

Evaluación para el Acceso a la Universidad Curso 2025/2026

Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El estudiante deberá resolver obligatoriamente las preguntas 1 a 3, y elegir una opción de las dos propuestas en la pregunta 4 y 5. Es decir, en las preguntas 4 y 5, contestará UNA sola de las opciones propuestas. Si resuelve más, se corregirá solo el primero de los dos apartados resueltos. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Solo se permite el uso de calculadores de tipo 1 y 2 (tal y como se indica en la información de las pruebas). Cada ejercicio completo puntuará 2 puntos. Duración de la prueba: 90 minutos.

PARTE A (preguntas 1, 2 y 3). Conteste TODAS las preguntas de esta parte.

Pregunta 1.

CONTEXTO

La caída de los tipos de interés en el segundo semestre de 2024 permitió a las familias ahorrar alrededor de 200 euros al mes en comparación con lo que venían pagando por sus hipotecas y préstamos. Este ahorro equivalía a más de 2000 euros anuales. Ante este escenario, los bancos ofrecieron condiciones más atractivas para captar clientes, lo que generó una fuerte competencia entre las entidades. Una de ellas lanzó los siguientes productos: Préstamo 24 Horas, Préstamo Auto y Préstamo Estudia. Cada cliente podía contratar, como máximo, uno de ellos.

La política de la empresa determinó que el reparto final de los préstamos concedidos fuera el siguiente: un 45% correspondió a Préstamos 24 Horas, un 40% a Préstamos Auto y un 15% a Préstamos Estudia. Además, se analizó el porcentaje de impago en estos productos, que fue del 20% en Préstamos 24 Horas, del 30% en Préstamos Auto y del 25% en Préstamos Estudia.

Basándose en el contexto anterior, responda estos cuatro apartados:

- [0.5 puntos]** Seleccionado un préstamo al azar, calcule la probabilidad de que no se haya pagado.
- [0.5 puntos]** Sabiendo que no se pagó un préstamo, calcule la probabilidad de que sea un Préstamo Auto.
- [0.5 puntos]** Si se pagó el préstamo, calcule la probabilidad de que sea un Préstamo Estudia.
- [0.5 puntos]** Según los datos proporcionados por el enunciado, indique dos sucesos relacionados con este problema que sean incompatibles. Justifique la respuesta.

Pregunta 2. Responda justificadamente los siguientes apartados:

- [1 punto]** Calcule el área comprendida entre las gráficas de las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = |x|$.
- [0.5 puntos]** Razone, sin calcular la integral, si $\int_1^2 xe^x dx$ tiene signo positivo o negativo.
- [0.5 puntos]** Calcule la integral $\int_1^2 xe^x dx$.

Pregunta 3. Una fábrica de productos químicos produce 3 fármacos diferentes. Anualmente, esta fábrica tiene 4 clientes que, durante el mes de febrero, realizaron pedidos y/o devoluciones. Dichos datos (en miles de unidades) se han recogido en la siguiente matriz

$$\begin{pmatrix} 9 & 5 & 2 \\ 3 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & -1 \end{pmatrix}.$$

- [0.5 puntos]** Indique qué representan las filas y las columnas, y especifique cuáles son las compras que ha hecho cada cliente durante el mes de febrero.
- [1.5 puntos]** Sabiendo que el primer cliente ha gastado un total de 3250 €, el segundo un total de 2850 € y el cuarto un total de 2800 €, ¿cuál es el precio por unidad de cada fármaco?

PARTE B (preguntas 4 y 5).

Pregunta 4. Conteste solo UNA de las siguientes preguntas (4.1 o 4.2).

4.1 Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = \arctg(x + \pi)$, donde $\arctg$ denota la función arcotangente.

- [1 punto]** Determine los intervalos de concavidad y de convexidad de f . Estudie y halle, si existen, los puntos de inflexión de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

- (b) [0.5 + 0.5 = 1 punto] Calcule $\lim_{x \rightarrow -\pi} \frac{f(x)}{\sin(x)}$. ¿Cuál sería el valor del límite si cambiamos en el denominador $\sin(x)$ por $g(x)$, siendo $g(x) = \sin(x)$ si $x \neq -\pi$ y $g(-\pi) = 2$?

