Matemáticas II (Modelo 1) ESTRUCTURA EXAMEN

La prueba consta de 4 partes: la primera sin opcionalidad, y las otras tres con dos posibles problemas a contestar uno. En caso de contestar dos problemas de una misma parte, solo se evaluará el primero.
Justifique las respuestas usando lenguaje matemático y/o no matemático, según corresponda. Se permite utilizar calculadora científica básica. No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables, ni de dispositivos que puedan transmitir o almacenar información.

Parte A. Contesta el único problema de esta parte (total 2.5 pt).

Problema A1.– La NASA se dispone a lanzar una nave espacial desde su base en Cabo Cañaveral, Florida.

a) **[0.5 puntos]** Supongamos que la nave viaje siempre en la línea recta. Si se lanza en dirección $\vec{d} = (2,3,6)$ y sabemos que la Luna se encuentra a 384.400km de la Tierra. ¿Cuáles son las coordenadas de la luna respecto de la base localizada en Cabo Cañaveral?

b) **[0.5 puntos]** Calcula el plano perpendicular a la trayectoria de la nave y que contiene la Luna.

c) **[0.75 puntos]** En lugar de lanzar la nave directamente hacia la Luna, normalmente se hace un primer lanzamiento para ajustar la trayectoria y a continuación se reajusta la trayectoria hacia el destino deseado. Si, partiendo desde la base, el primer lanzamiento se hace en dirección $\vec{d}_{inicial} = (1,1,2)$, ¿cuál es la dirección que deben poner en el reajuste para llegar a la Luna con esta segunda trayectoria?

d) **[0.75 puntos]** Calcula la intersección de la recta que pasa por la Luna y el vector director (2,3, 6), con el plano z = 0.

Parte B. Contesta sólo un problema de esta parte (total 2.5 pt).

Problema B1.– Una fábrica de vino de Mallorca produce 3 tipos de vino: tinto, blanco y rosado. Con la finalidad de saber el precio de cada tipo de vino, hemos comprado vino, el mismo día y en la misma fábrica, de 4 maneras diferentes:

- Comprando 3 botellas de vino tinto y 2 de vino blanco hemos pagado 67 €.
- Comprando 2 botellas de vino tinto, 4 de vino blanco y 1 de rosado hemos pagado 85 €
- Comprando 1 botella de vino tinto y 1 de vino rosado hemos pagado 21 €, y finalmente,
- Comprando 4 botellas de vino blanco y 5 de vino rosado hemos pagado 85 €

(a) **[0.75 puntos]** Escribe, en forma matricial, el sistema de ecuaciones lineales que se debería de resolver para poder averiguar el precio de cada tipo de vino.

(b) **[0.5 puntos]** ¿Es necesario tener los datos de las 4 compras para saber el precio de cada tipo de vino?

(c) **[1.25 puntos]** Calcula cuál es el precio de cada tipo de vino.

Problema B2.– Considera las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \; y \; B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Y sea O la matriz nula de orden 2x2.

(a) **[1 punto]** Calcula todas las matrices X tales que $AX - X = B$.

(b) **[0.75 puntos]** Encuentra una matriz Y diferente de O tal que $(A-B)Y = O$

(c) **[0.75 puntos]** Indica todas las matrices que cumplen la igualdad $AZ = O$

Parte C. Contesta sólo un problema de esta parte (total 2.5 pt).

Problema C1.– Queremos vallar un campo rectangular utilizando diferentes materiales en cada lado. Empezando por el fondo del campo y moviéndonos alrededor de éste en el sentido contrario a las agujas del reloj, el coste del material para cada lado es de 6 €/m. 9 €/m, 12 €/m y 14 €/m, respectivamente. Si tenemos que gastar exactamente 1000 € para comprar el material del cercado, determina las dimensiones del campo que maximizarán el área encerrada.

Problema C2.– La cantidad de toneladas de agua infectada por una bacteria se espera que siga la función $f(x)=e^{-x}+0.15x+1$ siendo $x\geq 0$ los días de infección y *f(x)* las toneladas de agua infectada.

