Evaluación para el Acceso a la Universidad Curso 2025/2026

Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El estudiante deberá resolver obligatoriamente las preguntas 1 a 3, y elegir una opción de las dos propuestas en la pregunta 4 y 5. Es decir, en las preguntas 4 y 5, contestará UNA sola de las opciones propuestas. Si resuelve más, se corregirá solo el primero de los dos apartados resueltos. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Solo se permite el uso de calculadores de tipo 1 y 2 (tal y como se indica en la información de las pruebas). Cada ejercicio completo puntuará 2 puntos. Duración de la prueba: 90 minutos.

PARTE A (preguntas 1, 2 y 3). Conteste TODAS las preguntas de esta parte

Pregunta 1

Una empresa produce aparatos para medir distancias. Durante el proceso de calibración realiza una serie de experimentos para medir la distancia entre dos puntos, que están separados 1.5 metros entre sí. Debido al error de los aparatos, se sabe que los valores medidos siguen una distribución normal de media 1.5 m y varianza 0.64 m^2.

a) [0,5 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de que la medición del aparato sea de más de 2.1 m?

b) [0,5 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de la que medición del aparato sea superior a 0.9 m?

c) [1 punto] ¿Cuál es el valor de la distancia tal que el 80.51% de las mediciones estarían por encima de él?

Pregunta 2

La concentración de virus activos en una muestra de sangre (en un tiempo t desde que se tomó la muestra) se puede modelizar como una función $f(t) = 5(t + 1)e^{-t}$, con $t \geq 0$.

a) [1 punto] La pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(t)$ mide cómo cambia la concentración de virus activos. Calcula el tiempo en el que este cambio toma el valor más pequeño posible, es decir, el tiempo t en el que el valor de la derivada de $f(t)$ es mínimo.

b) [1 punto] ¿Cuál sería el valor de la concentración de virus a largo plazo? Es decir, el valor cuando el tiempo tiende a infinito: $\lim_{t\to\infty} f(t)$

Pregunta 3

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ a & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, con $a \in \mathbb{R}$.

a) [1 punto] Calcula los valores del parámetro a para que $A \cdot B$ sea invertible. Justifica tu respuesta.

b)[1 punto] Calcula la inversa de $A \cdot B$ en función de a.

PARTE B (preguntas 4 y 5)

Pregunta 4. Conteste solo UNA de las siguientes preguntas (4.1 o 4.2)

4.1. Responde justificadamente los siguientes apartados

a) [1 punto] Demuestra que la ecuación sen x − 2x + 1 = 0 tiene al menos una solución real en el intervalo [0, π].

b) [1 punto] Calcula razonadamente el número exacto de soluciones de la ecuación anterior cuando x ∈ [−200, 200].

4.2. Responde justificadamente los siguientes apartados

a) [1 punto] Determina razonadamente el punto (x, y) de la parábola $y = x^2 + 1$ en el que la suma de sus coordenadas alcanza su mínimo valor.

b) [1 punto] Encuentra razonadamente la ecuación de la recta normal a la gráfica de la parábola dada en el punto de abscisa $x = -1/2$.

Pregunta 5. **Conteste solo UNA de las siguientes preguntas (5.1 o 5.2)**

5.1. Para las fiestas del Corpus Christi que se celebran en Toledo, se instalan toldos en las calles por las que transcurre la procesión. En una de ellas, los operarios colocan los siguientes puntos de apoyo: $A(0,1,-2)$, $B(1,2,0)$, $C(0,0,1)$ y $D(1,0,m)$, con $m \in \mathbb{R}$.

a) [0,75 punto] Calcula el valor de m para que los cuatro puntos sean coplanarios.

b) [0,75 puntos] Determina la ecuación del plano π que contiene al toldo.

c) [0,50 puntos] Si los adornos florales deben estar como mínimo a 1 metro de distancia del toldo y se ha colocado un adorno de flores en el punto $P(1,2,3)$, ¿estará correctamente ubicado?

