

6

Proporcionalidad y porcentajes



DESAFÍO

Sube y baja, baja y sube...

Una carretera entre dos pueblos solo tiene tramos de subida y de bajada.

Un tractor que va por esta carretera circula a una velocidad de 15 km/h en las subidas y a 30 km/h en las bajadas.

Si el tractor tarda 4 horas en ir y volver de un pueblo a otro, ¿a qué distancia están los dos pueblos?

• ¿Qué sabes ya?

Cuál es la relación entre dos fracciones equivalentes

Dos fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son equivalentes, y se escribe $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, cuando se cumple que $a \cdot d = b \cdot c$.

EJEMPLO

$\frac{6}{8}$ y $\frac{9}{12}$ son equivalentes porque $6 \cdot 12 = 8 \cdot 9$.

$\frac{4}{10}$ y $\frac{11}{25}$ no son equivalentes porque $4 \cdot 25 \neq 10 \cdot 11$.

Cómo se expresa un número decimal exacto mediante una fracción

Para expresar un número decimal como una fracción:

- Ponemos el número decimal sin la coma en el numerador.
- Escribimos en el denominador la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tenga el número.
- Simplificamos la fracción resultante.

EJEMPLO

$$2,8 = \frac{28}{10} \xrightarrow{\text{Simplificamos}} \frac{14}{5}$$

1 cifra decimal

$$2,06 = \frac{206}{100} \xrightarrow{\text{Simplificamos}} \frac{103}{50}$$

2 cifras decimales

ACTIVIDADES

1 Decide cuál de estas parejas de fracciones no son equivalentes.

- a) $\frac{4}{6}$ y $\frac{14}{21}$ c) $\frac{8}{10}$ y $\frac{12}{15}$ e) $\frac{10}{14}$ y $\frac{15}{21}$
 b) $\frac{12}{5}$ y $\frac{60}{25}$ d) $\frac{28}{4}$ y $\frac{32}{5}$ f) $\frac{13}{27}$ y $\frac{39}{81}$

ACTIVIDADES

2 ¿Cuál de las siguientes fracciones representa el número decimal 0,5625?

- a) $\frac{5}{4}$ b) $\frac{7}{5}$ c) $\frac{14}{25}$ d) $\frac{9}{16}$

1. Razón y proporción

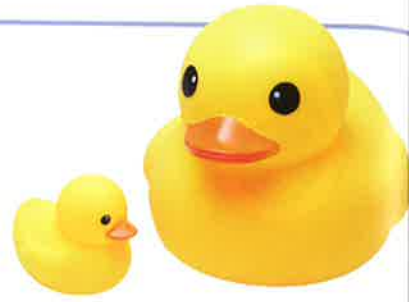
1.1. Razón

Una **razón** entre dos números, a y b , es el cociente $\frac{a}{b}$.
El número a se llama **antecedente**, y el b , **consecuente**.

EJEMPLO

1. Ya hemos estudiado 5 temas de los 12 que tiene el libro. ¿Qué relación numérica existe entre los temas ya estudiados y los que hay en el libro?

La relación numérica 5 de 12 se expresa mediante la razón $\frac{5}{12}$.



En una fracción $\frac{a}{b}$, los números a y b son enteros.

En una razón no es necesario.

$\frac{13}{2}$ → Es una razón y una fracción.

$\frac{3,5}{2}$ → Es una razón, pero no es una fracción.

1.2. Proporción

Una **proporción** es una igualdad entre dos razones.

Cuando la razón entre a y b , $\frac{a}{b}$, y la razón entre c y d , $\frac{c}{d}$, son iguales, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, decimos que a , b , c y d forman una proporción.

En esta proporción, a y d se llaman **extremos**, y b y c , **medios**.