(a) **[1 punto]** ¿Cuántas toneladas de agua había inicialmente infectadas por la bacteria? ¿Hacia qué valor tiende la cantidad de agua infectada? Interpreta los resultados.

(b) **[1 punto]** ¿En qué momento hay menos cantidad de agua infectada? ¿Cuántas toneladas hay en ese momento?

(c) **[0.5 puntos]** ¿Hay algún momento en el que el agua no esté infectada? Justifica la respuesta.

Parte D. Contesta sólo un problema de esta parte (total 2.5 pt).

Problema D1.– Sean A y B dos sucesos de un mismo espacio muestral tales que satisface que $P(A\cup B)=0.7$, $P(A\cap B)=0.1$ y $P(A\cap B^c)=0.35$ (siendo B^c el suceso complementario de B), calcula:

(a) **[0.75 puntos]** $P(A)$.

(b) **[0.75 puntos]** $P(B)$.

(c) **[0.5 puntos]** $P(A^C\cup B^C)$.

(d) **[0.5 puntos]** ¿Son A y B sucesos independientes?

Problema D2.– El 38% de los habitantes de un pueblo afirman que su deporte favorito es la natación, mientras que el 21% prefieren el ciclismo y los habitantes restantes se inclinan más por otros deportes. Si se escoge al azar una persona y, acto seguido otra diferente, calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:

(a) **[0.75 puntos]** Que las dos personas sean aficionadas a la natación.

(b) **[0.75 puntos]** Que una de las dos personas sea aficionada al ciclismo y la otra a la natación.

(c) **[1 punto]** Sabiendo que la primera prefiere el ciclismo, que la segunda no prefiera este deporte.

SOLUCIONES

Problema A1.– La NASA se dispone a lanzar una nave espacial desde su base en Cabo Cañaveral, Florida.

a) **[0.5 puntos]** Supongamos que la nave viaje siempre en la línea recta. Si se lanza en dirección $\vec{d}=(2,3,6)$ y sabemos que la Luna se encuentra a 384.400 km de la Tierra. ¿Cuáles son las coordenadas de la luna respecto de la base localizada en Cabo Cañaveral?

b) **[0.5 puntos]** Calcula el plano perpendicular a la trayectoria de la nave y que contiene la Luna.

c) **[0.75 puntos]** En lugar de lanzar la nave directamente hacia la Luna, normalmente se hace un primer lanzamiento para ajustar la trayectoria y a continuación se reajusta la trayectoria hacia el destino deseado. Si, partiendo desde la base, el primer lanzamiento se hace en dirección $\vec{d}_{inicial}=(1,1,2)$, ¿cuál es la dirección que deben poner en el reajuste para llegar a la Luna con esta segunda trayectoria?

d) **[0.75 puntos]** Calcula la intersección de la recta que pasa por la Luna y el vector director $(2,3,6)$, con el plano $z=0$.

a) Cabo Cañaveral está en el origen del lanzamiento en O(0,0,0) y la luna en el punto L(a,b,c). El lanzamiento de la nave espacial va en línea recta a la luna por lo que la longitud del vector $\overrightarrow{OL}$ es de 384.400 km.

La luna está en línea recta en dirección $\vec{d}=(2,3,6)$.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{OL}=(a,b,c)-(0,0,0)=(a,b,c)\\ \overrightarrow{OL}=x\vec{d}=x(2,3,6)=(2x,3x,6x)\end{array}\right\}\Rightarrow(a,b,c)=(2x,3x,6x)$$

La distancia de Cabo Cañaveral a la luna es de 384.400 km. El módulo del vector $\overrightarrow{OL}$ es de 384.400 km.

