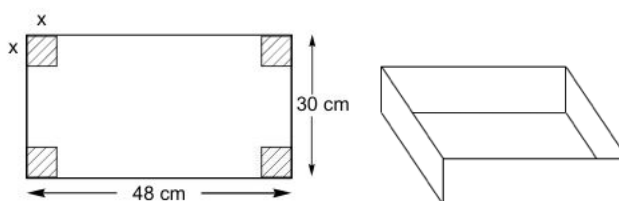


Instrucciones: El estudiante deberá resolver los cuatro ejercicios propuestos. En los **ejercicios 2, 3 y 4** deberá contestar solamente a **UNO** de los dos apartados propuestos. Si resuelve más, se corregirá solo el primero de los dos apartados resueltos. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Solo se permite el uso de calculadores de tipo 1 y 2 (tal y como se indica en la información de las pruebas). **Cada ejercicio completo puntuará 2,5 puntos.** Duración de la prueba: 90 minutos.

EJERCICIO 1. (2,5 PUNTOS) Para guardar el material escolar, se quiere construir una caja (sin tapa) a partir de una plancha de cartón de 48 cm de largo por 30 cm de ancho, a la que se le ha recortado un cuadrado de lado x en cada una de sus esquinas (véase el dibujo).



- [0,75 puntos]** Determina el volumen de la caja.
- [1 punto]** Determina las dimensiones de la caja si se quiere que contenga el mayor volumen posible.
- [0,75 puntos]** Para poder transportar la caja cómodamente, se van a realizar dos aberturas. El área de cada una de ellas está encerrada por las curvas $f(t) = t^2 - 4t$ y $g(t) = 2t - 5$. Calcula el área de una de las aberturas.

EJERCICIO 2. (2,5 PUNTOS) Elige y resuelve **solo uno** de los dos apartados siguientes:

Apartado a) Para las fiestas del Corpus Christi que se celebran en Toledo, se instalan toldos en las calles por las que transcurre la procesión. En una de ellas, los operarios colocan los siguientes puntos de apoyo: $A(0,1,-2)$, $B(1,2,0)$, $C(0,0,1)$ y $D(1,0,m)$, con $m \in \mathbb{R}$.

- [1 punto]** Calcula el valor de m para que los cuatro puntos sean coplanarios.
- [0,75 puntos]** Determina la ecuación del plano π que contiene al toldo.
- [0,75 puntos]** Si los adornos florales deben estar como mínimo a 1 metro de distancia del toldo y se ha colocado un adorno de flores en el punto $P(1,2,3)$, ¿estará correctamente ubicado?

Apartado b) Resuelve los problemas siguientes:

- [1 punto]** Calcula la ecuación del plano π' que pasa por $C(1,1,-2)$, es paralelo a la recta r que pasa por los puntos $A(1,0,3)$ y $B(0,4,-1)$ y perpendicular al plano $\pi \equiv -x + y + 2z = 1$.
- [1,5 puntos]** Determina los valores reales de $m \in \mathbb{R}$, para que los puntos $A(-1,2,3)$, $B(-1,0,-1)$, $C(2,-1,1)$ y $D(2,3,m)$, formen un tetraedro de volumen 8 unidades cúbicas.

EJERCICIO 3. (2,5 PUNTOS) Elige y resuelve **solo uno** de los dos apartados siguientes.

Apartado a) Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales.
$$\begin{cases} x + y - z = 2 \\ 4x + 2y = a \\ ax + y + z = 1 \end{cases}.$$

a.1) **[1,5 puntos]** Discute la resolución del sistema según los valores que pueda tomar el parámetro $a \in \mathbb{R}$ e indica el número de soluciones en cada caso.

a.2) **[1 punto]** Para $a = 0$, resuelve el sistema de ecuaciones, de forma razonada.

Apartado b) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ a & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, con $a \in \mathbb{R}$.

b.1) **[1,25 puntos]** Calcula los valores del parámetro a para que $A \cdot B$ sea invertible. Justifica tu respuesta.

b.2) **[1,25 puntos]** Calcula la inversa de $A \cdot B$ en función de a .

