

ECUACIONES MATRICIALES

1.- [Junio de 2000] Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad y \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 0 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}$$

Se pide:

Calcular la matriz inversa de A y la matriz inversa de B.

Hallar una matriz X tal que $A \cdot X \cdot B = C$

Solución:

Calculamos las inversas de A y de B:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[-2F_2+F_3]{-F_1+F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2:(-2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -3 & 2 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \\ & \xrightarrow{3F_2+F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3:(-1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\frac{F_3+F_2}{F_3+F_1}} \\ & \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \end{array} \right) \rightarrow \\ & \xrightarrow{-2F_2+F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \end{array} \right) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} \\ & \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1:(-2)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1+F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2:(\frac{2}{3})} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array} \right) \rightarrow \\ & \xrightarrow{\frac{1}{2}F_2+F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array} \right) \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Despejamos X:

$$AXB = C \rightarrow AXBB^{-1} = CB^{-1} \rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}CB^{-1} \rightarrow X = A^{-1}CB^{-1}$$

Obtenemos la matriz X:

$$X = A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 0 \\ 7 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 & 1 \\ 1 & 4 \\ 14 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -3 \\ 2 & 3 \\ 9 & 4 \end{pmatrix}$$

2- [Septiembre de 2000] Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ -2 & -8 & -6 \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcular una matriz X tal que $X \cdot A = 2B + C$

Solución:

Despejamos X:

$$XA = 2B + C \rightarrow XAA^{-1} = (2B + C)A^{-1} \rightarrow X = (2B + C)A^{-1}$$

Calculamos $2B + C$:

$$2B + C = 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ -2 & -8 & -6 \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Calculamos A^{-1} por el método de Gauss-Jordan:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{-F_1+F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2:3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \\ & \xrightarrow{-F_2+F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3:2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{array} \right) \xrightarrow{-F_3+F_1} \\ & \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{array} \right) \xrightarrow{F_1+F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{array} \right) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Calculamos X:

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3.- [Reserva 1 de 2000] Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Se pide:

1º) Calcular la matriz inversa de A .

2º) Calcular una matriz X tal que $AX + A = B$.

Solución:

Despejamos X :

$$AX + A = B \rightarrow AX = B - A \rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}(B - A) \rightarrow X = A^{-1}(B - A)$$

Calculamos A^{-1} por el método de Gauss-Jordan:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-F_1+F_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-F_3+F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{-F_2+F_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos $B - A$:

$$B - A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Obtenemos la matriz X :

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

4.- [Junio de 2001] Determina una matriz X tal que $A + 2 \cdot X \cdot B = C$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Solución:

Despejamos X :

$$A + 2XB = C \rightarrow 2XB = C - A \rightarrow XBB^{-1} = \frac{1}{2}(C - A)B^{-1} \rightarrow X = \frac{1}{2}(C - A)B^{-1}$$

De otra forma:

$$A + 2XB = C \rightarrow X \cdot 2B = C - A \xrightarrow{D := 2B} XDD^{-1} = (C - A)D^{-1} \rightarrow X = (C - A)D^{-1}$$

Calculamos la inversa de la matriz D por el método de Gauss-Jordan:

$$\begin{aligned} D = 2B = 2 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 4 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \\ \xrightarrow{F_1:2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) &\xrightarrow{\substack{-F_1+F_2 \\ 2F_1+F_2}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3:4} \\ \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{array} \right) &\xrightarrow{F_2:4} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{\frac{1}{2}F_3+F_2 \\ -F_3+F_1}} \\ \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{array} \right) &\xrightarrow{F_2+F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{array} \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow D^{-1} &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{3}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Calculamos $C - A$:

$$C - A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & -1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 8 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

Obtenemos la matriz X :

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 8 & -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{3}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

5.- [Reserva 1 de 2001] Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ 3 & 5 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Halla otra matriz X tal que $A - BX = C$.