$$\left.\begin{array}{l}\left|\overrightarrow{OL}\right|=384400\\ \overrightarrow{OL}=(2x,3x,6x)\end{array}\right\}\Rightarrow\sqrt{(2x)^2+(3x)^2+(6x)^2}=384400\Rightarrow\sqrt{49x^2}=384400\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7x=384400\Rightarrow x=\frac{384400}{7}\Rightarrow\overrightarrow{OL}=\left(\frac{768800}{7},\frac{1153200}{7},\frac{2306400}{7}\right)$$

Las coordenadas de la luna respecto de la base localizada en Cabo Cañaveral son $L\left(\frac{768800}{7},\frac{1153200}{7},\frac{2306400}{7}\right)$.

b) El plano π perpendicular a la trayectoria de la nave y que contiene la Luna tiene como vector normal el vector $\vec{d}=(2,3,6)$ y contiene el punto $L\left(\frac{768800}{7},\frac{1153200}{7},\frac{2306400}{7}\right)$.

$$\left.\begin{array}{l} L\left(\frac{768800}{7},\frac{1153200}{7},\frac{2306400}{7}\right)\in\pi \\ \vec{n}=\vec{d}=(2,3,6) \end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l} L\left(\frac{768800}{7},\frac{1153200}{7},\frac{2306400}{7}\right)\in\pi \\ \pi: 2x+3y+6z+D=0 \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\frac{768800}{7}+3\frac{1153200}{7}+6\frac{2306400}{7}+D=0\Rightarrow D=\frac{-18835600}{7}=-2690800\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi: 2x+3y+6z-2690800=0}$$

c) Debemos indicar una dirección $\vec{v}$ que cambie de la dirección inicial $\vec{d}_{inicial}=(1,1,2)$ a $\vec{d}=(2,3,6)$.

$$\vec{d}_{inicial}+\vec{v}=\vec{d}\Rightarrow(1,1,2)+\vec{v}=(2,3,6)\Rightarrow\vec{v}=(2,3,6)-(1,1,2)=(1,2,4)$$

La nueva dirección para conseguir el reajuste es $\vec{v}=(1,2,4)$.

d) Hallamos la ecuación de la recta *r* que pasa por la Luna $L\left(\frac{768800}{7},\frac{1153200}{7},\frac{2306400}{7}\right)$ y tiene el vector director $(2,3,6)$.

$$\left.\begin{array}{l} L\left(\frac{768800}{7},\frac{1153200}{7},\frac{2306400}{7}\right)\in r \\ \vec{u_r}=(2,3,6) \end{array}\right\}\Rightarrow r\equiv\begin{cases} x=\frac{768800}{7}+2\alpha \\ y=\frac{1153200}{7}+3\alpha \\ z=\frac{2306400}{7}+6\alpha \end{cases}$$

Hallamos el punto P de intersección de la recta *r* y el plano $z=0$.

$$\left.\begin{array}{r} z=0 \\ r\equiv\begin{cases} x=\frac{768800}{7}+2\alpha \\ y=\frac{1153200}{7}+3\alpha \\ z=\frac{2306400}{7}+6\alpha \end{cases} \end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases} x=\frac{768800}{7}+2\alpha \\ y=\frac{1153200}{7}+3\alpha \\ 0=\frac{2306400}{7}+6\alpha\to 6\alpha=\frac{-2306400}{7}\to\alpha=\frac{-384400}{7} \end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases} x=\frac{768800}{7}+2\frac{-384400}{7}=0 \\ y=\frac{1153200}{7}+3\frac{-384400}{7}=0 \end{cases}\Rightarrow P(0,0,0)$$

El punto de intersección tiene coordenadas $P(0,0,0)$. El punto de intersección es Cabo Cañaveral.

Problema B1.– Una fábrica de vino de Mallorca produce 3 tipos de vino: tinto, blanco y rosado. Con la finalidad de saber el precio de cada tipo de vino, hemos comprado vino, el mismo día y en la misma fábrica, de 4 maneras diferentes:

- Comprando 3 botellas de vino tinto y 2 de vino blanco hemos pagado 67 €.
- Comprando 2 botellas de vino tinto, 4 de vino blanco y 1 de rosado hemos pagado 85 €
- Comprando 1 botella de vino tinto y 1 de vino rosado hemos pagado 21 €, y finalmente,
- Comprando 4 botellas de vino blanco y 5 de vino rosado hemos pagado 85 €

(a) **[0.75 puntos]** Escribe, en forma matricial, el sistema de ecuaciones lineales que se debería de resolver para poder averiguar el precio de cada tipo de vino.

