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4 - x(x + 1)}{x + 1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4 - x^2 - x}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x - 4}{x + 1} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{-x - 4}{x}}{\frac{x + 1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{-x}{x} - \frac{4}{x}}{\frac{x}{x} + \frac{1}{x}} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1 - \frac{4}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = -1 \Rightarrow n = -1
 \end{aligned}$$

Por tanto, la recta $y = mx + n = x - 1$ es una asíntota oblicua.

4) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$



Asíntotas verticales

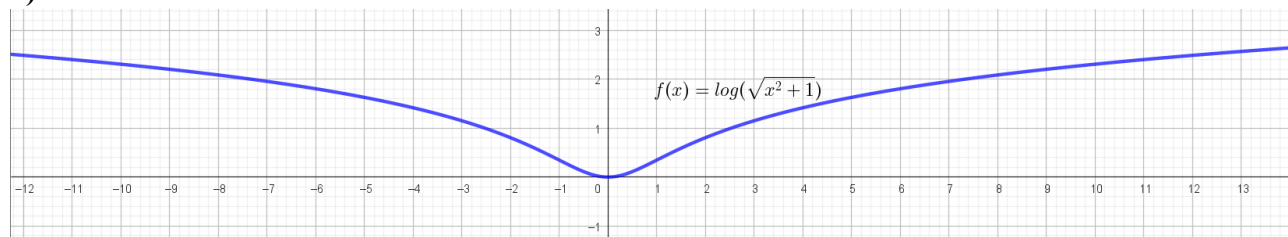
No tiene (ya que el denominador no se anula)

Asíntotas horizontales

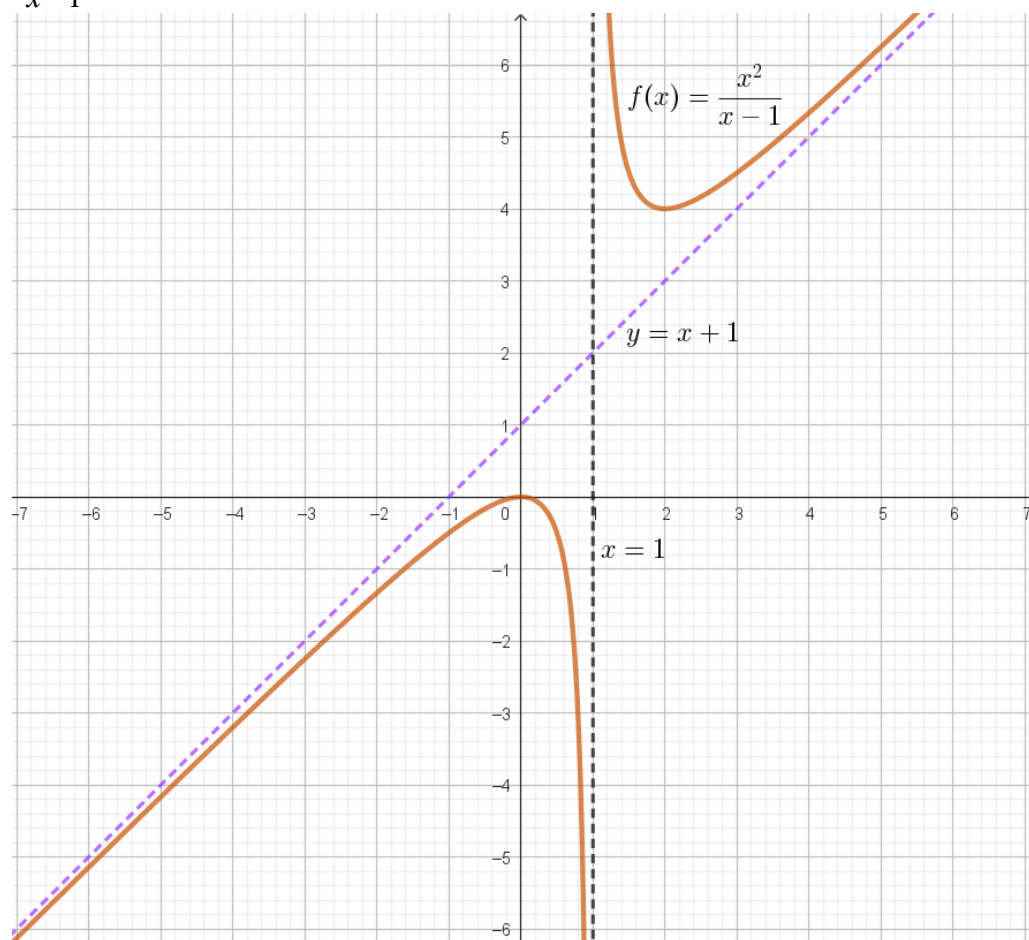
$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2 - 1}{x^2}}{\frac{x^2 + 1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} - \frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} = 1 \\
 &\Rightarrow y = 1 \text{ es una asíntota horizontal}
 \end{aligned}$$

