Prueba de Acceso a la Universidad Curso 2024/2025

Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El estudiante deberá resolver los cuatro ejercicios propuestos. En los **ejercicios 2, 3 y 4** deberá contestar solamente a **UNO** de los dos apartados propuestos. Si resuelve más, se corregirá solo el primero de los dos apartados resueltos. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Solo se permite el uso de calculadores de tipo 1 y 2 (tal y como se indica en la información de las pruebas). **Cada ejercicio completo puntuará 2,5 puntos.** Duración de la prueba: 90 minutos.

EJERCICIO 1. La concentración de virus activos en una muestra de sangre (en un tiempo t desde que se tomó la muestra) se puede modelizar como una función $f(t) = 5(t+1)e^{-t}$, con $t \geq 0$.

a) **[1,25 puntos]** La pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(t)$ mide cómo cambia la concentración de virus activos. Calcula el tiempo en el que este cambio toma el valor más pequeño posible, es decir, el tiempo t en el que el valor de la derivada de $f(t)$ es mínimo.

b) **[1,25 puntos]** ¿Cuál sería el valor de la concentración de virus a largo plazo? Es decir, el valor cuando el tiempo tiende a infinito: $\lim_{t \to +\infty} f(t)$.

EJERCICIO 2. Elige y resuelve **solo uno** de los dos apartados siguientes:

Apartado a) Sean las rectas $r_1 \equiv \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{1}$ y $r_2 \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-1}$.

a.1) **[1,25 puntos]** Determina la ecuación de la recta, r_3, cuyo vector director es perpendicular a los vectores directores de las rectas r_1 y r_2 y que pasa por el punto $A(0,0,0)$.

a.2) **[1,25 puntos]** Calcula la distancia de la recta r_2 al punto $B(-1,-1,2)$.

Apartado b) Sea la recta $r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{2}$ y el plano $\pi \equiv x - y + 3z = 0$.

b.1) [**1,25 puntos**] Determina la ecuación del plano que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π.

b.2) [**1,25 puntos**] Calcula el ángulo entre la recta r y el plano π teniendo en cuenta que se cortan en el punto $A(0,0,0)$.

EJERCICIO 3. Elige y resuelve **solo uno** de los dos apartados siguientes.

Apartado a) Considera el siguiente sistema de ecuaciones, donde $a \in \mathbb{R}$: $\begin{cases} x + y + a \cdot z = 1 \\ x \qquad\quad - 2z = a. \\ 2x + y + \quad z = 3 \end{cases}$

a.1) [**1'5 puntos**] Discute el sistema de ecuaciones según los valores de a, e identifica el número de soluciones en cada caso.

a.2) [**1 punto**] Resuelve, razonadamente, el sistema de ecuaciones para $a = 0$.

Apartado b) Sea el sistema de ecuaciones $A \cdot X - B = X$, con $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & m \end{pmatrix}$, tal que $m \in \mathbb{R}$, y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Además, la matriz X es de dimensión 2×2.

b.1) [**1,5 puntos**] ¿Para qué valores del parámetro m el sistema anterior tiene solución única?

b.2) [**1 punto**] Para $m = 1$, resuelve el sistema y obtén el valor de X.

EJERCICIO 4. Elige y resuelve **solo uno** de los dos apartados siguientes:

Apartado a) Una baraja española está compuesta de 40 cartas, entre las que hay 4 ases. En un juego de azar dos jugadores compiten entre sí. El primer jugador baraja las cartas y las va sacando una a una hasta que encuentra un as. A continuación, el otro jugador vuelve a juntar todas las cartas y repite estos pasos (es decir, vuelve a barajar y va sacando cartas hasta encontrar un as). Gana el jugador que más cartas haya sacado (contando el as). Si ambos sacan el mismo número de cartas, entonces se produce un empate.

a.1) [**1,5 puntos**] Calcula las probabilidades de que el as salga al sacar 1, 2 y 3 cartas, respectivamente.

a.2) [**1 punto**] Si el primer jugador ha sacado dos cartas (contando el as), ¿cuál es la probabilidad de que el segundo jugador le gane?

Apartado b) Una empresa produce aparatos para medir distancias. Durante el proceso de calibración realiza una serie de experimentos para medir la distancia entre dos puntos, que están separados 1.5 metros entre sí. Debido al error de los aparatos, se sabe que los valores medidos siguen una distribución normal de media 1.5 m y varianza 0.64 m^2.

b.1) **[0,75 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que la medición del aparato sea de más de 2.1 m?

b.2) **[0,75 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de la que medición del aparato sea superior a 0.9 m?

b.3) **[1 punto]** ¿Cuál es el valor de la distancia tal que el 80.51% de las mediciones estarían por encima de él?