(b) **[0.5 puntos]** ¿Es necesario tener los datos de las 4 compras para saber el precio de cada tipo de vino?

(c) **[1.25 puntos]** Calcula cuál es el precio de cada tipo de vino.

(a) Llamamos "x" al precio de la botella de vino tinto, "y" al precio de la botella de vino blanco y "z" al precio de la botella de vino rosado.

Comprando 3 botellas de vino tinto y 2 de vino blanco hemos pagado 67 € → $3x+2y=67$

Comprando 2 botellas de vino tinto, 4 de vino blanco y 1 de rosado hemos pagado 85 € → $2x+4y+z=85$.

Comprando 1 botella de vino tinto y 1 de vino rosado hemos pagado 21 € → $x+z=21$.

Comprando 4 botellas de vino blanco y 5 de vino rosado hemos pagado 85 € → $4y+5z=85$.

El sistema de ecuaciones que permite obtener los precios quedaría:

$$\left.\begin{array}{r} 3x+2y \quad\;\; =67 \\ 2x+4y+z=85 \\ x \qquad +z=21 \\ 4y+5z=85 \end{array}\right\}$$

Puesto en forma matricial quedaría:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 67 \\ 85 \\ 21 \\ 85 \end{pmatrix}$$

(b) El sistema tiene tres incógnitas y cuatro ecuaciones. No es necesaria una de las ecuaciones. Se supone que nos han cobrado bien y una de las informaciones es innecesaria.

(c) Resolvemos el sistema utilizando el método de Gauss.

$$\left.\begin{array}{r} 3x+2y \quad\;\; =67 \\ 2x+4y+z=85 \\ x \qquad +z=21 \\ 4y+5z=85 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\text{Ecuación } 3^{\text{a}} \leftrightarrow \text{Ecuación } 1^{\text{a}}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x \qquad +z=21 \\ 3x+2y \quad\;\; =67 \\ 2x+4y+z=85 \\ 4y+5z=85 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 2^{a} - 3 \cdot \text{Ecuación } 1^{a} \\ \begin{array}{rrrl} 3x & +2y & & =67 \\ -3x & & -3z & =-63 \\ \hline & 2y & -3z & =4 \end{array} \to \text{Nueva Ecuación } 2^{a} \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 3^{a} - 2 \cdot \text{Ecuación } 1^{a} \\ \begin{array}{rrrl} 2x & +4y & +z & =85 \\ -2x & & -2z & =-42 \\ \hline & 4y & -z & =43 \end{array} \to \text{Nueva Ecuación } 3^{a} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{r} x \quad\quad + z = 21 \\ 2y - 3z = 4 \\ 4y - z = 43 \\ 4y + 5z = 85 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 4^{a} - \text{Ecuación } 3^{a} \\ \begin{array}{rrl} 4y & +5z & =85 \\ -4y & +z & =-43 \\ \hline & 6z & =42 \end{array} \to \text{Nueva Ecuación } 4^{a} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 3^{a} - 2 \cdot \text{Ecuación } 2^{a} \\ \begin{array}{rrl} 4y & -z & =43 \\ -4y & +6z & =-8 \\ \hline & 5z & =35 \end{array} \to \text{Nueva Ecuación } 3^{a} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{r} x \quad\quad + z = 21 \\ 2y - 3z = 4 \\ 5z = 35 \to \boxed{z=7} \\ 6z = 42 \to \boxed{z=7} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{r} x + 7 = 21 \\ 2y - 21 = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \boxed{x = 21 - 7 = 14} \\ 2y = 25 \to \boxed{y = \dfrac{25}{2} = 12.5} \end{array} \right\}$$

La botella de vino tinto cuesta 14 euros, la de vino blanco cuesta 12.5 euros y la de vino rosado cuesta 7 euros.