Podemos comprobar que dos razones forman una proporción si el producto de los extremos es igual al producto de los medios.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \rightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

EJEMPLO

2. Decide si las siguientes razones forman una proporción.

a) $\frac{1}{1,2}$ y $\frac{2,5}{3}$ → $1 \cdot 3 = 1,2 \cdot 2,5 = 3$ → El producto de extremos es igual al producto de medios. Es una proporción.

b) $\frac{1,5}{2}$ y $\frac{0,9}{1,3}$ → $1,5 \cdot 1,3 \neq 2 \cdot 0,9$ → El producto de extremos no es igual al producto de medios. No es una proporción.

ACTIVIDADES

1. Decide si las razones forman una proporción.

a) $\frac{2}{5}$ y $\frac{0,8}{2}$ b) $\frac{1,5}{5}$ y $\frac{0,6}{3}$

2. Identifica los enunciados con una razón.

- a) En una clase hay 14 chicas y 12 chicos.
b) He caminado 2 km en 15 minutos.

3. **REFLEXIONA.** Indica posibles valores para que estos pares de razones formen una proporción. Después, inventa enunciados para ellas.

a) $\frac{x}{3}$ y $\frac{4}{y}$

c) $\frac{x}{6}$ y $\frac{0,1}{y}$

b) $\frac{5}{x}$ e $\frac{y}{2}$

d) $\frac{0,4}{x}$ e $\frac{y}{0,5}$

Cómo se calcula el término desconocido en una proporción

Halla el término que falta para que las siguientes razones formen una proporción.

$$\text{a) } \frac{4,5}{6} \text{ y } \frac{x}{1,4}$$

$$\text{b) } \frac{2,1}{18} \text{ y } \frac{3,5}{x}$$

- ① Formamos la proporción.

$$\frac{4,5}{6} = \frac{x}{1,4}$$

$$\frac{2,1}{18} = \frac{3,5}{x}$$

- ② Hacemos que el producto de los extremos sea igual al producto de los medios.

$$4,5 \cdot 1,4 = 6 \cdot x$$

$$2,1 \cdot x = 18 \cdot 3,5$$

$$x = \frac{4,5 \cdot 1,4}{6} = 1,05$$

$$x = \frac{18 \cdot 3,5}{2,1} = 30$$

Pasamos el número que está multiplicando a x al otro miembro dividiendo.

Para calcular un extremo se multiplican los medios y se divide entre el otro extremo.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x} \rightarrow x = \frac{b \cdot c}{a}$$

Para calcular un medio se multiplican los extremos y se divide entre el otro medio.

$$\frac{a}{b} = \frac{x}{d} \rightarrow x = \frac{a \cdot d}{b}$$

- ③ Despejamos la incógnita y resolvemos la igualdad.

ACTIVIDADES

- 4 Encuentra el término que falta para que estas razones formen una proporción.

$$\text{a) } \frac{6}{10} \text{ y } \frac{x}{5}$$

$$\text{d) } \frac{x}{6} \text{ y } \frac{12}{5}$$

$$\text{b) } \frac{4}{x} \text{ y } \frac{8}{12}$$

$$\text{e) } \frac{25}{10} \text{ y } \frac{15}{x}$$

$$\text{c) } \frac{x}{2} \text{ y } \frac{7}{5}$$

$$\text{f) } \frac{3}{2} \text{ y } \frac{x}{8}$$

- 5 Obtén x para que las razones formen una proporción.

$$\text{a) } \frac{x}{6,2} \text{ y } \frac{5}{31}$$

$$\text{d) } \frac{0,25}{x} \text{ y } \frac{1,5}{12}$$

$$\text{b) } \frac{7,41}{26} \text{ y } \frac{57}{x}$$

$$\text{e) } \frac{9,1}{21} \text{ y } \frac{x}{24}$$

$$\text{c) } \frac{15}{38} \text{ y } \frac{x}{2,66}$$

$$\text{f) } \frac{2,2}{x} \text{ y } \frac{1,65}{45}$$

- 6 Utilizando los divisores de 12, encuentra dos razones que formen una proporción. Compárala con las del resto de la clase. ¿Cuántas proporciones diferentes habéis encontrado?