4.2 La suma de los perímetros de un cuadrado y un triángulo equilátero es 100 metros.

- (a) [1.5 puntos] ¿Cuáles deben ser las medidas de los lados del cuadrado y del triángulo para que la suma de sus áreas sea mínima?
- (b) [0.5 puntos] ¿Es posible determinar las medidas de los lados del cuadrado y del triángulo para que la suma de sus áreas sea máxima?

Pregunta 5. Conteste solo UNA de las siguientes preguntas (5.1 o 5.2).

5.1 Responda justificadamente los siguientes apartados:

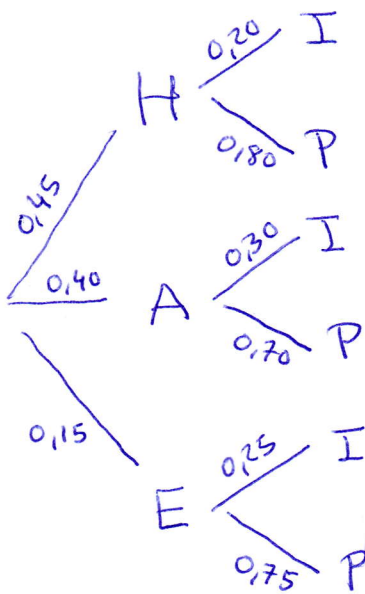
- (a) [1.5 puntos] Sean $\pi_1 : mx + y - z = m - 2$, $\pi_2 : x + y + 2z = 0$ y $\pi_3 : 3x + my + z = m - 2$ tres planos. Estudie su posición relativa en función del parámetro m .
- (b) [0.5 puntos] En el caso de que sean secantes en un punto, ¿podría tener ese punto las dos primeras coordenadas diferentes?

5.2 Responda justificadamente los siguientes apartados:

- (a) [0.5 + 0.5 = 1 punto] Considere el triángulo de vértices $A(0, 0, 0)$, $B(2, 4, 0)$ y $C(5, 0, 0)$. Utilizando productos vectoriales calcule su área, y compruebe el resultado mediante otro método.
- (b) [1 punto] Calcule la distancia del punto $P(2, 4, 2)$ al plano que pasa por los puntos $A(0, 0, 0)$, $C(5, 0, 0)$ y $D(0, 0, 3)$.

PARTE A

- ① $H = \text{préstamo 24 h}$, $P(H) = 0,45$
 $A = \text{préstamo auto}$, $P(A) = 0,40$
 $E = \text{" estudio}$, $P(E) = 0,15$
 $I = \text{préstamo impagado}$
 $P = \text{préstamo pagado}$



a) Aplicamos el teorema de la probabilidad total

$$\boxed{P(I) = P(H)P(I/H) + P(A)P(I/A) + P(E)P(I/E)} = 0,45 \cdot 0,20 + 0,40 \cdot 0,30 + 0,15 \cdot 0,25 = \boxed{0,2475}$$

b) Aplicamos el teorema de Bayes

$$\boxed{P(A/I) = \frac{P(A \cap I)}{P(I)} = \frac{0,40 \cdot 0,30}{0,2475} = \boxed{0,4849}}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \boxed{P(E/P)} &= \frac{P(E \cap P)}{P(P)} = \frac{P(E)P(P/E)}{P(P)} = \frac{P(E)[1 - P(I/E)]}{1 - P(I)} \\ &= \frac{0,15 \cdot (1 - 0,25)}{1 - 0,2475} = \boxed{0,1495} \end{aligned}$$

② a) $f(x) = x^2$
 $g(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Si $x \geq 0 \Rightarrow f(x) = x^2$ y $g(x) = x$

$x < 0 \Rightarrow f(x) = x^2$ y $g(x) = -x$

Puntos de intersección

Si $x \geq 0 \Rightarrow x^2 = x \Rightarrow x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x-1) = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$

$x < 0 \Rightarrow x^2 = -x \Rightarrow x^2 + x = 0 \Rightarrow x(x+1) = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} 0 \\ -1 \end{cases}$