Solución:

Despejamos X :

$$A - BX = C \rightarrow A - C = BX \rightarrow B^{-1}(A - C) = B^{-1}BX \rightarrow B^{-1}(A - C) = X$$

Calculamos B^{-1} por el método de Gauss-Jordan:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1+F_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-F_2+F_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{\begin{matrix} -F_3+F_2 \\ -F_3+F_1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2+F_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos X :

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 8 & -2 \\ 3 & 5 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 3 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -3 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$$

6.- [Septiembre de 2002] Considerando las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Calcular una matriz X que verifique: $AX = BX + C$

Solución:

Despejamos X :

$$AX = BX + C \rightarrow AX - BX = C \rightarrow (A - B)X = C \rightarrow (A - B)^{-1}(A - B)X = (A - B)^{-1}C \rightarrow$$

$$\rightarrow X = (A - B)^{-1}C$$

Calculamos $(A - B)^{-1}$ por el método de Gauss-Jordan:

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & | & 1 & 0 \\ 1 & 2 & | & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 0 & 1 \\ 0 & 4 & | & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2:4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 0 & 1 \\ 0 & 1 & | & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2F_2+F_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & | & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos X :

$$X = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

7.- [Reserva 1 de 2002] Considerando las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y B una matriz que verifica:

$$2A + B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Calcular $A^2 + B^2$

b) Calcular la matriz inversa de la matriz producto AB .

Solución:

$$a) A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow B^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 + B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b) AB = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \det(AB) = 0 \rightarrow \nexists (AB)^{-1}$$

8.- [Junio de 2003] Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

1) Halla la matriz inversa de A .

2) Resuelve la ecuación matricial $AX - B = C$.

3) Calcula la matriz X .

Solución:

1)

$$\det A = 4 \quad \text{y} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$2) AX - B = C \rightarrow AX = B + C \rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}(B + C) \rightarrow X = A^{-1}(B + C)$$

3)

$$X = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 1 \\ \frac{5}{4} & 0 \\ -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

9.- [Septiembre de 2003] Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -3 & -3 & 3 \\ 4 & 5 & -5 \end{pmatrix}$$

1. Halla la matriz inversa de A .
2. Resuelve la ecuación matricial $XA = A + B$.
2. Calcula la matriz X .

Solución:

1)

$$\det A = 3 \quad \text{y} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$2) \quad XA = A + B \rightarrow XAA^{-1} = (A + B)A^{-1} \rightarrow X = (A + B)A^{-1}$$

3)

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ -3 & -2 & 3 \\ 3 & 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

10.- [Reserva 1 de 2003] Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \text{ e } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- 1) Halla la matriz inversa de $A - I$.
- 2) Resuelve la ecuación matricial $XA - B = X$.
- 3) Calcula la matriz X .

Solución:

1)

$$\det(A - I) = 2 \quad \text{y} \quad (A - I)^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ \frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$2) \quad XA - B = X \rightarrow XA - X = B \rightarrow X(A - I) = B \rightarrow X(A - I)(A - I)^{-1} = B(A - I)^{-1} \rightarrow X = B(A - I)^{-1}$$

3)

$$X = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ \frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 0 & 1 \\ 12 & -1 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

11.- [Reserva 2 de 2003] Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 10 & 4 & -5 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

- 1) Halla las matrices inversas de A y B .
- 2) Resuelve la ecuación matricial $AXB = C$.
- 3) Calcula la matriz X .

Solución:

1)

$$\det A = 3 \quad \text{y} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\det B = -3 \quad \text{y} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$2) AXB = C \rightarrow A^{-1}AXB = A^{-1}C \rightarrow XBB^{-1} = A^{-1}CB^{-1} \rightarrow X = A^{-1}CB^{-1}$$

3)

$$X = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 4 & -5 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

12.- [Junio de 2004] 1) Resuelve la ecuación matricial $XA + A' = XB$, siendo A' la matriz transpuesta de A .

$$2) \text{ Halla la matriz } X \text{ sabiendo que } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ \frac{-3}{2} & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$1) \quad XA + A^t = XB \rightarrow XA - XB = -A^t \rightarrow X(A - B) = -A^t \rightarrow \\ X(A - B)(A - B)^{-1} = -A^t(A - B)^{-1} \rightarrow X = -A^t(A - B)^{-1}$$

$$2) \quad \det(A - B) = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad (A - B)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

13.- [Septiembre de 2004] 1) Resuelve la ecuación matricial $XA + XA^t = C$, siendo A^t la matriz transpuesta de A .