Por tanto, no hay asíntotas oblicuas.

5) Esta función no tiene asíntotas.



6) $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$



Asíntotas verticales

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2}{x-1} = \left[\frac{1}{0} \right] = \infty \text{ con } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty \end{cases}$$

Por tanto, la recta $x = 1$ es una asíntota vertical.

Asíntotas horizontales

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x-1} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x^2}}{\frac{x-1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{x}{x^2} - \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} = \infty$$

Es decir, esta función no tiene asíntotas horizontales.

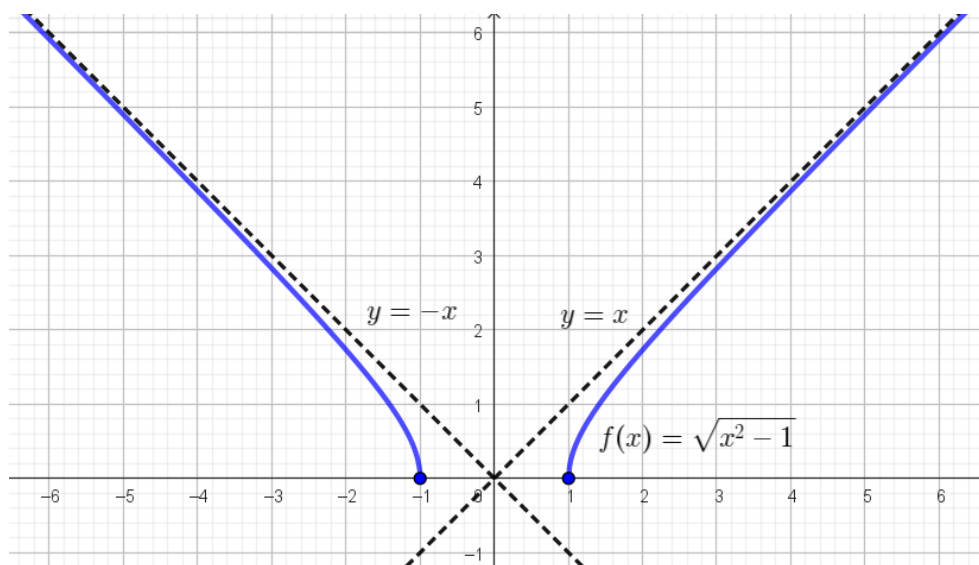
Asíntotas oblicuas

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{f(x)}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x-1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x-1} = 1 \Rightarrow m = 1$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - x(x-1)}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x^2 + x}{x-1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x-1} = 1 \Rightarrow n = 1 \end{aligned}$$

Así, la recta $y = x + 1$ es una asíntota oblicua.

7) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$



Asíntotas verticales

No tiene, que $\nexists a \in \mathbb{R} : \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$

Asíntotas horizontales:

No tiene, ya que $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 - 1} = \infty$

Asíntotas oblicuas:

$$m_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\frac{x^2}{x^2} - \frac{1}{x^2}}}{\frac{x}{x}} = 1$$

$$n_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 1} - x) = [\infty - \infty] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 1} - x)(\sqrt{x^2 - 1} + x)}{(\sqrt{x^2 - 1} + x)} = \dots = 0$$