Área

$$\begin{aligned}
 A &= \left| \int_{-1}^0 [f(x) - g(x)] dx \right| + \left| \int_0^1 [f(x) - g(x)] dx \right| = \\
 &= \left| \int_{-1}^0 (x^2 + x) dx \right| + \left| \int_0^1 (x^2 - x) dx \right| = \left| \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^0 \right| + \left| \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 \right| = \\
 &= \left| 0 - \frac{1}{6} \right| + \left| -\frac{1}{6} - 0 \right| = \frac{1}{3} u^2
 \end{aligned}$$

b) Signo de $\int_1^2 x e^x dx$

Si $x \in [1, 2] \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ e^x > 0 \end{cases} \Rightarrow x e^x > 0$ en $[1, 2]$ y la integral definida de una función positiva es positiva.

$$c) \int_1^2 x e^x dx = F(2) - F(1) = 2e^2 - e^2 - (e - e) = e^2$$

$$\int x e^x dx = \left[\begin{array}{l} u = x \rightarrow du = dx \\ dv = e^x dx \rightarrow v = e^x \end{array} \right] = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C = F(x)$$

③ 3)

Tipo de fármaco

$$M = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{Clientes} \end{matrix} & \begin{pmatrix} 9 & 5 & 2 \\ 3 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & -1 \end{pmatrix} \end{matrix} = (m_{ij})$$

donde m_{ij} = miles de unidades del fármaco j que el cliente i ha comprado (si es positivo) o devuelto (si es negativo) en febrero

Cliente 1: compró 9000 unidades del fármaco 1					
	"	5000	"	"	2
	"	2000	"	"	3
Cliente 2: compró 3000 unidades del fármaco 1					
	"	8000	"	"	2
	"	0	"	"	3
Cliente 3: no compró ni devolvió ningún fármaco					
Cliente 4: compró 6000 unidades del fármaco 1					
	"	7000	"	"	2
		devolvió 1000	"	"	3

b) $x = \text{precio por unidad del fármaco 1}$
 $y = \text{" " " " " 2}$
 $z = \text{" " " " " 3}$

$$\left. \begin{array}{l} 9000x + 5000y + 2000z = 3250 \\ 3000x + 8000y = 2850 \\ 6000x + 7000y - 1000z = 2800 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} 9x + 5y + 2z = 3,25 \\ 3x + 8y = 2,85 \\ 6x + 7y - z = 2,80 \end{array} \right\}$$

Lo resolvemos por Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 9 & 5 & 2 & 3,25 \\ 3 & 8 & 0 & 2,85 \\ 6 & 7 & -1 & 2,80 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{-3F_2+F_1 \\ -2F_1+3F_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 9 & 5 & 2 & 3,25 \\ 0 & -19 & 2 & -5,30 \\ 0 & 11 & -7 & 1,9 \end{array} \right) \xrightarrow{11F_2+19F_3}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 9 & 5 & 2 & 3,25 \\ 0 & -19 & 2 & -5,30 \\ 0 & 0 & -111 & -22,2 \end{array} \right) \begin{array}{l} [1] \\ [2] \\ [3] \end{array}$$

De [3]: $z = \frac{-22,2}{-111} = 0,20$

Sustituimos en [2]: $y = \frac{-5,30 - 2 \cdot 0,20}{-19} = 0,30$

Sustituimos en [1]: $x = \frac{3,25 - 2 \cdot 0,20 - 5 \cdot 0,30}{9} = 0,15$

Solución: el precio por unidad del fármaco 1 es de 0,15 €, 0,30 € el precio por unidad del fármaco 2 y 0,20 € el precio por unidad del fármaco 3.

4.1 $f(x) = \arctg(x + \pi) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

3) Concavidad, convexidad y puntos de inflexión

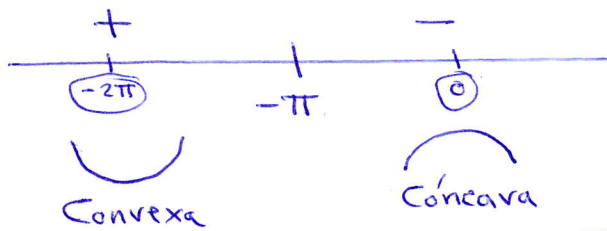
$$f'(x) = \frac{1}{1 + (x + \pi)^2} = \frac{1}{x^2 + 2\pi x + \pi^2 + 1}$$