5.2. Sean el punto A (1, 1, a) y el plano $\pi \equiv b \cdot x + y + z = 1$, con a, b $\in \mathbb{R}$.

a) [1,25 puntos] ¿Qué deben cumplir los valores a, b para que el punto A esté contenido en el plano π y éste tenga como vector normal uno que es perpendicular al vector $\vec{u} = (1, 2, 0)$?

b) [0,75 puntos] Con los valores de a, b del apartado anterior, determina la ecuación de la recta perpendicular al plano π y que pasa por el punto A

Modelo 2026

Pregunta 1

a) X = mediciones del aparato (en m)

$X \rightsquigarrow N(1{,}5\ ,\ 0{,}8)$, $\sigma^2 = 0{,}64 \Rightarrow \sigma = \sqrt{0{,}64} = 0{,}8$

$\boxed{P(X > 2{,}1) = P\left(Z > \frac{2{,}1-1{,}5}{0{,}8}\right) = P(Z > 0{,}75) = 1 - P(Z < 0{,}75) = = 1 - 0{,}7734 = 0{,}2266}$

b) $\boxed{P(X > 0{,}9) = P\left(Z > \frac{0{,}9-1{,}5}{0{,}8}\right) = P(Z > -0{,}75) = 1 - P(Z < -0{,}75) = = 1 - [1 - P(Z < 0{,}75)] = P(Z < 0{,}75) = 0{,}7734}$

c) $P(X > x) = 0{,}8051 \Rightarrow P(X \le x) = 1 - 0{,}8051 = 0{,}1949 \Rightarrow$

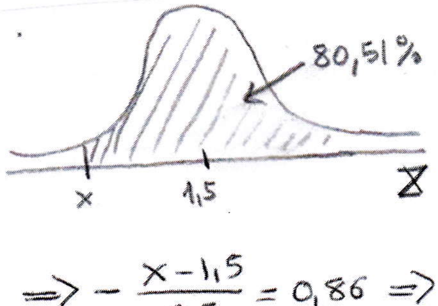
$\Rightarrow$ (tipificando) $P\left(Z < \frac{x-1{,}5}{0{,}8}\right) = 0{,}1949 \Rightarrow$ (mirando en la tabla)

$\frac{x-1{,}5}{0{,}8} = -0{,}86$ (negativo, ya que el miembro de la izquierda es negativo)

$\Rightarrow x = -0{,}86 \cdot 0{,}8 + 1{,}5 = 0{,}812$

El valor de la distancia tal que el 80,51 % de las mediciones esté por encima de él es 0,812 m.

c) "De otra forma"



X = mediciones del aparato (en m)

$X \rightsquigarrow N(1{,}5\ ,\ 0{,}8)$ ya que $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{0{,}64} = 0{,}8$

$P(X \geq x) = 0{,}8051 \Rightarrow P\left(Z \geq \underbrace{\frac{x-1{,}5}{0{,}8}}_{\text{negativo}}\right) = 0{,}8051 \Rightarrow$

$\Rightarrow P\left(Z \leq -\frac{x-1{,}5}{0{,}8}\right) = 0{,}8051 \Rightarrow$ (mirando en la tabla)

$\Rightarrow -\frac{x-1{,}5}{0{,}8} = 0{,}86 \Rightarrow x - 1{,}5 = -0{,}86 \cdot 0{,}8 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = -0{,}86 \cdot 0{,}8 + 1{,}5 = 0{,}812$

El valor de la distancia tal que el 80,51 % de las mediciones esté por encima de él es 0,812 m.

Pregunta 2

$f(t)=5(t+1)e^{-t}\ ,\ t\geq 0$

a) Hay que optimizar $f'(t)$

$f'(t)=5e^{-t}+5(t+1)e^{-t}\cdot(-1)=\cancel{5e^{-t}}-5te^{-t}-\cancel{5e^{-t}}=-5te^{-t}$

$f''(t)=-5e^{-t}-5te^{-t}(-1)=-5e^{-t}+5te^{-t}=5e^{-t}(-1+t)$

$f''(t)=0 \Rightarrow \begin{cases} +5e^{-t}=0 & \text{Nunca} \\ -1+t=0 \Rightarrow t=1 & \text{(posible extremo relativo)} \end{cases}$