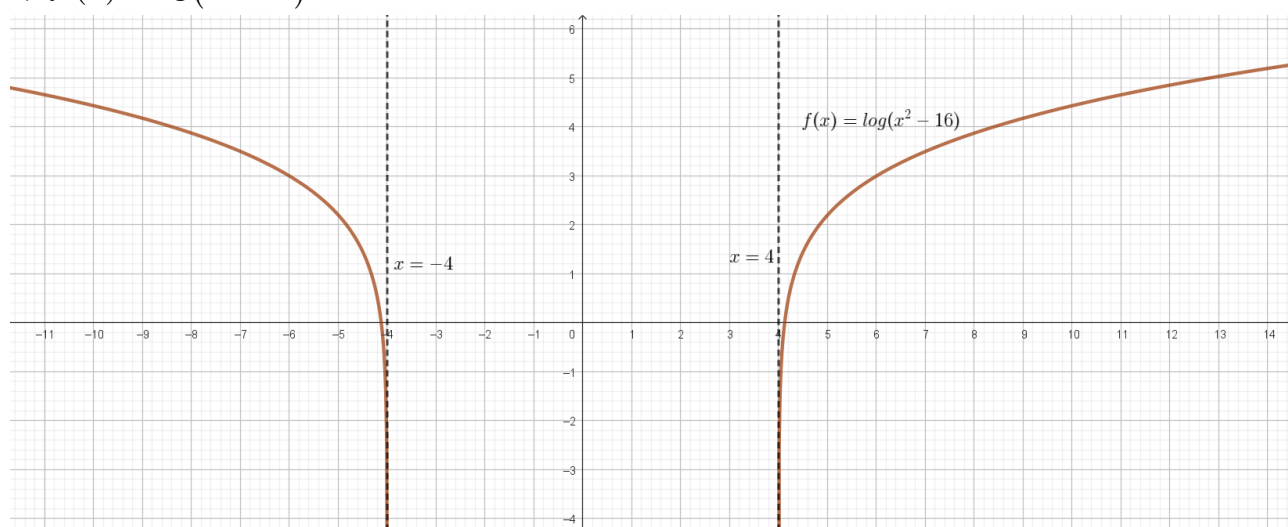
Así, la recta $y = x$ es una asíntota oblicua.

$$m_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{-x} = -1$$

$$n_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2-1} + x) = [\infty - \infty] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2-1} + x)(\sqrt{x^2-1} - x)}{(\sqrt{x^2-1} - x)} = \dots = 0$$

Así, la recta $y = -x$ es una asíntota oblicua.

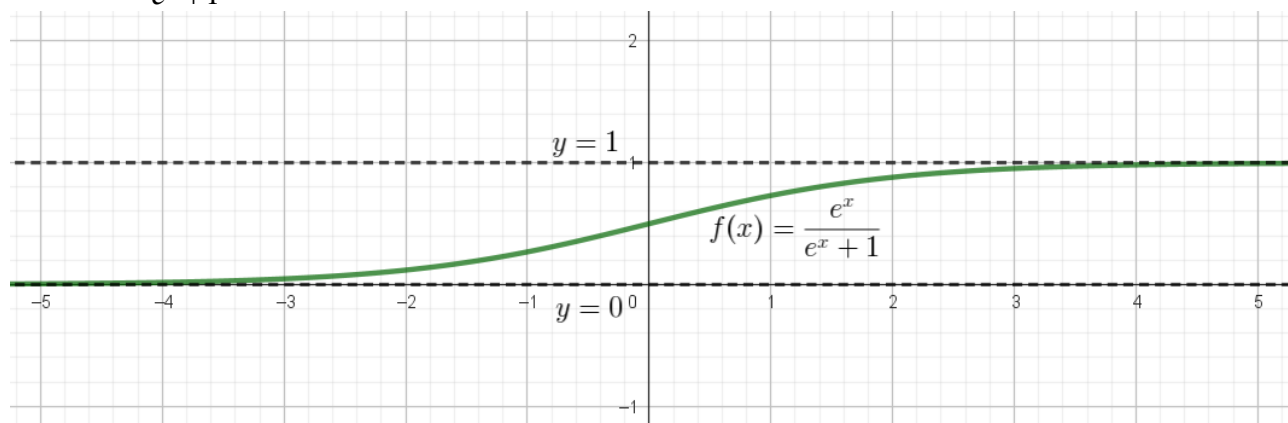
8) $f(x) = \log(x^2 - 16)$



Asíntotas verticales

$$\text{Dom}(f) = (-\infty, -4] \cup [4, +\infty) \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -4^-} \log(x^2 - 16) = -\infty \Rightarrow x = -4 \text{ es una A.V.} \\ \lim_{x \rightarrow 4^+} \log(x^2 - 16) = -\infty \Rightarrow x = 4 \text{ es una A.V.} \end{cases}$$