EJERCICIO 4. (2,5 PUNTOS) Elige y resuelve **solo uno** de los dos apartados siguientes:

Apartado a) En la entrada del instituto hay tres fotocopadoras A, B y C cuyos porcentajes de fallos son 3%, 5% y 4%, respectivamente. Un estudiante entra en el instituto y, como las tres fotocopadoras están libres, elige una al azar.

a.1) **[1 punto]** ¿Cuál es la probabilidad de que fotocopie sin fallos?

a.2) **[1,5 puntos]** Si al fotocopiar observa que una página es defectuosa, ¿qué probabilidad hay de que se haya utilizado la fotocopadora B?

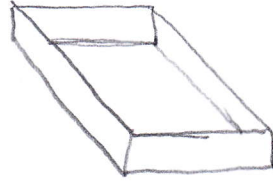
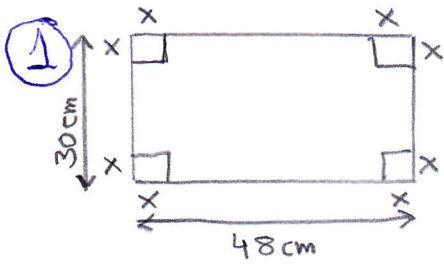
Apartado b) Una inspectora de sanidad sabe que el 5% de los restaurantes no pasará una inspección. Si elige 8 restaurantes al azar, calcula:

b.1) **[0,75 puntos]** Probabilidad de que tres restaurantes no pasen la inspección.

b.2) **[0,75 puntos]** Probabilidad de que todos los restaurantes pasen la inspección.

b.3) **[1 punto]** Probabilidad de que al menos dos restaurantes pasen la inspección.

n	k	p									
		0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5
8	0	0.6634	0.4305	0.2725	0.1678	0.1001	0.0576	0.0319	0.0168	0.0084	0.0039
	1	0.2793	0.3826	0.3847	0.3355	0.2670	0.1977	0.1373	0.0896	0.0548	0.0313
	2	0.0515	0.1488	0.2376	0.2936	0.3115	0.2965	0.2587	0.2090	0.1569	0.1094
	3	0.0054	0.0331	0.0839	0.1468	0.2076	0.2541	0.2786	0.2787	0.2568	0.2188
	4	0.0004	0.0046	0.0185	0.0459	0.0865	0.1361	0.1875	0.2322	0.2627	0.2734
	5	0.0000	0.0004	0.0026	0.0092	0.0231	0.0467	0.0808	0.1239	0.1719	0.2188
	6	0.0000	0.0000	0.0002	0.0011	0.0038	0.0100	0.0217	0.0413	0.0703	0.1094
	7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0012	0.0033	0.0079	0.0164	0.0313
	8	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0007	0.0017	0.0039



$$a) V_{\text{CAJA}} = A_{\text{base}} \cdot h \quad \begin{cases} A_{\text{base}} = \text{área de la base} \\ h = \text{altura} \end{cases}$$

$$V_{\text{CAJA}} = (48 - 2x)(30 - 2x) \cdot x = 1440x - 156x^2 + 4x^3$$

b) Optimizamos $V(x)$

$$V'(x) = 1440 - 312x + 12x^2$$

$$V'(x) = 0 \Rightarrow 1440 - 312x + 12x^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{312 \pm \sqrt{(-312)^2 - 4 \cdot 12 \cdot 1440}}{2 \cdot 12} = \begin{cases} 20 \\ 6 \end{cases}$$

$$V''(x) = -312 + 24x$$

$$V''(20) = 168 > 0 \Rightarrow x = 20 \text{ es un mínimo relativo}$$

$$V''(6) = -168 < 0 \Rightarrow x = 6 \text{ es un máximo relativo}$$

Por tanto, para que el volumen sea máximo, las dimensiones tienen que ser:

$$\left. \begin{array}{l} \text{largo: } 48 - 2 \cdot 6 = 36 \text{ cm} \\ \text{ancho: } 30 - 2 \cdot 6 = 18 \text{ cm} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Dimensiones de la caja: largo} = 36 \text{ cm, ancho} = 18 \text{ cm, alto} = 6 \text{ cm}$$

c) El área de una de las aberturas viene dada por:

$$A = \left| \int_a^b (f(t) - g(t)) dt \right|$$

donde a y b son las soluciones de la ecuación $f(t) = g(t)$.