- 7 Calcula el valor de x para que los grupos de números formen una proporción.

$$\text{a) } 1, 2, 3, x$$

$$\text{c) } 1, 6, x, 18$$

$$\text{e) } 2, 9, 5, x$$

$$\text{b) } x, 3, 5, 15$$

$$\text{d) } x, 9, 5, 3$$

$$\text{f) } 5, 4, x, 7$$

- 8 Copia y completa en tu cuaderno.

$$\text{a) } \frac{4}{6} = \frac{\square}{9} = \frac{\square}{15}$$

$$\text{c) } \frac{0,4}{1,4} = \frac{\square}{28} = \frac{6}{\square}$$

$$\text{b) } \frac{\square}{2,5} = \frac{10}{\square} = \frac{20}{10}$$

$$\text{d) } \frac{3,5}{\square} = \frac{2,1}{0,6} = \frac{7}{\square}$$

- 9 Copia y completa para que se cumplan las igualdades.

$$\text{a) } \frac{15}{\square} = \frac{5}{12} = \frac{35}{\square} = \frac{\square}{3,6} = \frac{\square}{2,4}$$

$$\text{b) } \frac{0,2}{\square} = \frac{\square}{15} = \frac{2,8}{\square} = \frac{6}{9} = \frac{\square}{0,33}$$

$$\text{c) } \frac{1,25}{\square} = \frac{2}{\square} = \frac{5}{7} = \frac{\square}{1,19} = \frac{\square}{16,8}$$

- 10 Ricardo es profesor en una academia. Por cada cinco estudiantes cobra 105 €.

a) ¿Cuántos estudiantes tiene este mes si ha cobrado 798 €?

b) ¿Cuánto cobraría si tuviera 17 estudiantes?



2. Magnitudes directamente proporcionales



Dos magnitudes son directamente proporcionales si, al multiplicar (o dividir) una de ellas por un número, la otra queda multiplicada (o dividida) por el mismo número.

EJEMPLO

3. Una entrada de cine cuesta 8 €. Determina si la relación entre el número de entradas y su coste es directamente proporcional.

Si una entrada cuesta 8 €, dos entradas costarán el doble, tres entradas costarán el triple...

Si diez entradas cuestan 80 €, la mitad de entradas costarán la mitad, la quinta parte de entradas costarán un quinto...

Así, el número de entradas y su coste son magnitudes directamente proporcionales.

Podemos construir una tabla para relacionar magnitudes proporcionales.

Magnitud A	a_1	a_2	a_3	...	a_n
Magnitud B	b_1	b_2	b_3	...	b_n

La constante de proporcionalidad es el valor del cociente de cualquiera de las razones de dos cantidades proporcionales correspondientes.

Para obtener la constante de proporcionalidad, formamos las razones.

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \dots = \frac{a_n}{b_n} = k$$

RETO

Si una gallina pone 2 huevos al día, ¿cuánto tardarán 3 gallinas, al mismo ritmo, en poner una docena de huevos?

EJEMPLO

4. Realiza una tabla con los valores del número de entradas y su coste y calcula la constante de proporcionalidad.

N.º de entradas	1	2	3	4	5
Coste (€)	8	16	24	32	40

Por ser magnitudes directamente proporcionales, se cumple:

$$\frac{1}{8} = \frac{2}{16} = \frac{3}{24} = \frac{4}{32} = \frac{5}{40} = 0,125$$

Así, la constante de proporcionalidad es 0,125.

ACTIVIDADES

1. Copia y completa la tabla. Añade dos valores más a la magnitud *n.º de refrescos* y calcula su precio.

N.º de refrescos	1	2	3	4	5	6
Precio (€)		3				

Después, halla la constante de proporcionalidad.

2. Inventa dos magnitudes que sean directamente proporcionales y realiza una tabla con ellas.

3. REFLEXIONA. El área de un cuadrado se relaciona con su lado. ¿Lo hace de forma directamente proporcional? En caso afirmativo, indica la constante de proporcionalidad y en caso contrario explica por qué.