9) $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$

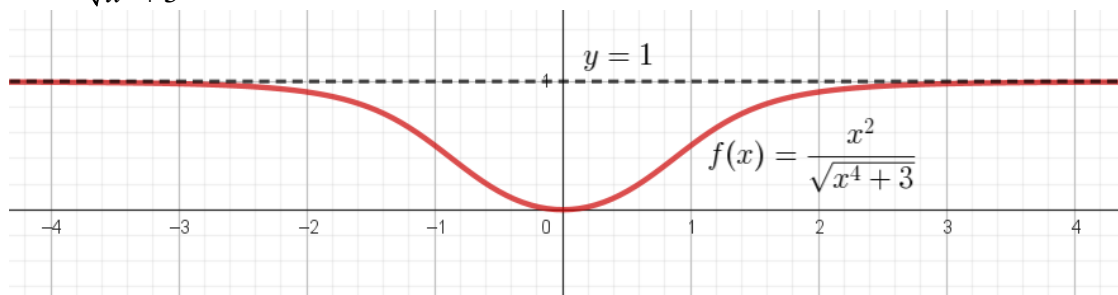


Asíntotas horizontales

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x + 1} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{e^x}{e^x}}{\frac{e^x}{e^x} + \frac{1}{e^x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{e^x}} = \left[\frac{1}{1+0} \right] = 1 \Rightarrow y = 1 \text{ es una A.H.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x + 1} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{e^x}{e^x}}{\frac{e^x}{e^x} + \frac{1}{e^x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{e^x}} = \left[\frac{1}{1 + \infty} \right] = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ es una A.H.}$$

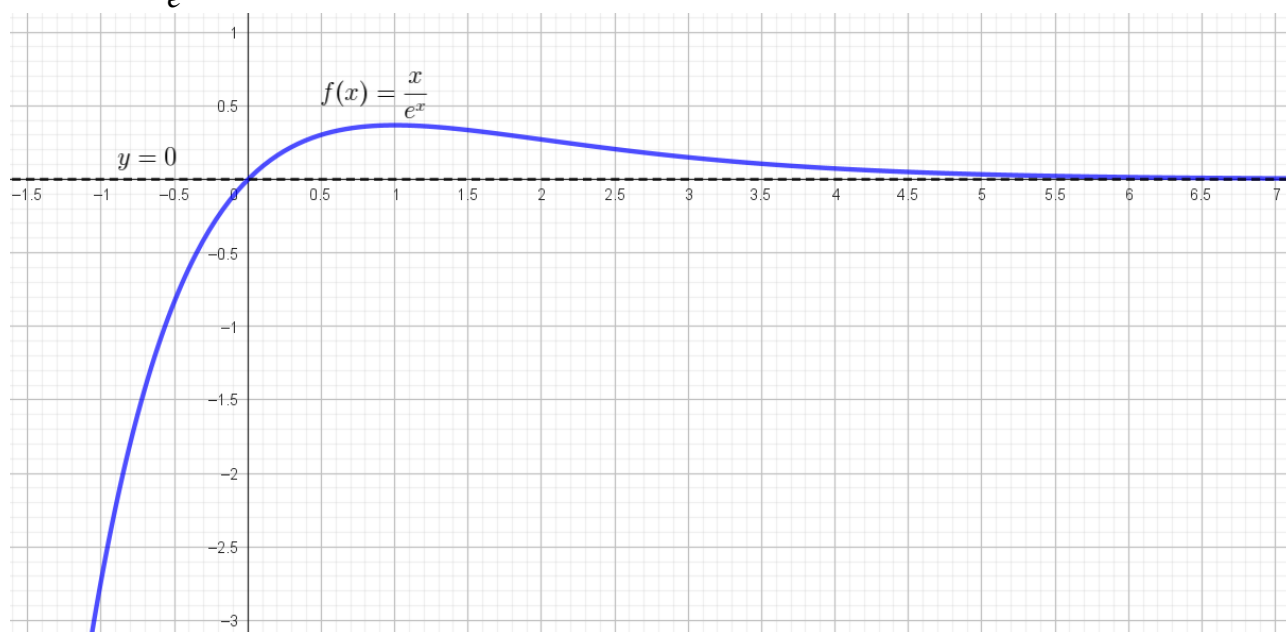
$$10) f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^4 + 3}}$$