$$2) \text{ Halla la matriz } X \text{ sabiendo que } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$1) \quad XA + XA^t = C \rightarrow X(A + A^t) = C \rightarrow X(A + A^t)(A + A^t)^{-1} = C(A + A^t)^{-1} \rightarrow X = C(A + A^t)^{-1}$$

$$2) \quad \det(A + A^t) = -2 \quad \text{y} \quad (A + A^t)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

14.- [Reserva 1 de 2004] 1) Resuelve la ecuación matricial $X + 3A^{-1} = A + B$, siendo A^{-1} la matriz inversa de A .

$$2) \text{ Halla la matriz } X \text{ sabiendo que } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ -3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$1) \det A = 3 \quad \text{y} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$2) X = A + B - 3A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & -3 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ -3 & -1 & -1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

15.- [Reserva 2 de 2004] 1) Resuelve la ecuación matricial $XA + X = B$.

$$2) \text{ Halla la matriz } X \text{ sabiendo que } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ -3 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$1) XA + X = B \rightarrow X(A + I) = B \rightarrow X(A + I)(A + I)^{-1} = B(A + I)^{-1} \rightarrow X = B(A + I)^{-1}$$

$$2) \det(A + I) = 8 \quad \text{y} \quad (A + I)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ -3 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

16.- [Junio de 2005] 1) Despeja la matriz X en la ecuación: $AX - A = I - AX$

$$2) \text{ Halla la matriz } X \text{ sabiendo que } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$1) \quad AX - A = I - AX \rightarrow AX + AX = I + A \rightarrow 2AX = I + A \rightarrow (2A)^{-1} (2A)X = (2A)^{-1} (I + A) \rightarrow \\ \rightarrow X = (2A)^{-1} (I + A)$$

$$2) \quad 2A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow (2A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/6 & -1/6 & 1/3 \\ 1/3 & 1/6 & -1/3 \\ -1/6 & 1/6 & 1/6 \end{pmatrix} \text{ e } I + A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ X = (2A)^{-1} (I + A) = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/6 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/6 & 1/6 & 2/3 \end{pmatrix}$$

17.- [Septiembre de 2005] 1) Despeja la matriz X en la ecuación: $AX + A^{-1}X = I$ siendo A^{-1} la matriz inversa de A .

$$2) \text{ Hallar la matriz } X \text{ sabiendo que } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$1) \quad AX + A^{-1}X = I \rightarrow (A + A^{-1})X = I \rightarrow (A + A^{-1})^{-1} (A + A^{-1})X = (A + A^{-1})^{-1} I \rightarrow X = (A + A^{-1})^{-1}$$

$$2) \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow A + A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \\ X = (A + A^{-1})^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -3/10 & 2/5 \\ 0 & 1/5 & 2/5 \\ 0 & 2/5 & -1/5 \end{pmatrix}$$

18.- [Reserva 1 de 2005] 1) Despeja la matriz X en la ecuación: $X - A^2X = B$

$$2) \text{ Hallar la matriz } X \text{ sabiendo que } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} -2 & -6 & -2 \\ -2 & -2 & -3 \\ -6 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$1) \quad X - A^2X = B \rightarrow IX - A^2X = B \rightarrow (I - A^2)X = B \rightarrow X = (I - A^2)^{-1} B$$

$$2) \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow I - A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \\ -2 & -4 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} \det(I - A^2) = -20 \\ (I - A^2)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & -2/5 & -1/10 \\ -1/10 & 1/5 & -1/5 \\ -2/5 & -1/5 & 1/5 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

19.- [Reserva 2 de 2005] 1) Despeja la matriz X en la ecuación: $A - XB = C$

2) Halla la matriz X sabiendo que

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -5 \\ -3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$1) A - XB = C \rightarrow A - C = XB \rightarrow (A - C)B^{-1} = X$$

$$2) A - C = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -6 \\ 1 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} -2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ 1/3 & 1/3 & -1/3 \end{pmatrix} \rightarrow X = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