Cómo se averigua si dos magnitudes son directamente proporcionales

Decide si estas magnitudes son directamente proporcionales.

- El lado de un cuadrado y su perímetro.
- El número de personas y la cantidad de dinero que les corresponde al repartir 24 €.

① Construimos una tabla donde mostramos la relación entre valores de las dos magnitudes.

a)

Lado (cm)	1	2	3	4
Perímetro (cm)	4	8	12	16

b)

N.º de personas	1	2	3	4
Dinero (€)	24	12	8	6

② Calculamos el cociente de datos correspondientes.

$$\frac{1}{4} = \frac{2}{8} = \frac{3}{12} = \frac{4}{16} = 0,25$$

Los cocientes son iguales.

③ Si los cocientes son iguales, las magnitudes son directamente proporcionales.

Si no son iguales, las magnitudes no son directamente proporcionales.

Las magnitudes *lado de un cuadrado* y *perímetro* son directamente proporcionales.

$$\frac{1}{24} = 0,041\bar{6}$$

$$\frac{2}{12} = 0,1\bar{6}$$

$$\frac{3}{8} = 0,375$$

$$\frac{4}{6} = 0,6\bar{6}$$

Los cocientes no son iguales.

Las magnitudes *número de personas* y *cantidad de dinero* que les corresponde no son directamente proporcionales.

ACTIVIDADES

- 14 Explica si estas magnitudes son directamente proporcionales.
- El número de horas estudiadas y la nota obtenida en un examen.
 - El lado de un pentágono regular y su perímetro.
 - La estatura de una persona y su edad.
 - El tiempo que un vehículo está en marcha con velocidad constante y la distancia recorrida.
 - El número de horas y el número de minutos que transcurren.

15 Decide si estas tablas corresponden a magnitudes directamente proporcionales.

a)

A	10	25	35
B	30	50	70

b)

A	8	50	3
B	14	87,5	5,25

16 Copia y completa las tablas, sabiendo que las magnitudes *A* y *B* son directamente proporcionales, y calcula la constante de proporcionalidad.

a)

A	1	<i>x</i>	1,5	<i>z</i>	2,75
B	3,2	16	<i>y</i>	5,6	<i>t</i>

b)

A	<i>x</i>	2,8	7	<i>z</i>	8,4
B	3	<i>y</i>	5	1,3	<i>t</i>

17 Copia y completa la tabla para que las magnitudes sean directamente proporcionales con la constante de proporcionalidad dada en cada caso.

A	<i>x</i>	8	<i>z</i>	0,5
B	6	<i>y</i>	1,2	<i>t</i>

- La constante de proporcionalidad es 1,6.
- La constante de proporcionalidad es 0,4.
- La constante de proporcionalidad es 2,5.

Los cocientes deben ser siempre iguales. Si alguno no es igual, entonces las magnitudes no son directamente proporcionales.

3. Problemas de proporcionalidad directa

Si dos magnitudes son directamente proporcionales y conocemos dos valores relacionados, podemos calcular cualquier otro valor.



Fíjate en cómo se puede averiguar la incógnita.

Magnitud A	a_1	a_2	y	...
Magnitud B	b_1	x	b_3	...

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{x} \rightarrow a_1 \cdot x = a_2 \cdot b_1 \rightarrow x = \frac{a_2 \cdot b_1}{a_1}$$

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{y}{b_3} \rightarrow a_1 \cdot b_3 = y \cdot b_1 \rightarrow y = \frac{a_1 \cdot b_3}{b_1}$$

EJEMPLO

5. Raúl cocina lasaña. En una receta para 6 comensales, se indica que necesita 540 g de carne picada.
- ¿Cuántos gramos de carne picada necesita para hacer una lasaña para 9 comensales?
 - Si en total tiene 1170 g de carne picada, ¿a cuánta gente puede invitar a comer?