Asíntotas horizontales

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^4 + 3}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2}}{\sqrt{\frac{x^4}{x^4} + \frac{3}{x^4}}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{3}{x^4}}} = 1 \Rightarrow y = 1 \text{ es una A.H.}$$

$$11) f(x) = \frac{x}{e^x}$$



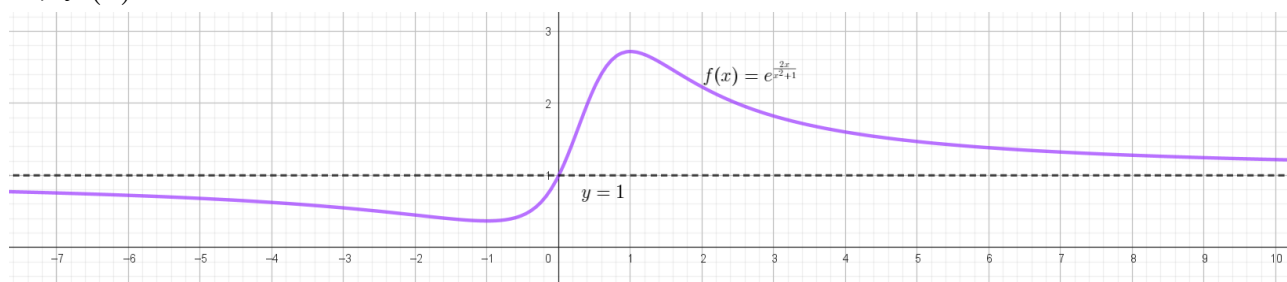
Asíntotas verticales: no tiene ya que su dominio es $\mathbb{R}$

Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ es una A.H.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^x} = -\infty$$

12) $f(x) = e^{\frac{2x}{x^2+1}}$

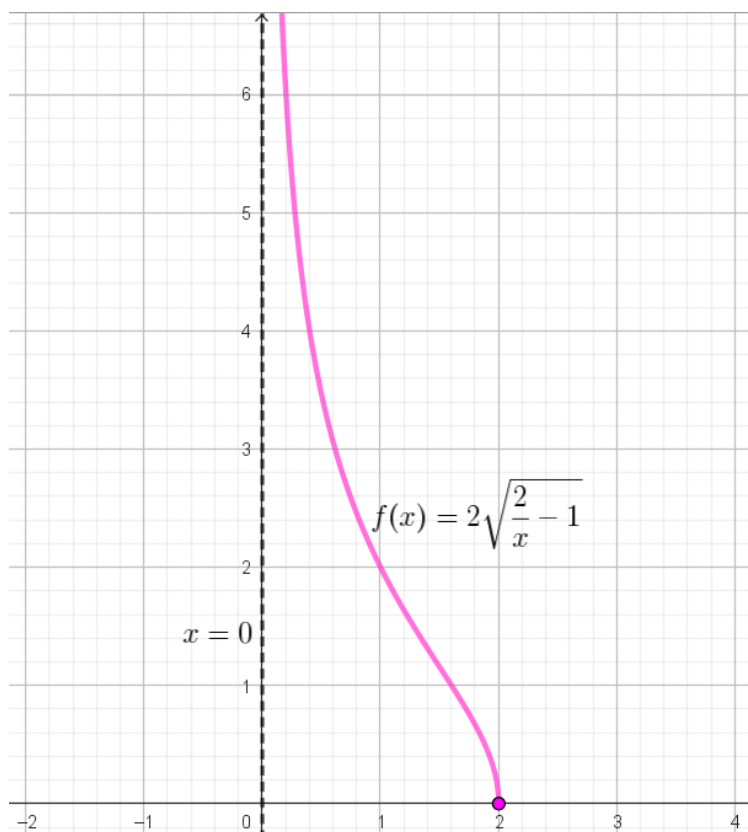


Asíntotas verticales: no tiene ya que su dominio es $\mathbb{R}$

Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{2x}{x^2+1}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x^2+1}} = e^0 = 1 \Rightarrow y = 1 \text{ es una A.H.}$$