Problema B2.– Considera las matrices

$$A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 0 & 3\end{pmatrix}\ y\ \ B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

Y sea O la matriz nula de orden 2x2.

(a) **[1 punto]** Calcula todas las matrices X tales que $AX-X=B$.

(b) **[0.75 puntos]** Encuentra una matriz Y diferente de O tal que $(A-B)Y=O$

(c) **[0.75 puntos]** Indica todas las matrices que cumplen la igualdad $AZ=O$

(a)Despejamos la matriz X de la ecuación matricial.

$$AX-X=B\Rightarrow (A-I)X=B\Rightarrow X=(A-I)^{-1}B$$

Comprobamos que la matriz A – I tiene inversa y la calculamos.

$$A-I=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 0 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$$

$$|A-I|=\begin{vmatrix}2 & -1\\ 0 & 2\end{vmatrix}=4\neq 0$$

$$(A-I)^{-1}=\frac{Adj(A-I)^T}{|A-I|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix}}{4}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2 & 1/4\\ 0 & 1/2\end{pmatrix}$$

Determinamos la expresión de X.

$$X=(A-I)^{-1}B=\begin{pmatrix}1/2 & 1/4\\ 0 & 1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+\frac{1}{4} & \frac{1}{2}+\frac{1}{4}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$\boxed{X=\begin{pmatrix}\frac{5}{4} & \frac{3}{4}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}}$$

(b) $A-B=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 0 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & 2\end{pmatrix}$

Como su determinante es nulo no existe su inversa.

La matriz Y es de orden 2x2. La matriz es $Y=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$

$$(A-B)Y=O\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}a-2c & b-2d\\ -a+2c & -b+2d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a-2c=0 \\ b-2d=0 \\ -a+2c=0 \\ -b+2d=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2c \\ a=2c \\ \\ b=2d \\ b=2d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2c \\ b=2d \end{cases} \Rightarrow \boxed{Y=\begin{pmatrix} 2c & 2d \\ c & d \end{pmatrix}}$$

Una solución no nula del problema puede ser tomando $c = 1$ y $d = 1$ → $Y=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(c) La matriz Z debe ser de orden 2x2. Consideramos $Z=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

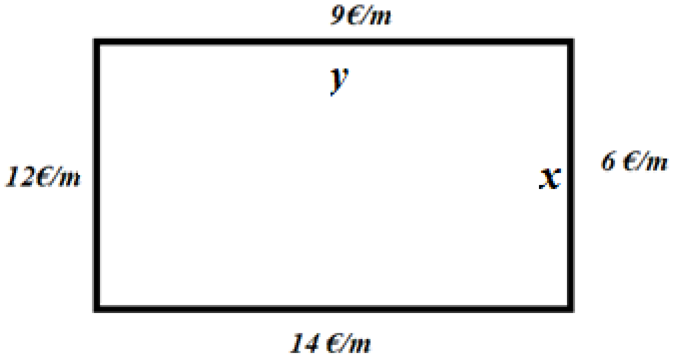
$$AZ=O \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3a-c & 3b-d \\ 3c & 3d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3a-c=0 \\ 3b-d=0 \\ 3c=0 \to \boxed{c=0} \\ 3d=0 \to \boxed{d=0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a=0 \to \boxed{a=0} \\ 3b=0 \to \boxed{b=0} \end{cases} \Rightarrow \boxed{Z=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

La única matriz solución de la ecuación es la matriz nula.

Problema C1.– Queremos vallar un campo rectangular utilizando diferentes materiales en cada lado. Empezando por el fondo del campo y moviéndonos alrededor de éste en el sentido contrario a las agujas del reloj, el coste del material para cada lado es de 6 €/m. 9 €/m, 12 €/m y 14 €/m, respectivamente. Si tenemos que gastar exactamente 1000 € para comprar el material del cercado, determina las dimensiones del campo que maximizarán el área encerrada.