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.50	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.60	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.70	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.80	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.90	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.00	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.10	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.20	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.30	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177

JUNIO 2025

① $f(t)=5(t+1)e^{-t}\ ,\ t\geq 0$

a) Hay que optimizar $f'(t)$

$$f'(t)=5e^{-t}+5(t+1)e^{-t}\cdot(-1)=\cancel{5e^{-t}}-5te^{-t}-\cancel{5e^{-t}}=-5te^{-t}$$

$$f''(t)=-5e^{-t}-5te^{-t}(-1)=-5e^{-t}+5te^{-t}=5e^{-t}(-1+t)$$

$$f''(t)=0 \Rightarrow \begin{cases} +5e^{-t}=0 & \text{Nunca} \\ -1+t=0 \Rightarrow t=1 & \text{(posible extremo relativo)} \end{cases}$$

$$f'''(t)=5e^{-t}+5e^{-t}-5te^{-t}=10e^{-t}-5te^{-t}$$

$f'''(1)=5e^{-1}>0 \Rightarrow t=1$ es un mínimo relativo de $f'(t)$

$\boxed{\text{El tiempo para que el cambio sea mínimo es } t=1.}$

b) $\lim\limits_{t\to+\infty} 5(t+1)e^{-t}=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{5(t+1)}{e^{t}}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]\underset{(1)}{=}\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{5}{e^{t}}=0$

donde en (1) hemos aplicado la regla de L'Hôpital.

$\boxed{\text{El valor de la concentración a largo plazo es } 0.}$

② Apartado a)

a1) $r_3\equiv\{A,\vec{u_{r_3}}\}$ donde $A(0,0,0)$, $\vec{u_{r_3}}=\vec{u_{r_1}}\times\vec{u_{r_2}}$

$$\vec{u_{r_3}}=\vec{u_{r_1}}\times\vec{u_{r_2}}=\det\begin{pmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}=(0,3,3)$$

$$\boxed{r_3\equiv\frac{x}{0}=\frac{y}{3}=\frac{z}{3}\equiv\begin{cases}x=0\\ y=3\lambda\\ z=3\lambda\end{cases}\ \text{con } \lambda\in\mathbb{R}}$$

a2) $d(B,r_2)=\dfrac{|\vec{P_2B}\times\vec{u_{r_2}}|}{|\vec{u_{r_2}}|}$ donde $P_2\in r_2$

$$\vec{P_2B}=(-1,-1,2)-(1,1,1)=(-2,-2,1)$$

$$\vec{P_2B}\times\vec{u_{r_2}}=\det\begin{pmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -2 & -2 & 1\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}=(1,0,2)\Rightarrow|\vec{P_2B}\times\vec{u_{r_2}}|=\sqrt{5}$$

$$|\vec{u_{r_2}}|=\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}=\sqrt{6}$$

$$\boxed{d(B, r_2) = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{30}}{6}\ u}$$

Apartado b)

b1) $r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{2}$; $\pi \equiv x - y + 3z = 0$

$$\pi' \text{(plano) t.q.} \left\{ \begin{array}{l} r \subset \pi' \Rightarrow \vec{u_r} \perp \vec{n_{\pi'}} \\ \pi' \perp \pi \Rightarrow \vec{n_{\pi'}} \perp \vec{n_\pi} \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{n_{\pi'}} = \vec{u_r} \times \vec{n_\pi} =$$

$$= \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = (-1, -1, 0)$$

$$\pi' \equiv \{ A(0,0,0),\ \vec{n_{\pi'}} = (-1,-1,0) \}$$

$$\left. \begin{array}{l} \pi' \equiv -x - y + D = 0 \\ A(0,0,0) \in \pi' \end{array} \right\} \Rightarrow D = 0 \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \pi' \equiv -x - y = 0 \\ \pi' \equiv x + y = 0 \end{array}}$$

b2) $\alpha = \measuredangle\{r, \pi\} = \operatorname{arcsen} \frac{|\vec{u_r} \cdot \vec{n_\pi}|}{|\vec{u_r}||\vec{n_\pi}|}$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u_r} = (1,-1,2) \\ \vec{n_\pi} = (1,-1,3) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \vec{u_r} \cdot \vec{n_\pi} = (1,-1,2) \cdot (1,-1,3) = 1 + 1 + 6 = 8 \\ |\vec{u_r}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{6} \end{array}$$

$$|\vec{n_\pi}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{11}$$

$$\boxed{\alpha = \operatorname{arcsen} \frac{8}{\sqrt{6}\sqrt{11}} = 79^\circ 58' 30{,}04''}$$

3) Apartado a)

a1) $\left\{ \begin{array}{l} x + y + az = 1 \\ x \quad - 2z = a \\ 2x + y + z = 3 \end{array} \right.$, $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\tilde{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & -2 & a \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Rango de M

$$\det M = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = a - 3 = 0 \Rightarrow a = 3$$