$$f''(x) = \frac{-2x - 2\pi}{(x^2 + 2\pi x + \pi^2 + 1)^2}$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow -2x - 2\pi = 0 \Rightarrow x = -\pi$$

$$f'''(x) = \frac{-2(x^2 + 2\pi x + \pi^2 + 1) + 2 \cdot 2(x^2 + 2\pi x + \pi^2 + 1)(2x + 2\pi)}{(x^2 + 2\pi x + \pi^2 + 1)^4}$$

$$f'''(-\pi) = -2 < 0$$

Signo de f'' 

$$f \text{ es } \begin{cases} \text{Convexa en } (-\infty, -\pi) \\ \text{Cóncava en } (-\pi, +\infty) \end{cases}$$

f tiene en $-\pi$ un punto de inflexión de coordenadas $(-\pi, f(-\pi)) = (-\pi, 0)$

$$b) \text{ b.1) } \lim_{x \rightarrow -\pi} \frac{f(x)}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow -\pi} \frac{\arctg(x+\pi)}{\sin x} = \left[\frac{0}{0} \right] \text{ ①}$$

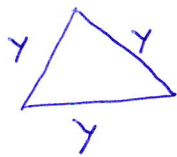
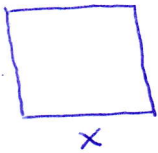
$$= \lim_{x \rightarrow -\pi} \frac{\frac{1}{1+(x+\pi)^2}}{\cos x} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$\text{b.2) } g(x) = \begin{cases} \sin x & \text{si } x \neq -\pi \\ 2 & \text{si } x = -\pi \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\pi} \frac{f(x)}{g(x)} = -1$$

ya que el valor del límite no depende del valor de $g(x)$ en $x = -\pi$ y para $x \neq -\pi$, $g(x) = \sin x$.

4.2

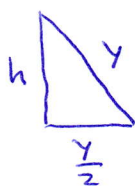
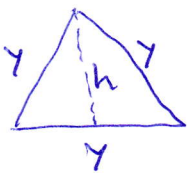


$$\left. \begin{array}{l} P_{\text{cuadrado}} = 4x \\ P_{\text{triángulo}} = 3y \end{array} \right\} \begin{array}{l} 4x + 3y = 100 \\ y = \frac{100 - 4x}{3} \end{array}$$

$$A_{\text{cuadrado}} = x^2$$

$$A_{\text{Triángulo}} = \frac{y \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} y}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} y^2$$

Teorema de Pitágoras para calcular la altura del triángulo

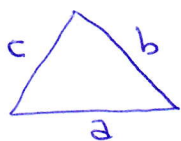


$$y^2 = h^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2$$

$$y^2 = h^2 + \frac{y^2}{4}$$

$$3y^2 = 4h^2 \Rightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2} y$$

También se puede calcular la altura usando la fórmula de Herón



$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad \text{donde } s = \frac{a+b+c}{2}$$

$$A = \sqrt{\frac{3y}{2} \left(\frac{3y}{2} - y\right)^3} = \sqrt{\frac{3y}{2} \left(\frac{y}{2}\right)^3} = \sqrt{\frac{3y^4}{16}} = \frac{\sqrt{3}}{4} y^2$$

Suma de las áreas (función a optimizar)

$$\begin{aligned}
 S &= x^2 + \frac{\sqrt{3}}{4} y^2 = x^2 + \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{100-4x}{3} \right)^2 = x^2 + \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{10000 + 16x^2 - 800x}{9} \right) = \\
 &= \frac{36x^2 + 10000\sqrt{3} + 16\sqrt{3}x^2 - 800\sqrt{3}x}{36} = \frac{1}{36} \left((36 + 16\sqrt{3})x^2 - 800\sqrt{3}x + 10000\sqrt{3} \right) = \\
 &= S(x)
 \end{aligned}$$

$$S'(x) = \frac{36 + 16\sqrt{3}}{36} \cdot 2x - \frac{800\sqrt{3}}{36} = 2 + \frac{8\sqrt{3}}{9}x - \frac{800\sqrt{3}}{36}$$

$$S'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{\frac{800\sqrt{3}}{36}}{2 + \frac{8\sqrt{3}}{9}} = \frac{300\sqrt{3} - 400}{11}$$

$$S''(x) = 2 + \frac{8\sqrt{3}}{9}$$

$$S''\left(\frac{300\sqrt{3} - 400}{11}\right) > 0 \Rightarrow x = \frac{300\sqrt{3} - 400}{11} \text{ es un mínimo relativo de } S(x)$$