La situación planteada es la del dibujo.



El coste del vallado sería:

$$C(x,y)=6x+9y+12x+14y=18x+23y$$

Como el gasto debe ser 1000 € tenemos:

$$C(x,y)=18x+23y=1000 \Rightarrow 23y=1000-18x \Rightarrow y=\frac{1000-18x}{23}$$

El área del campo rectangular es $A(x,y)=xy$. Sustituimos "y" en la expresión del área y nos queda una expresión que depende solo de "x".

$$\left.\begin{array}{l} y=\dfrac{1000-18x}{23} \\ A(x,y)=xy \end{array}\right\} \Rightarrow A(x)=x\frac{1000-18x}{23}=\frac{1000x-18x^2}{23}$$

Hallamos el máximo de esta función usando la derivada.

$$A(x)=\frac{1000x-18x^2}{23} \Rightarrow A'(x)=\frac{1000-36x}{23}$$

$$A'(x)=0 \Rightarrow \frac{1000-36x}{23}=0 \Rightarrow 1000-36x=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 36x=1000 \Rightarrow x=\frac{1000}{36}=\frac{250}{9}\simeq 27.77\,m$$

Averiguamos si este punto crítico es máximo sustituyendo su valor en la derivada segunda.

$$A'(x)=\frac{1000-36x}{23} \Rightarrow A''(x)=\frac{-36}{23} \Rightarrow A''\left(\frac{250}{9}\right)=\frac{-36}{23}<0$$

Como la segunda derivada es negativa la función área tiene un máximo relativo en $x=\frac{250}{9}\simeq 27.77\,m$.

Para $x=\frac{250}{9}\simeq 27.77\,m$ el valor de "y" es:

$$y=\frac{1000-18\frac{250}{9}}{23}=\frac{1000-500}{23}=\frac{500}{23}\simeq 21.74\,m$$

Las dimensiones del campo con área máxima y cumpliendo lo pedido en el problema tiene aproximadamente 21.74 metros de ancho y 27.77 de largo.

Problema C2.– La cantidad de toneladas de agua infectada por una bacteria se espera que siga la función $f(x)=e^{-x}+0.15x+1$ siendo $x\geq 0$ los días de infección y *f(x)* las toneladas de agua infectada.

(a) **[1 punto]** ¿Cuántas toneladas de agua había inicialmente infectadas por la bacteria? ¿Hacia qué valor tiende la cantidad de agua infectada? Interpreta los resultados.

(b) **[1 punto]** ¿En qué momento hay menos cantidad de agua infectada? ¿Cuántas toneladas hay en ese momento?

(c) **[0.5 puntos]** ¿Hay algún momento en el que el agua no esté infectada? Justifica la respuesta.

(a) Nos piden hallar *f(0)* → $f(0)=e^{-0}+0.15\cdot 0+1=2$. Inicialmente hay infectadas 2 toneladas de agua.

Calculamos $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x}+0.15x+1=e^{-\infty}+0.15\cdot(+\infty)+1=0+\infty+1=+\infty$$

Significa que con el paso del tiempo acaba infectándose toda el agua.

(b) Buscamos el mínimo de la función *f(x)*.

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=-e^{-x}+0.15 \\ f'(x)=0 \end{array}\right\}\Rightarrow -e^{-x}+0.15=0\Rightarrow e^{-x}=0.15\Rightarrow -x=\ln 0.15\Rightarrow x=-\ln 0.15\simeq 1.9$$

$$f''(x)=e^{-x}\Rightarrow f''(-\ln 0.15)=e^{\ln 0.15}=0.15>0$$

La función presenta un mínimo relativo en $x = 1.9$.

$$f(-\ln 0.15)=e^{\ln 0.15}+0.15(-\ln(0.15))+1=0.15-0.15\ln 0.15+1=1.15-0.15\ln(0.15)\simeq 1.43$$

En el momento de mínima cantidad de agua infectada hay, aproximadamente, 1.43 toneladas de agua infectada.