Las magnitudes *gramos de carne* y *número de comensales* son directamente proporcionales, porque para el doble de comensales hay que hacer el doble de lasaña para que todos puedan comer.

- a) Siendo x la carne necesaria para 9 comensales, podemos construir esta tabla:

Carne (g)	540	x
Comensales	6	9

Como son magnitudes directamente proporcionales, se cumple:

$$\begin{array}{l} \text{Gramos de carne} \rightarrow \frac{540}{6} = \frac{x}{9} \\ \text{Comensales} \quad \rightarrow \end{array} \rightarrow x = \frac{9 \cdot 540}{6} = 810$$

Para 9 comensales se necesitan 810 g.

- b) Siendo x el número de comensales a los que podemos invitar con 1170 g de carne, construimos esta tabla:

Carne (g)	540	1170
Comensales	6	x

Como son magnitudes directamente proporcionales, se cumple:

$$\begin{array}{l} \text{Gramos de carne} \rightarrow \frac{540}{6} = \frac{1170}{x} \\ \text{Comensales} \quad \rightarrow \end{array} \rightarrow x = \frac{1170 \cdot 6}{540} = 13$$

Con 1170 g puede invitar a comer a 13 personas.

Regla de tres simple directa

Con la **regla de tres simple directa** podemos hallar una cantidad desconocida que está en proporción directa con otras tres cantidades conocidas.

ACTIVIDADES

- 18 Estos son algunos de los ingredientes de una receta de paella para 5 personas.
- | | |
|-----------------|-----------------|
| 500 g de arroz | 600 g de pollo |
| 400 g de conejo | 350 g de judías |
- Calcula las cantidades de cada ingrediente que serían necesarias para 7 personas.
 - Si hacemos la receta utilizando 2 kg de arroz, ¿cuánta gente podrá comer?

- 19 **REFLEXIONA.** En una tienda, todos los artículos de higiene personal tienen la misma rebaja. Si un bote de champú costaba 2,50 € y ahora cuesta 2 €, ¿cuánto cuesta un bote de gel si antes de la rebaja costaba 1,80 €?





Cómo se resuelven problemas de proporcionalidad directa mediante una regla de tres

Lucía trabaja por objetivos. Por cada 100 € de venta, ella cobra 26 €.

- a) ¿Cuánto dinero obtiene si ha conseguido ventas por valor de 1250 €?
 b) Si quiere que su sueldo a final de mes sea más de 1040 €, ¿cuánto tiene que vender?

- ① **Identificamos las magnitudes y comprobamos si son directamente proporcionales.**

Magnitudes: dinero de venta y dinero que cobra.

Si sus ventas fueran el doble, ella cobraría el doble; si sus ventas fueran el triple, ella cobraría el triple...

De la misma manera, si sus ventas fueran la mitad, ella cobraría la mitad...

Las magnitudes son directamente proporcionales.

- ② **Planteamos la regla de tres con los datos extraídos del problema.**

a) <u>Dinero de venta</u>	<u>Dinero que cobra</u>
100 €	26 €
1250 €	x €

b) <u>Dinero de venta</u>	<u>Dinero que cobra</u>
100 €	26 €
x €	1040 €

- ③ **Resolvemos la regla de tres formando la proporción y despejando la incógnita.**

$$\frac{100}{1250} = \frac{26}{x}$$

$$100 \cdot x = 1250 \cdot 26$$

$$x = \frac{1250 \cdot 26}{100} = 325$$

$$\frac{100}{x} = \frac{26}{1040}$$

$$100 \cdot 1040 = x \cdot 26$$

$$x = \frac{100 \cdot 1040}{26} = 4000$$

- ④ **Interpretamos la solución.**

Si vende 1250 €, obtiene 325 €.

Para cobrar más de 1040 €, tiene que vender más de 4000 €.