$f'''(t)=5e^{-t}+5e^{-t}-5te^{-t}=10e^{-t}-5te^{-t}$

$f'''(1)=5e^{-1}>0 \Rightarrow t=1$ es un mínimo relativo de $f'(t)$

$\boxed{\text{El tiempo para que el cambio sea mínimo es } t=1.}$

b) $\lim\limits_{t\to+\infty} 5(t+1)e^{-t}=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{5(t+1)}{e^t}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]\underset{(1)}{=}\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{5}{e^t}=0$

donde en (1) hemos aplicado la regla de L'Hôpital.

$\boxed{\text{El valor de la concentración a largo plazo es } 0.}$

Pregunta 3

$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & a\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ a & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$

a) $AB=\begin{pmatrix}1 & 2 & a\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\ a & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+2a & 3+2a\\ 1-a & 1\end{pmatrix}$

Sabemos que $\exists (AB)^{-1} \Leftrightarrow \det(AB)\neq 0$

$\det(AB)=\det\begin{pmatrix}1+2a & 3+2a\\ 1-a & 1\end{pmatrix}=1+2a-(1-a)(3+2a)=$

$=2a^2+3a-2=0 \Rightarrow a=\begin{cases}1/2\\ -2\end{cases}$

$\boxed{\text{Solución: } AB \text{ es invertible si } a\neq\begin{cases}1/2\\ -2\end{cases}}$

b) Inversa de AB

$A_{11} = 1$ $\quad A_{12} = -3-2a$
$A_{21} = -1+a$ $\quad A_{22} = 1+2a$ } Adjuntos de los elementos de AB

Sabemos que $C^{-1} = \frac{1}{\det C}[\mathrm{Adj}(C)]^T$

luego en nuestro caso:

$$\boxed{(AB)^{-1} = \frac{1}{2a^2+3a-2}\begin{pmatrix} 1 & -1+a \\ -3-2a & 1+2a \end{pmatrix}}$$

Pregunta 4.1

a) $\operatorname{sen} x - 2x + 1 = 0$

Consideramos la función $f(x) = \operatorname{sen} x - 2x + 1$ en $[0,\pi]$.

Se tiene que

f es continua en $[0,\pi]$ por ser suma de funciones continuas

$f(0) = \operatorname{sen} 0 - 2\cdot 0 + 1 = 1 > 0$

$f(\pi) = \operatorname{sen} \pi - 2\pi + 1 = 1 - 2\pi < 0$

luego por el teorema de Bolzano, $\exists c \in (0,\pi)$ t.q. $f(c) = 0$, es decir,

$\boxed{\operatorname{sen} x - 2x + 1 = 0 \text{ tiene, al menos, una solución real en } [0,\pi].}$

b) $f(x) = \operatorname{sen} x - 2x + 1$ es continua y derivable (en $\mathbb{R}$) por ser suma de funciones continuas y derivables (en $\mathbb{R}$).

Calculamos su derivada

$f'(x) = \cos x - 2$

y como $\cos x \in [-1,1]$, se tiene que $f'(x) \in [-3,-1]$. Esto es, $f'(x) < 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$, es decir, f es estrictamente decreciente en $\mathbb{R}$ y, como consecuencia, $\boxed{f(x) = 0 \text{ solo tiene una solución real en } [-200, 200]}$

(ya que si $\exists x_1, x_2$ tales que $f(x_1) = f(x_2) = 0$, entonces entre ellas tendría que haber un extremo relativo (por el t^a de Rolle), lo que contradice el que la derivada sea siempre negativa).