20.- [Junio de 2006] 1) Despeja la matriz X en la ecuación: $AX - X = BX + C$

$$2) \text{ Halla la matriz } X \text{ sabiendo que } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$1) AX - X = BX + C \rightarrow AX - IX - BX = C \rightarrow (A - I - B)X = C \rightarrow X = (A - I - B)^{-1}C$$

$$2) A - I - B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} \det(A - I - B) = -5 \\ (A - I - B)^{-1} = \begin{pmatrix} -3/5 & -1/5 & 1/5 \\ -1/5 & -2/5 & 2/5 \\ -4/5 & -3/5 & -2/5 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

21.- [Septiembre de 2006] 1) Despeja la matriz X en la ecuación: $XA^2 - B = X$

$$2) \text{ Halla la matriz } X \text{ sabiendo que } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$1) XA^2 - B = X \rightarrow XA^2 - B = XI \rightarrow XA^2 - XI = B \rightarrow X(A^2 - I) = B \rightarrow X = B(A^2 - I)^{-1}$$

$$2) A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - I = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} \det(A^2 - I) = 11 \\ (A^2 - I)^{-1} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 5 & -2 & -1 \\ -1 & -4 & -2 \end{pmatrix} \end{cases} \rightarrow X = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

22.- [Reserva 1 de 2006] 1) Despeja la matriz X en la ecuación: $2X - ABX = 3C$

$$2) \text{ Halla la matriz } X \text{ sabiendo que } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2/3 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$1) 2X - ABX = 3C \rightarrow 2IX - ABX = 3C \rightarrow (2I - AB)X = 3C \rightarrow X = (2I - AB)^{-1} 3C$$

$$2) AB = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2I - AB = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(2I - AB)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1/3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

24.- [Reserva 2 de 2006] 1) Despeja la matriz X en la ecuación: $XA - X = B$

$$2) \text{ Halla la matriz } X \text{ sabiendo que } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$1) XA - X = B \rightarrow XA - XI = B \rightarrow X(A - I) = B \rightarrow X = B(A - I)^{-1}$$

$$2) A - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} \det(A - I) = 4 \\ (A - I)^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/4 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 & 1/4 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

25.- [Junio de 2007] 1) Despeja la matriz X en la ecuación: $2 \cdot X - A \cdot X = C - B \cdot X$

2) Halla X sabiendo que $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

Solución:

1) $2X - AX = C - BX \rightarrow 2IX - AX + BX = C \rightarrow (2I - A + B)X = C \rightarrow X = (2I - A + B)^{-1} C$

2) $2I - A + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} \det(2I - A + B) = 2 \\ (2I - A + B)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -3/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \end{cases}$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -3/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

26.- [Septiembre de 2007] 1) Despeja la matriz X en la ecuación: $X^{-1}A + A = B$

2) Halla la matriz X sabiendo que $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Solución:

1) $X^{-1}A + A = B \rightarrow XX^{-1}A + XA = XB \rightarrow A + XA = XB \rightarrow XA - XB = -A \rightarrow$
 $\rightarrow X(A - B) = -A \rightarrow X = -A(A - B)^{-1}$

2) $A - B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} \det(A - B) = 1 \\ (A - B)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

27.- [Reserva 1 de 2007] 1) Despeja la matriz X de la ecuación: $A - 2X = I - AX$

2) Halla la matriz X siendo I la matriz identidad de orden 3 y $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Solución:

1) $A - 2X = I - AX \rightarrow AX - 2IX = I - A \rightarrow (A - 2I)X = I - A \rightarrow X = (A - 2I)^{-1}(I - A)$

2) $A - 2I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} \det(A - 2I) = -1 \\ (A - 2I)^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{cases}$

$$I - A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ -1 & 0 & -3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

28.- [Reserva 2 de 2007] 1) Despeja la matriz X de la ecuación: $A + X + AX = B$

2) Halla la matriz X sabiendo que $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

Solución:

1) $A + X + AX = B \rightarrow IX + AX = B - A \rightarrow (I + A)X = B - A \rightarrow X = (I + A)^{-1}(B - A)$

2) $I + A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} \det(I + A) = 8 \\ (I + A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/4 & 0 \\ 1/4 & 3/8 & -1/2 \\ -1/4 & 1/8 & 1/2 \end{pmatrix} \end{cases}$

$$B - A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/4 & 0 \\ 1/4 & 3/8 & -1/2 \\ -1/4 & 1/8 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$