Calculamos los límites de integración: $f(t) = g(t)$

$$t^2 - 4t = 2t - 5 \Rightarrow t^2 - 6t + 5 = 0 \Rightarrow t = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} = \begin{cases} 5 \\ 1 \end{cases}$$

Calculamos el área:

$$A = \left| \int_1^5 (t^2 - 6t + 5) dt \right| \stackrel{(1)}{=} \left| \frac{t^3}{3} - \frac{6t^2}{2} + 5t \right|_1^5 = \left| -\frac{25}{3} - \frac{7}{3} \right| = \frac{32}{3} \text{ u}^2$$

donde en (1) hemos usado la regla de Barrow.

② Apartado a)

$A(0,1,-2), B(1,2,0), C(0,0,1)$ y $D(1,0,m)$ con $m \in \mathbb{R}$

a.1) A, B, C y D coplanarios $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$ linealmente dependientes $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = 0$$

$$\left. \begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= (1,2,0) - (0,1,-2) = (1,1,2) \\ \overrightarrow{AC} &= (0,0,1) - (0,1,-2) = (0,-1,3) \\ \overrightarrow{AD} &= (1,0,m) - (0,1,-2) = (1,-1,m+2) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & m+2 \end{pmatrix} = 6 - m = 0 \Rightarrow m = 6$$

Para que los cuatro puntos sean coplanarios, $m = 6$

a.2) El plano π que contiene al todo está determinado por: $\pi \equiv \{A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\}$ ya que $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son linealmente independientes (no paralelos)

$$\pi \equiv \det \begin{pmatrix} x & 1 & 0 \\ y-1 & 1 & -1 \\ z+2 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{\pi \equiv 5x - 3y - z + 1 = 0}$$

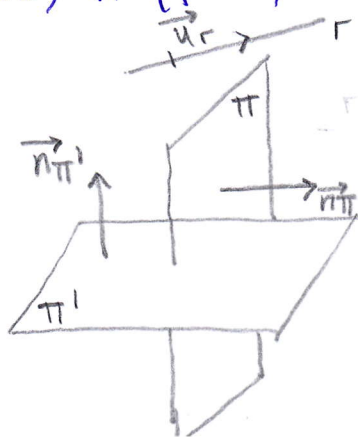
a.3) Tenemos que ver si $d(P, \pi) \geq 1$, donde $d(P, \pi) = \frac{|AP_1 + BP_2 + CP_3 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

$$d(P, \pi) = \frac{|5 \cdot 1 - 3 \cdot 2 - 3 + 1|}{\sqrt{5^2 + (-3)^2 + (-1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{35}} \simeq 0,51 < 1 \quad P(P_1, P_2, P_3)$$

Por tanto, el adorno floral no está correctamente ubicado.

② Apartado b)

b.1) π' (plano) tal que $\left\{ \begin{aligned} C(1,1,-2) \in \pi' \\ \pi' \parallel r, r \equiv \{A(1,0,3), B(0,4,-1)\} \\ \pi' \perp \pi \equiv -x + y + 2z = 1 \end{aligned} \right.$



$$\left. \begin{aligned} \text{Como } \pi' \parallel r \Rightarrow \vec{n}_{\pi'} \perp \vec{u}_r \\ \pi' \perp \pi \Rightarrow \vec{n}_{\pi'} \perp \vec{n}_{\pi} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \vec{n}_{\pi'} = \vec{u}_r \times \vec{n}_{\pi}$$

Calculamos el vector director de la recta r :

$$\vec{u}_r = \overrightarrow{AB} = (0,4,-1) - (1,0,3) = (-1, 4, -4)$$

Calculamos el vector normal de π' :

$$\vec{n}_{\pi'} = \vec{u}_r \times \vec{n}_{\pi} = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 4 & -4 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 12\vec{i} + 6\vec{j} + 3\vec{k} = (12, 6, 3)$$

Ecuación del plano π'

$$\left. \begin{aligned} 12x + 6y + 3z + D' &= 0 \\ C(1, 1, -2) \in \pi' \end{aligned} \right\} \Rightarrow 12 + 6 + 3 \cdot (-2) + D' = 0 \Rightarrow D' = -12$$

$$\Rightarrow \pi' \equiv 12x + 6y + 3z - 12 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi' \equiv 4x + 2y + z - 4 = 0}$$