- Si $a \neq 3 \Rightarrow$ rango $M = 3 =$ rango $\tilde{M}$
- Si $a = 3 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow$ rango $M = 2$

Rango de $\tilde{M}$ para $a=3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[-2F_1+F_3]{-F_1+F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & 2 \\ 0 & -1 & -5 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-F_2+F_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rango } \tilde{M}=3$$

También se podría justificar con determinantes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow \text{rango } \tilde{M}=3$$

Discusión (teorema de Rouché-Fröbenius)

Si $a \neq 3 \Rightarrow$ rango $M = 3 =$ rango $\tilde{M} =$ nº de incógnitas $\Rightarrow$ S.C.D. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ el sistema tiene solución única

Si $a = 3 \Rightarrow$ rango $M = 2 \neq 3 =$ rango $\tilde{M} \Rightarrow$ S.I. $\Rightarrow$ el sistema no tiene solución

a2) Resolución para $a=0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[-2F_1+F_3]{-F_1+F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-F_2+F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{c} [1] \\ [2] \\ [3] \end{array}$$

De [3]: $z = \frac{2}{3}$

Sustituimos en [2]: $y = \dfrac{-1+2\cdot\frac{2}{3}}{-1} = -\frac{1}{3}$

Sustituimos en [1]: $x = 1-\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}$

Solución: $(x,y,z) = \left(\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

③ Apartado b)

$AX - B = X$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & m \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

b1) $AX - X = B$

$(A-I)X = B$

Este sistema tiene solución única si $\exists (A-I)^{-1}$ y

$\exists (A-I)^{-1} \Leftrightarrow \det(A-I) \neq 0$

Calculamos $A-I$

$$A-I=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & m \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & m-1 \end{pmatrix}$$

Calculamos $\det(A-I)$

$$\det(A-I)=\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & m-1 \end{pmatrix}=m-2=0 \Rightarrow m=2$$

$\boxed{\text{El sistema tiene solución única si } m\neq 2}$

Otra forma, con muchas más operaciones

$$AX-B=X \Rightarrow AX-X=B \Rightarrow (A-I)X=B \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (A-I)^{-1}(A-I)X=(A-I)^{-1}B \Rightarrow X=(A-I)^{-1}B$$

- Calculamos $A-I$

$$A-I=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & m-1 \end{pmatrix}$$

- Calculamos $(A-I)^{-1}$

$$(A-I)^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{m-1}{m-2} & -\frac{1}{m-2} \\ -\frac{1}{m-2} & \frac{1}{m-2} \end{pmatrix}$$

- Calculamos X

$$X=\begin{pmatrix} \frac{m-1}{m-2} & -\frac{1}{m-2} \\ -\frac{1}{m-2} & \frac{1}{m-2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{m-1}{m-2}-\frac{1}{m-2} & \frac{m-1}{m-2} \\ -\frac{1}{m-2}+\frac{1}{m-2} & -\frac{1}{m-2} \end{pmatrix}$$

que solo tiene sentido para $m\neq 2$ y, por tanto, solución única para $m\neq 2$.

b2) Resolución para $m=1$

Calculamos $A-I$

$$A-I=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos $(A-I)^{-1}$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-F_1+F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2\cdot(-1)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \rightarrow$$

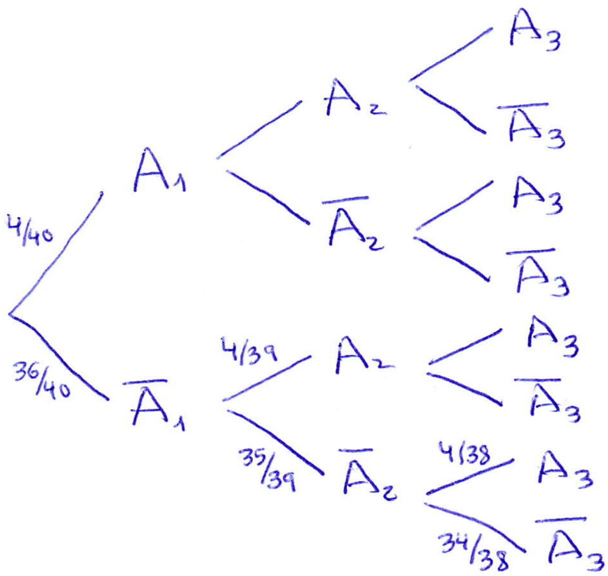
$$\xrightarrow{-F_2+F_1}\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow (A-I)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculamos X

$$\boxed{X = (A-I)^{-1}B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

4) Apartado a)

a1) A_i = sacar as en la i-ésima extracción



Al sacar 1 carta

$$\boxed{P(A_1) = \frac{4}{40} = 0{,}1}$$

Al sacar 2 cartas

$$\boxed{P(\overline{A}_1 \cap A_2) \underset{①}{=} \frac{36}{40}\cdot\frac{4}{39} = \frac{6}{65} \simeq 0{,}09}$$