En general:

$$\left. \begin{array}{l} a \longrightarrow b \\ c \longrightarrow x \end{array} \right\} \rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{x} \rightarrow x = \frac{c \cdot b}{a}$$

$$\left. \begin{array}{l} a \longrightarrow b \\ x \longrightarrow d \end{array} \right\} \rightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{d} \rightarrow x = \frac{a \cdot d}{b}$$

ACTIVIDADES

- 20 Cada dos meses pagamos 48 € por el recibo del gas.

- a) ¿Cuánto habremos pagado al cabo de un año?
 b) Si hemos pagado 1440 € por el gas desde que contratamos esta compañía, ¿cuánto tiempo ha pasado desde la contratación?

- 21 El último día de curso fuimos al parque de atracciones. Entre todos los estudiantes de la clase de 1.º A pagamos 450 € por 25 entradas.

- a) ¿Cuánto pagó la clase de 1.º B si fueron 24 personas?
 b) En la clase de 1.º C pagaron 378 €. ¿Cuántas personas fueron de esa clase?

- 22 Un coche circula a una velocidad constante de 70 km/h, y gasta 9 litros de gasolina cada 100 km recorridos.

- a) ¿Cuántos kilómetros ha recorrido en 2,5 h?
 b) ¿Cuánto tiempo ha tardado en recorrer 105 km?
 ¿Y cuánta gasolina ha gastado?

- 23 El reloj de Paco se adelanta 2 minutos cada semana.

- a) ¿Cuánto se adelanta en 5 semanas?
 b) Si lleva 18 minutos de adelanto, ¿hace cuántas semanas que se puso en la hora correcta?



4. Repartos directamente proporcionales

Para repartir una cantidad, N , en partes directamente proporcionales a a , b y c , se multiplica cada número a , b y c por la constante de proporcionalidad, $\frac{N}{a + b + c}$.



EJEMPLO

6. Alejandra, Lorena y Valentina trabajan en una obra remodelando las calles de una localidad. Esta semana Alejandra trabajó 35 horas, Lorena 25 horas y Valentina 40 horas. Si en total por el trabajo que han realizado esta semana les pagan 2500 €, ¿cuánto le corresponderá a cada una?

El número total de horas que han trabajado es $25 + 35 + 40 = 100$.

En total les pagan 2500 €. Como han trabajado 100 horas en total:

$$2500 : 100 = 25 \rightarrow \text{La empresa va a pagar cada hora trabajada a 25 €.}$$



Alejandra ha trabajado 35 horas:

$$35 \cdot 25 = 875$$

Lorena ha trabajado 25 horas:

$$25 \cdot 25 = 625$$

Valentina ha trabajado 40 horas:

$$40 \cdot 25 = 1000$$

A Alejandra le corresponden 875 €, a Lorena 625 € y a Valentina 1000 €.

ACTIVIDADES

- 24 Reparte 3000 € en cantidades directamente proporcionales a los siguientes números.
- a) 1, 2 c) 1, 2, 3 y 4
b) 1, 2 y 3 d) 1, 2, 3, 4 y 5
- 25 En Navidad, Lucas reparte 104 € entre Andrés y Marta, en partes directamente proporcionales a sus edades, que son 12 y 14 años, respectivamente. ¿Cuánto dinero le corresponde a cada uno?
- 26 Cintia reparte 99 € entre sus tres nietas en partes directamente proporcionales a 1, 2 y 3. ¿Cuánto le dará a cada una?
- 27 Disponemos de 1065 cm de tela para confeccionar las cortinas de 3 ventanas. La cantidad de tela necesaria es proporcional al ancho de la ventana. Si las ventanas tienen un ancho de 130, 120 y 105 cm, ¿cuántos metros de tela se utilizarán para cada ventana?
- 28 En el prospecto de un medicamento se indica que la dosis debe ser proporcional al peso. Si Eva, Fran y Lola pesan 55, 71 y 68 kg respectivamente y toman 388 mg en total, ¿qué cantidad ha ingerido cada uno?
- 29 **REFLEXIONA.** Rosa, Javier y Pedro trabajan en un restaurante. Al final de mes se reparten las propinas en función de las valoraciones positivas que les ha dado la clientela. Este mes, Rosa recibió 47 valoraciones positivas, Javier 32 y Pedro 41. Si a Rosa le correspondieron 705 €, ¿a cuánto ascendieron las propinas este mes? ¿Cuánto le dieron a Javier y a Pedro?