(c) Estudiamos si la función se anula.

$$f(x)=e^{-x}+0.15x+1=\frac{1}{e^x}+0.15x+1$$

Esta función para $x\geq 0$ siempre es positiva. Nunca se anula.

OTRA FORMA DE RAZONARLO.

La función es continua. En $x = 0$ vale 2, disminuye hasta su valor mínimo 1.43 y vuelve a crecer hasta $+\infty$. Nunca alcanza el valor 0.

Problema D1.– Sean A y B dos sucesos de un mismo espacio muestral tales que satisface que $P(A\cup B)=0.7$, $P(A\cap B)=0.1$ y $P(A\cap B^c)=0.35$ (siendo B^c el suceso complementario de B), calcula:

(a) **[0.75 puntos]** $P(A)$.

(b) **[0.75 puntos]** $P(B)$.

(c) **[0.5 puntos]** $P(A^C\cup B^C)$.

(d) **[0.5 puntos]** ¿Son A y B sucesos independientes?

(a)Usamos la fórmula $P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap B^C)$.

$$\left.\begin{array}{l} P(A\cap B^c)=0.35 \\ P(A\cap B)=0.1 \\ P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap B^C) \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{P(A)=0.1+0.35=0.45}$$

(b)Utilizamos la fórmula $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$.

$$\left.\begin{array}{l} P(A\cup B)=0.7 \\ P(A\cap B)=0.1 \\ P(A)=0.45 \\ P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B) \end{array}\right\} \Rightarrow 0.7=0.45+P(B)-0.1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{P(B)=0.7-0.45+0.1=0.35}$$

(c)Utilizamos las leyes de Morgan.

$$P(A^C\cup B^C)=P\left((A\cap B)^C\right)=1-P(A\cap B)=1-0.1=\boxed{0.9}$$

(d)Para que sean independientes debe cumplirse que $P(A\cap B)=P(A)P(B)$.

$$\left.\begin{array}{l} P(A\cap B)=0.1 \\ P(A)P(B)=0.45\cdot 0.35=0.1575 \end{array}\right\} \Rightarrow P(A\cap B)=0.1\neq 0.1575=P(A)P(B)$$

Al no cumplirse la igualdad los sucesos A y B no son independientes.

Problema D2.– El 38% de los habitantes de un pueblo afirman que su deporte favorito es la natación, mientras que el 21% prefieren el ciclismo y los habitantes restantes se inclinan más por otros deportes. Si se escoge al azar una persona y, acto seguido otra diferente, calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:

(a) **[0.75 puntos]** Que las dos personas sean aficionadas a la natación.

(b) **[0.75 puntos]** Que una de las dos personas sea aficionada al ciclismo y la otra a la natación.