De otra forma: $\pi' \equiv \{C, \vec{u}_r, \vec{n}_{\pi}\}$

$$\pi' \equiv \det \begin{pmatrix} x-1 & -1 & -1 \\ y-1 & 4 & 1 \\ z+2 & -4 & 2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow 12x + 6y + 3z - 12 = 0 \Rightarrow \Rightarrow \pi' \equiv 4x + 2y + z - 4 = 0$$

b.2) $A(-1, 2, 3), B(-1, 0, 1), C(2, -1, 1), D(2, 3, m)$

Sabemos que $V_{\text{TETRAEDRO}} = \frac{1}{6} |[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}]|$, luego

$$\left. \begin{aligned} \vec{AB} &= (-1, 0, 1) - (-1, 2, 3) = (0, -2, -4) \\ \vec{AC} &= (2, -1, 1) - (-1, 2, 3) = (3, -3, -2) \\ \vec{AD} &= (2, 3, m) - (-1, 2, 3) = (3, 1, m-3) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}] = \det \begin{pmatrix} 0 & -2 & -4 \\ 3 & -3 & -2 \\ 3 & 1 & m-3 \end{pmatrix} = 6m - 54 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8 = \frac{1}{6} |6m - 54| \Rightarrow 48 = |6m - 54| \Rightarrow \begin{cases} 6m - 54 = 48 \Rightarrow m = 17 \\ 6m - 54 = -48 \Rightarrow m = 1 \end{cases}$$

Así, para $m = \begin{cases} 17 \\ 1 \end{cases}$, el volumen del tetraedro determinado por A, B, C y D es de 8 u^3

③ Apartado a)

$$\text{a.1) } \begin{cases} x + y - z = 2 \\ 4x + 2y = 2 \\ 2x + y + z = 1 \end{cases} \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \tilde{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Rango de M

$$\det M = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 0 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2a - 6 = 0 \Rightarrow a = \frac{6}{2} = 3$$

$$\text{Si } a \neq 3 \Rightarrow \text{rango } M = 3$$

$$a = 3 \Rightarrow \text{rango } M = 2 \text{ ya que } \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$$

Rango de $\tilde{M}$ para $a=3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{-4F_1+F_2 \\ -3F_1+F_3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 4 & -5 \\ 0 & -2 & 4 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{-F_2+F_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{rango } \tilde{M} = 2$$

Discusión (teorema de Rouché-Fröbenius)

Si $a \neq 3 \Rightarrow \text{rango } M = 3 = \text{rango } \tilde{M} = n^{\circ} \text{ de incógnitas} \Rightarrow \text{S.C.D. (el sistema tiene solución única)}$

Si $a = 3 \Rightarrow \text{rango } M = 2 = \text{rango } \tilde{M} < n^{\circ} \text{ de incógnitas} \Rightarrow \text{S.C.I. (el sistema tiene infinitas soluciones)}$

2.2) Resolución para $a=0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{-4F_1+F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 4 & -8 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{2F_3+F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 6 & -6 \end{array} \right) \begin{matrix} [1] \\ [2] \\ [3] \end{matrix}$$

$$\text{De } [3]: z = \frac{-6}{6} = -1$$

$$\text{Sustituimos en } [2]: y = \frac{-8 - 4 \cdot (-1)}{-2} = 2$$

$$\text{Sustituimos en } [1]: x = 2 - 1 - 2 = -1$$

$$\boxed{\text{Solución: } (x, y, z) = (-1, 2, -1)}$$

3) Apartado b)

$$\text{b.1) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ a & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ con } a \in \mathbb{R}$$

$$AB \text{ invertible } (\exists (AB)^{-1}) \Leftrightarrow \det(AB) \neq 0$$

Calculamos AB:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ a & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+1 & 2a+3 \\ 1-a & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos det(AB)

$$\det(AB) = \det \begin{pmatrix} 2a+1 & 2a+3 \\ 1-a & 1 \end{pmatrix} = 2a^2 + 3a - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2)}}{2 \cdot 2} = \begin{cases} 1/2 \\ -2 \end{cases}$$