Al sacar 3 cartas

$$\boxed{P(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3) \underset{②}{=} \frac{36}{40}\cdot\frac{35}{39}\cdot\frac{4}{38} = \frac{21}{247} \simeq 0{,}09}$$

Vamos a escribir ① y ② correctamente:

$$P(\overline{A}_1 \cap A_2) = P(\overline{A}_1)P(A_2/\overline{A}_1) = \frac{36}{40}\cdot\frac{4}{39} = \frac{6}{65}$$

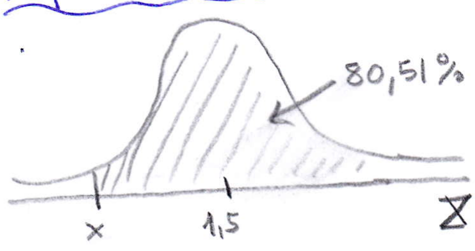
$$P(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3) = P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2/\overline{A}_1)P(A_3/\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2) = \frac{36}{40}\cdot\frac{35}{39}\cdot\frac{4}{38} = \frac{21}{247}$$

a2) Para que el segundo jugador gane, debe sacar más de 2 cartas

$$\boxed{P(\text{As después de la } 2^{a} \text{ extracción})} = 1 - [P(A_1) + P(\overline{A}_1 \cap A_2)] =$$

$$= 1 - \left[\frac{4}{40} + \frac{6}{65}\right] = \boxed{\frac{21}{26} \simeq 0{,}81}$$

Apartado b)



(En el folio 6)

b.3) X = mediciones del aparato (en m)

$X \sim N(1{,}5\ ,\ 0{,}8)$ ya que $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{0{,}64} = 0{,}8$

$P(X \geq x) = 0{,}8051 \Rightarrow P\left(Z \geq \underbrace{\frac{x-1{,}5}{0{,}8}}_{\text{negativo}}\right) = 0{,}8051 \Rightarrow$

$\Rightarrow P\left(Z \leq -\frac{x-1{,}5}{0{,}8}\right) = 0{,}8051 \Rightarrow$ (mirando en la tabla)

$\Rightarrow -\dfrac{x-1{,}5}{0{,}8} = 0{,}86 \Rightarrow \quad x-1{,}5 = -0{,}86\cdot 0{,}8 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = -0{,}86\cdot 0{,}8 + 1{,}5 = 0{,}812$

El valor de la distancia tal que el 80,51 % de las mediciones esté por encima de él es 0,812 m.

③ b1) Sabemos que $X = (A-I)^{-1}B$ y

$$A-I = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & m \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & m-1 \end{pmatrix}$$

Como $\det(A-I) = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & m-1 \end{pmatrix} = m-1-1 = m-2$,

$$\exists (A-I)^{-1} \Leftrightarrow \det(A-I) \neq 0 \Leftrightarrow m-2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2$$

y como además $\det B = 1$, se tiene que $\det((A-I)^{-1}B) \neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow m \neq 2$ ya que $\det[(A-I)^{-1}B] = \det[(A-I)^{-1}]\det B$.

④ Apartado b)

b.1) X = mediciones del aparato (en m)

$X \sim N(1{,}5\,,\ 0{,}8)$, $\sigma^2 = 0{,}64 \Rightarrow \sigma = \sqrt{0{,}64} = 0{,}8$

$\boxed{P(X > 2{,}1)} = P\left(Z > \dfrac{2{,}1-1{,}5}{0{,}8}\right) = P(Z > 0{,}75) = 1 - P(Z < 0{,}75) =$

$= 1 - 0{,}7734 = \boxed{0{,}2266}$

b.2) $\boxed{P(X > 0{,}9)} = P\left(Z > \dfrac{0{,}9-1{,}5}{0{,}8}\right) = P(Z > -0{,}75) = 1 - P(Z < -0{,}75) =$

$= 1 - [1 - P(Z < 0{,}75)] = P(Z < 0{,}75) = \boxed{0{,}7734}$

b.3) $P(X > x) = 0{,}8051 \Rightarrow P(X \leq x) = 1 - 0{,}8051 = 0{,}1949 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ (tipificando) $P\left(Z < \dfrac{x-1{,}5}{0{,}8}\right) = 0{,}1949 \Rightarrow$ (mirando en la tabla)

$\dfrac{x-1{,}5}{0{,}8} = -0{,}86$ (negativo, ya que el miembro de la izquierda es negativo)

$\Rightarrow x = -0{,}86\cdot 0{,}8 + 1{,}5 = 0{,}812$

El valor de la distancia tal que el 80,51 % de las mediciones esté por encima de él es 0,812 m.