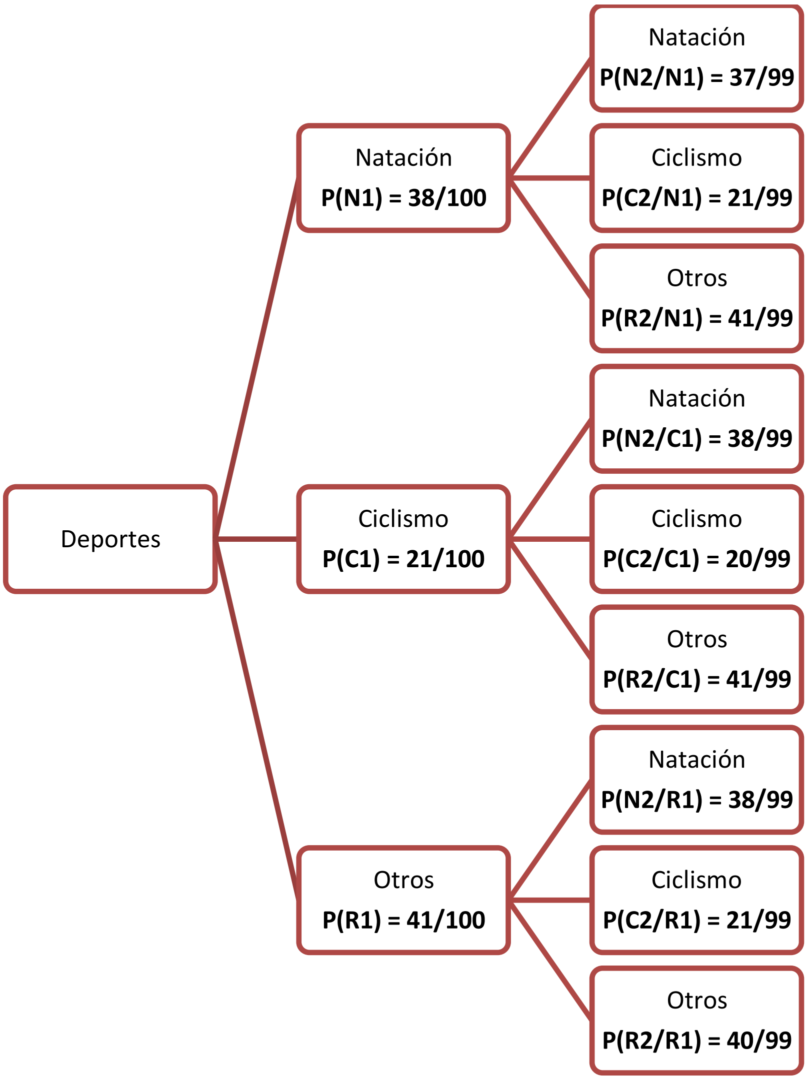
(c) **[1 punto]** Sabiendo que la primera prefiere el ciclismo, que la segunda no prefiera este deporte.

Llamamos N a "el habitante de un pueblo prefiere la natación", C a "el habitante prefiere el ciclismo" y R a "el habitante prefiere otros deportes". Como se eligen dos habitantes sin reemplazamiento llamaremos N1, N2, C1, C2, R1 y R2 al suceso en primera y segunda elección.

Sabemos que en la primera elección las probabilidades son:

$$P(N1)=\frac{38}{100},\ P(C1)=\frac{21}{100}\ \text{ y }\ P(R1)=1-\frac{38}{100}-\frac{21}{100}=\frac{41}{100}$$

Realizamos un diagrama de árbol para establecer las probabilidades de la segunda elección que depende de lo ocurrido en la primera. Supondremos una población de 100 habitantes.



(a) Nos piden calcular $P(N1 \cap N2)$. Usamos la información de la tabla.

$$P(N1 \cap N2) = P(N1)P(N2/N1) = \frac{38}{100} \cdot \frac{37}{99} = \boxed{\frac{703}{4950} \simeq 0.142}$$

La probabilidad de que las dos personas elegidas sean aficionadas a la natación es de 0.142.

(b) Nos piden calcular $P(N1 \cap C2) + P(C1 \cap N2)$. Usamos la información de la tabla.

$$P(N1 \cap C2) + P(C1 \cap N2) = P(N1)P(C2/N1) + P(C1)P(N2/C1) =$$

$$= \frac{38}{100} \cdot \frac{21}{99} + \frac{21}{100} \cdot \frac{38}{99} = 2\frac{38}{100} \cdot \frac{21}{99} = \boxed{\frac{133}{825} \simeq 0.1612}$$

La probabilidad de que una de las dos personas sea aficionada al ciclismo y la otra a la natación es de 0.1612.

(c) Nos piden calcular $P((N2 \cup R2)/C1)$.

$$P((N2 \cup R2)/C1) = P(N2/C1) + P(R2/C1) = \frac{38}{99} + \frac{41}{99} = \boxed{\frac{79}{99} \simeq 0.798}$$

La probabilidad de que la segunda persona no prefiera el ciclismo sabiendo que la primera prefiere el ciclismo es de 0.798.