Solución: si $a \neq \begin{cases} 1/2 \\ -2 \end{cases} \Rightarrow AB$ es invertible

b.2) Aplicando la fórmula: $C^{-1} = \frac{1}{|C|} [\text{Adj}(C)]^T$

Si llamamos $C = AB$ y C_{ij} a sus adjuntos, se tiene:

$$\left. \begin{aligned} C_{11} &= (-1)^2 \cdot 1 = 1 \\ C_{12} &= (-1)^3 \cdot (1-a) = a-1 \\ C_{21} &= (-1)^3 \cdot (2a+3) = -2a-3 \\ C_{22} &= (-1)^4 \cdot (2a+1) = 2a+1 \end{aligned} \right\} \left[C^{-1} = \frac{1}{2a^2+3a-2} \begin{pmatrix} 1 & a-1 \\ -2a-3 & 2a+1 \end{pmatrix}^T = \right.$$

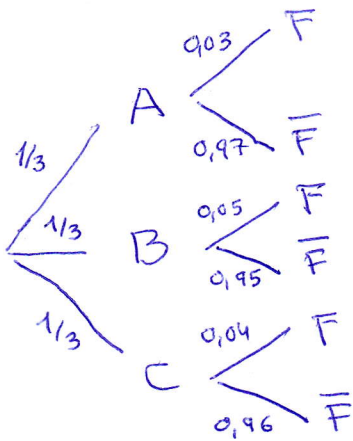
$$\left. = \frac{1}{2a^2+3a-2} \begin{pmatrix} 1 & -2a-3 \\ a-1 & 2a+1 \end{pmatrix} \right]$$

Por Gauss-Jordan:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{cc|cc} 2a+1 & 2a+3 & 1 & 0 \\ 1-a & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1: (2a+1)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{2a+3}{2a+1} & \frac{1}{2a+1} & 0 \\ 1-a & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{-(1-a)F_1+F_2} \\ & \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{2a+3}{2a+1} & \frac{1}{2a+1} & 0 \\ 0 & \frac{2a^2+3a-2}{2a+1} & \frac{a-1}{2a+1} & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2: \left(\frac{2a^2+3a-2}{2a+1} \right)} \\ & \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{2a+3}{2a+1} & \frac{1}{2a+1} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{a-1}{2a^2+3a-2} & \frac{2a+1}{2a^2+3a-2} \end{array} \right) \xrightarrow{-\left(\frac{2a+3}{2a+1} \right)F_2+F_1} \\ & \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{2a^2+3a-2} & -\frac{2a+3}{2a^2+3a-2} \\ 0 & 1 & \frac{a-1}{2a^2+3a-2} & \frac{a-1}{2a^2+3a-2} \end{array} \right) \Rightarrow AB^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2a^2+3a-2} & -\frac{2a+3}{2a^2+3a-2} \\ \frac{a-1}{2a^2+3a-2} & \frac{a-1}{2a^2+3a-2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

④ Apartado a)

A = fotocopidora A, B = fotocopidora B, C = fotocopidora C
F = la fotocopidora falla



$$\begin{aligned}
 2.1) P(F) &= P(A)P(F/A) + P(B)P(F/B) + \\
 &+ P(C)P(F/C) = \frac{1}{3} \cdot 0.03 + \frac{1}{3} \cdot 0.05 + \frac{1}{3} \cdot 0.04 = \\
 &= \frac{1}{25} \Rightarrow \boxed{P(\bar{F}) = 1 - P(F) = 1 - \frac{1}{25} = \frac{24}{25}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2.2) \boxed{P(B/F)} &= \frac{P(B \cap F)}{P(F)} = \frac{P(B)P(F/B)}{P(F)} = \\
 &= \frac{\frac{1}{3} \cdot 0.05}{\frac{1}{25}} = \boxed{\frac{5}{12}} \quad \text{donde en (1) hemos usado el teorema} \\
 &\quad \text{de la probabilidad total y en (2) la fórmula de Bayes.}
 \end{aligned}$$

④ Apartado b)

b.1) X = número de restaurantes que no pasarán la inspección

$$\left. \begin{array}{l} n = 8 \\ p = 0.05 \end{array} \right\} X \sim B(8, 0.05)$$

$$\boxed{P(X=3) = 0.054} \quad (\text{mirando en la tabla})$$

$$b.2) \boxed{P(X=0) = 0.6634} \quad (\text{mirando en la tabla})$$

$$\begin{aligned}
 b.3) \boxed{P(X \leq 6)} &= 1 - P(X > 6) = 1 - [P(X=7) + P(X=8)] = \\
 &= 1 - [0 + 0] = \boxed{1}
 \end{aligned}$$