13) $f(x) = 2\sqrt{\frac{2}{x} - 1}$



Estudiamos el dominio de la función:

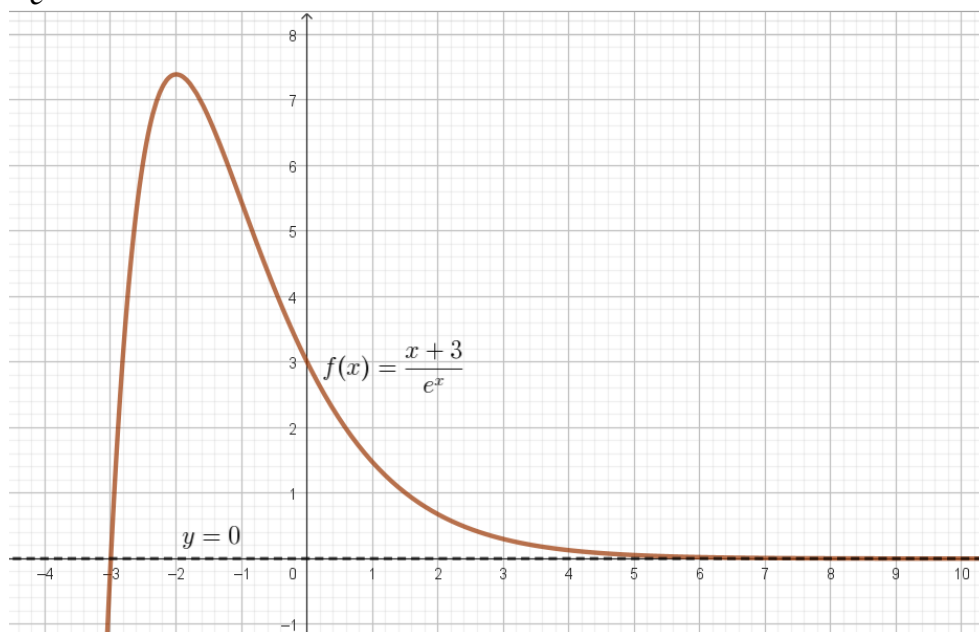
$$\frac{2}{x} - 1 = \frac{2-x}{x} \Rightarrow \frac{2-x}{x} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2-x \geq 0 \text{ y } x > 0 \\ \text{o} \\ 2-x < 0 \text{ y } x < 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Dom}(f) = (0, 2]$$

Asíntotas verticales:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2\sqrt{\frac{2}{x} - 1} = +\infty \Rightarrow x = 0 \text{ es una A.V.}$$

Como no tiene sentido calcular $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, ni $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, no tiene ni A.H., ni A.O.

14) $f(x) = \frac{x+3}{e^x}$



Asíntotas verticales: no tiene ya que su dominio es $\mathbb{R}$

Asíntotas horizontales:

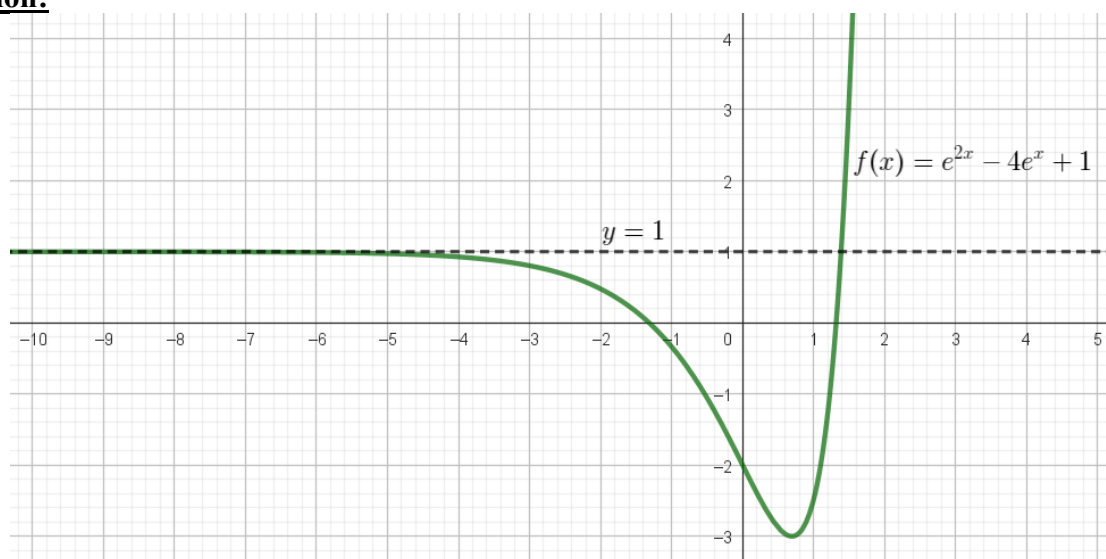
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+3}{e^x} = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ es una A.H.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+3}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x+3}{e^{-x}} = -\infty$$

2. Estudia las asíntotas de la siguiente función:

$$f(x) = e^{2x} - 4e^x + 1$$

Solución:



Asíntotas verticales:

No tiene, ya que $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$ y, por tanto, $\nexists a \in \mathbb{R} : \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$

Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{2x} - 4e^x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [e^x (e^x - 4) + 1] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{2x} - 4e^x + 1) = \left[\begin{array}{l} t = -x \\ x \rightarrow -\infty \Rightarrow t \rightarrow +\infty \end{array} \right] = \lim_{t \rightarrow +\infty} (e^{-2t} - 4e^{-t} + 1) =$$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-2t} - 4 \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-t} + \lim_{t \rightarrow +\infty} 1 = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{2t}} - 4 \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^t} + \lim_{t \rightarrow +\infty} 1 = 1 \Rightarrow y = 1 \text{ es una A.H.}$$

Asíntotas oblicuas:

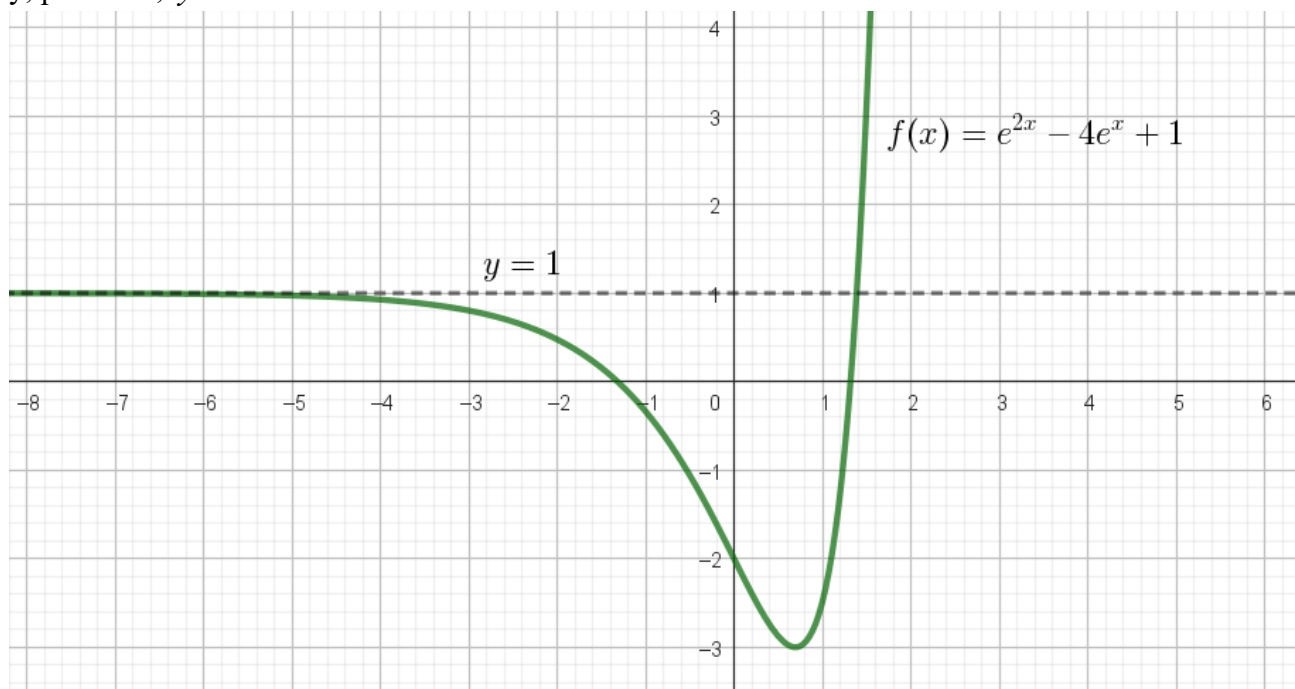
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{x} - 4 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = +\infty \Rightarrow \text{No tiene asíntotas oblicuas (cuando } x \rightarrow \infty)$$