Pregunta 4.2

a) 1ª forma: usando derivadas

$$S = x + y = x + x^2 + 1 = S(x)$$

$$y = x^2 + 1$$

$$S'(x) = 2x + 1$$

$$S'(x) = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

$$S''(x) = 2$$

$S''(-\frac{1}{2}) > 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$ es un mínimo relativo de $S(x)$

$\boxed{\text{Solución: el punto pedido es } (x,y) = \left(-\frac{1}{2}, \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 1\right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right)}$

2ª forma

Como $S(x) = x^2 + x + 1$ es una parábola con coeficiente de x^2 positivo, dicha función tiene su mínimo en el vértice:

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-1}{2}$$

$$y_v = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = \frac{5}{4}$$

$\boxed{\text{Solución: el punto pedido es } (x,y) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right)}$

b) $f(x) = x^2 + 1$

$$a = -\frac{1}{2}$$

Ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x = a$

$$y - f(a) = f'(a)(x - a) \Rightarrow y - \left[\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 1\right] = \left(2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\right)\left(x - \left(-\frac{1}{2}\right)\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y - \frac{5}{4} = -\left(x + \frac{1}{2}\right)}$$

Ecuación de la recta normal a $f(x)$ en $x = a$

$$y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a) \Rightarrow y - \frac{5}{4} = \frac{-1}{-1}\left(x - \left(-\frac{1}{2}\right)\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y - \frac{5}{4} = x + \frac{1}{2}} \quad \text{o} \quad \boxed{y = x + \frac{7}{4}}$$

Pregunta 5.1

$A(0,1,-2)$, $B(1,2,0)$, $C(0,0,1)$ y $D(1,0,m)$ con $m\in\mathbb{R}$

a.1) A, B, C y D coplanarios $\Leftrightarrow$ $\vec{AB}, \vec{AC}$ y $\vec{AD}$ linealmente dependientes $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \det(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}) = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{AB} = (1,2,0)-(0,1,-2) = (1,1,2) \\ \vec{AC} = (0,0,1)-(0,1,-2) = (0,-1,3) \\ \vec{AD} = (1,0,m)-(0,1,-2) = (1,-1,m+2) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \det(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}) = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & m+2 \end{pmatrix} = 6-m = 0 \Rightarrow m = 6$$

$\boxed{\text{Para que los cuatro puntos sean coplanarios, } m=6}$

a.2) El plano π que contiene al toldo está determinado por: $\pi \equiv \{A, \vec{AB}, \vec{AC}\}$ ya que $\vec{AB}$ y $\vec{AC}$ son linealmente independientes (no paralelos)

$$\pi \equiv \det\begin{pmatrix} x & 1 & 0 \\ y-1 & 1 & -1 \\ z+2 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{\pi \equiv 5x-3y-z+1=0}$$

a.3) Tenemos que ver si $d(P,\pi) \geq 1$, donde $d(P,\pi) = \dfrac{|Ap_1+Bp_2+Cp_3+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ $\quad P(p_1,p_2,p_3)$

$$d(P,\pi) = \frac{|5\cdot 1-3\cdot 2-3+1|}{\sqrt{5^2+(-3)^2+(-1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{35}} \simeq 0{,}51 < 1$$

$\boxed{\text{Por tanto, el adorno floral no está correctamente ubicado.}}$

Pregunta 5.2

a) $A(1,1,a)$, $\pi \equiv bx+y+z=1$, $a,b\in\mathbb{R}$

Vector normal al plano: $\vec{n_\pi} = (b,1,1)$

Perpendicularidad entre $\vec{n_\pi}$ y $\vec{u} = (1,2,0)$

$$\vec{n_\pi} \perp \vec{u} \Leftrightarrow \vec{n_\pi}\cdot\vec{u} = 0 \Leftrightarrow (b,1,1)\cdot(1,2,0) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b+2 = 0 \Rightarrow b = -2$$

$$A(1,1,a) \in \pi \Rightarrow -2\cdot 1+1+a = 1 \Rightarrow a = 2$$

$\boxed{\text{Solución: } (a,b) = (2,-2)}$

b) $\pi \equiv -2x + y + z = 1$

r (recta) tal que $\left\{ \begin{array}{l} r \perp \pi \\ A \in r \end{array} \right. \Rightarrow r \equiv \{A, \vec{n_\pi}\}$

$$\boxed{r \equiv (1,1,2) + \lambda(-2,1,1) \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = 1 - 2\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 2 + \lambda \end{array} \right. \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}}$$