Solución: la medida del lado del cuadrado es $\frac{300\sqrt{3} - 400}{11}$ m y la del lado del triángulo equilátero $100 - 4 \cdot \frac{300\sqrt{3} - 400}{11} = \frac{100(9 - 4\sqrt{3})}{11}$ m

b) Posible respuesta

$S(x)$ es una función cuadrática con coeficiente de x^2 igual a $1 + \frac{4\sqrt{3}}{9} > 0$, luego es una función continua y convexa (U) y por el teorema de Weierstrass, alcanza su máx. y su mínimo en el intervalo $[0, 25]$ (ya que la longitud máx. del lado del cuadrado es 25):

$$x=0 \Rightarrow S(0) = \frac{100\sqrt{3}}{36} \approx 481,1$$

$$x=25 \Rightarrow S(25) = 625$$

Solución:

Sí puede tener un máximo, con $x=25$ e $y=0$.

Otra posible respuesta

El enunciado dice "un cuadrado y un triángulo", luego lo lógico es que ambos existan. Si interpretamos así el enunciado, la respuesta es que no es posible determinar las medidas de los lados del cuadrado y del triángulo que maximicen la suma de sus áreas, ya que el máx. se alcanza en el límite, cuando uno de los lados (el del triángulo) es cero.

Solución: no es posible maximizar la suma de las áreas

5.1 a) $\pi_1 \equiv mx + y - z = m - 2$

$\pi_2 \equiv x + y + 2z = 0$

$\pi_3 \equiv 3x + my + z = m - 2$

$$M = \begin{pmatrix} m & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & m & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{M} = \begin{pmatrix} m & 1 & -1 & m-2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & m & 1 & m-2 \end{pmatrix}$$

Rango de M

$$\det M = m - m + 6 - (-3 + 2m^2 + 1) = -2m^2 + 8 = 0 \Rightarrow m = \begin{cases} 2 \\ -2 \end{cases}$$

Si $m = 2 \Rightarrow \text{rango } M = 2$ ya que $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$

Si $m \neq -2 \Rightarrow \text{rango } M = 2$ ya que $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$

Rango de $\tilde{M}$ para $m = 2$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rango } \tilde{M} = 2$$

Rango de las submatrices de $\tilde{M}$ de orden 2×4

$$\tilde{M}_1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rango } \tilde{M}_1 = 2$$

$$\tilde{M}_2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rango } \tilde{M}_2 = 2$$

$$\tilde{M}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rango } \tilde{M}_3 = 2$$

Rango de $\tilde{M}$ para $m = -2$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & -4 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & -4 \\ 3 & -2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{2F_1 + F_2 \\ -3F_1 + F_3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -4 \\ 0 & -5 & -5 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{5F_2 + 3F_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -32 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rango } \tilde{M} = 3$$

Rango de las submatrices de orden 2×3 de M

$$M_1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rango } M_1 = 2$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rango } M_2 = 2$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rango } M_3 = 2$$

Posición relativa

Si $m \neq \begin{Bmatrix} 2 \\ -2 \end{Bmatrix} \Rightarrow$ los tres planos son secantes en un punto

Si $m = 2 \Rightarrow$ los tres planos son distintos y se cortan en una recta

Si $m = -2 \Rightarrow$ los tres planos se cortan 2 a 2 según tres rectas

b) Supongamos $x=y$ cuando $m \neq \begin{Bmatrix} 2 \\ -2 \end{Bmatrix}$.

$$\begin{cases} mx + y - z = m - 2 & [1] \\ x + y + 2z = 0 & [2] \\ 3x + my + z = m - 2 & [3] \end{cases}$$

$$[1] - [3]: mx + y - z - (3x + my + z) = m - 2 - (m - 2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (m-3)x - (m-1)y - 2z = 0 \quad [4]$$

Como [2] es $x + y + 2z = 0$ y estamos suponiendo $x=y$, se tiene que $2x + 2z = 0 \Rightarrow x = -z$ y sustituyendo en [4]

$$(m-3)x - (m-1)x - 2(-x) = 0 \Rightarrow \cancel{mx} - 3x - \cancel{mx} + x + 2x = 0 \Rightarrow 0 = 0 \text{ que es una identidad, luego el punto de corte de los tres}$$

planos es de la forma $(x, x, -x)$ con $x \in \mathbb{R}$.