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{2x}}{x} - 4 \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x} + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow m = 0$$

$$n = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{2x} - 4e^x + 1) = \left[\begin{array}{l} t = -x \\ x \rightarrow -\infty \Rightarrow t \rightarrow +\infty \end{array} \right] = \lim_{t \rightarrow +\infty} (e^{-2t} - 4e^{-t} + 1) =$$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-2t} - 4 \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-t} + \lim_{t \rightarrow +\infty} 1 = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{2t}} - 4 \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^t} + \lim_{t \rightarrow +\infty} 1 = 1 \Rightarrow n = 1$$

y, por tanto, $y = 0x + 1 = 1$ es una A.H.



3. Estudia las asíntotas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{|2x-3|}{x}$

b) $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{4-x^2}}$

Solución:

$$f(x) = \frac{|2x-3|}{x} = \begin{cases} \frac{2x-3}{x} & \text{si } x \geq \frac{3}{2} \\ \frac{-2x+3}{x} & \text{si } x < \frac{3}{2} \end{cases}$$

Se tiene que $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.

Asíntotas verticales:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|2x-3|}{x} = \left[\frac{3}{0} \right] \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|2x-3|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-2x+3}{x} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|2x-3|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-2x+3}{x} = +\infty \end{cases} \Rightarrow x=0 \text{ es una A.V.}$$

Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|2x-3|}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-3}{x} = 2 \Rightarrow y=2 \text{ es una A.H.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|2x-3|}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x+3}{x} = -2 \Rightarrow y=-2 \text{ es una A.H.}$$

Asíntotas oblicuas:

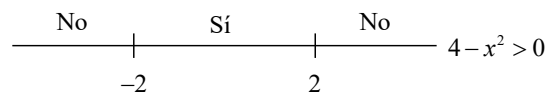
No tiene, ya que tiene asíntotas horizontales. Lo comprobamos de todas formas:

$$\left. \begin{aligned} m_1 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2x-3}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-3}{x^2} = 0 \\ n_1 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow y=2 \text{ (que es una A.H.)}$$

$$\left. \begin{aligned} m_2 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{-2x+3}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x+3}{x^2} = 0 \\ n_2 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow y=-2 \text{ (que es una A.H.)}$$

b) Dominio de la función:

$$\sqrt{4-x^2} > 0 \Rightarrow 4-x^2 > 0 \Rightarrow 4-x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$$



$$\text{Dom}(f) = (-2, 2)$$

Asíntotas verticales:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{2x}{\sqrt{4-x^2}} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x}{\sqrt{4-x^2}} = +\infty \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{en } x=-2 \text{ y en } x=2 \text{ lo que tiene la función es una rama infinita,}$$

no asíntotas verticales.

Asíntotas horizontales y oblicuas:

Como el dominio de la función es el intervalo $(-2, 2)$, no tienen sentido los límites en el infinito y, por tanto, no tienen ni asíntotas horizontales, ni asíntotas oblicuas.