Cipri

Solución: el punto de corte no puede tener las dos primeras coordenadas diferentes.

5.2 a) $A(0,0,0)$, $B(2,4,0)$, $C(5,0,0)$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{AB} = (2,4,0) - (0,0,0) = (2,4,0) \\ \vec{AC} = (5,0,0) - (0,0,0) = (5,0,0) \end{array} \right\} \vec{AB} \times \vec{AC} = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$
$$= (0, 0, -20)$$

$$|\vec{AB} \times \vec{AC}| = \sqrt{(-20)^2} = 20$$

$$\boxed{\text{Área} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2} \cdot 20 = 10 \text{ u}^2}$$

2º método:

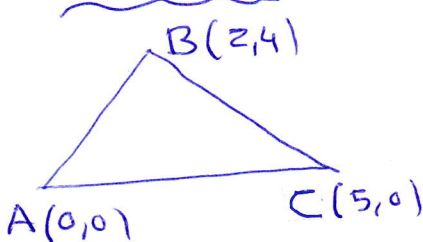
El triángulo está en el plano xy , luego podemos aplicar la siguiente fórmula:

$$\text{Área} = \frac{1}{2} |x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)|$$

donde $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ y $C(x_3, y_3)$.

$$\boxed{\text{Área} = \frac{1}{2} |0(4-0) + 2(0-0) + 5(0-4)| = \frac{1}{2} \cdot 20 = 10 \text{ u}^2}$$

3er método



$$\text{Área} = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2}$$

$$\text{Base: } d(A, C) = |\vec{AC}| = \sqrt{5^2 + 0^2} = 5$$

Altura: la altura es la distancia perpendicular desde

$B(2,4)$ a la recta que pasa por A y C. Como el segmento $\overline{AC}$ está sobre el eje x , dicha recta es $y = 0$ y, por tanto, la distancia de B a esa recta es el valor absoluto de su coordenada y :

$$h = |4| = 4$$

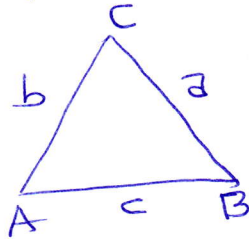
$$\boxed{\text{Área} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10 \text{ u}^2}$$

4º método: fórmula de Herón

$$A(0,0)$$

$$B(2,4)$$

$$C(5,0)$$



$$a = \sqrt{(5-2)^2 + (0-4)^2} = 5$$

$$b = \sqrt{(5-0)^2 + (0-0)^2} = 5$$

$$c = \sqrt{(2-0)^2 + (4-0)^2} = 2\sqrt{5}$$

$$s \equiv \text{semiperímetro} = \frac{5+5+2\sqrt{5}}{2} = 5 + \sqrt{5}$$

$$\boxed{\text{Área}} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} =$$

$$= \sqrt{(5+\sqrt{5})(5+\sqrt{5}-5)(5+\sqrt{5}-5)(5+\sqrt{5}-2\sqrt{5})} = \sqrt{100} = \boxed{10 \text{ u}^2}$$

$$b) \pi \equiv \{A, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AC} = (5, 0, 0) \\ \overrightarrow{AD} = (0, 0, 3) \end{array} \right\} \overrightarrow{n} = \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD} = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = (0, -15, 0)$$

La ec. del plano π con normal $\overrightarrow{n} = (0, -15, 0)$ que pasa por $A(0,0,0)$ es

$$0(x-0) - 15(y-0) + 0(z-0) = 0 \Rightarrow -15y = 0 \Rightarrow \pi \equiv y = 0$$

y, por tanto,

$$\boxed{d(P, \pi)} = \frac{|0 \cdot 2 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + 0|}{\sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2}} = \frac{4}{1} = \boxed{4 \text{ u}}$$

ya que

$$d(P, \pi) = \frac{|AP_1 + BP_2 + CP_3 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \text{ donde } \pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$$

$P(P_1, P_2, P_3)$