Cómo se realizan repartos directamente proporcionales

Un agricultor quiere regar con 300 m^3 de agua tres parcelas de forma directamente proporcional a sus superficies, que son 2, 3 y 5 hectáreas, respectivamente.

¿Cuántos metros cúbicos destinará al riego de cada parcela?

- ① **Calculamos la constante de proporcionalidad.**

La constante de proporcionalidad directa es:

$$k = \frac{N}{a + b + c} = \frac{300}{2 + 3 + 5} = \frac{300}{10} = 30$$

Nos indica que a cada hectárea le corresponden 30 m^3 de agua.

- ② **Hallamos lo que corresponde a cada parte, multiplicando la constante de proporcionalidad por cada una de las partes.**

A la parcela de 2 hectáreas le corresponde:

$$30 \cdot 2 = 60$$

A la parcela de 3 hectáreas le corresponde:

$$30 \cdot 3 = 90$$

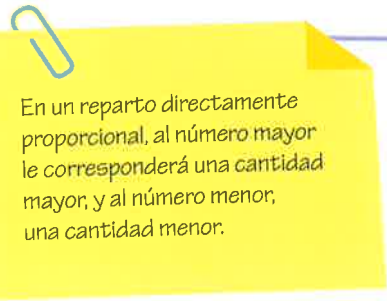
A la parcela de 5 hectáreas le corresponde:

$$30 \cdot 5 = 150$$

- ③ **Interpretamos la solución.**

Destinará 60 m^3 de agua a la parcela de 2 hectáreas, 90 m^3 a la de 3 hectáreas y 150 m^3 a la de 5 hectáreas.

Puedes comprobar que se ha repartido toda el agua:
 $60 + 90 + 150 = 300 \text{ m}^3$



En un reparto directamente proporcional, al número mayor le corresponderá una cantidad mayor, y al número menor, una cantidad menor.

ACTIVIDADES

- 30 Reparte 1200 de forma directamente proporcional a los siguientes números.

- a) 2 y 3
b) 5 y 10
c) 2, 3 y 5
d) 3, 4 y 5
e) 5, 7 y 8
f) 3, 10 y 11
g) 19, 20 y 21
h) 13, 45 y 62

- 31 Reparte 600 de forma directamente proporcional a estos números.

- a) $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$
b) $\frac{2}{5}$ y $\frac{2}{3}$
c) $\frac{1}{2}$ y $\frac{4}{7}$
d) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{3}$
e) $\frac{3}{5}$, $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{5}$
f) $\frac{3}{14}$, $\frac{2}{7}$ y $\frac{1}{3}$

- 32 Tres compañeros de clase, Julieta, Antonio y Guillermo, se van a repartir 66 cromos de animales en partes directamente proporcionales a su nota en el examen de Matemáticas. Julieta sacó un 9, Antonio obtuvo un 8 y Guillermo un 5. ¿Cuántos cromos le corresponden a cada uno?

- 33 Tres personas quieren repartirse un terreno de 1470 m^2 de forma directamente proporcional al tiempo que han empleado en cuidarlo. La primera trabajó 320 horas, la segunda 240 horas y la tercera 140 horas. ¿Cuántos metros cuadrados le corresponden a cada una?

- 34 Rebeca quiere reformar su casa y, para ello, contrata a 3 trabajadores. Cada uno de ellos va a trabajar un número diferente de horas, y lo harán de forma directamente proporcional a los números 3, 4 y 5. Sabiendo que la reforma de toda la casa estará acabada en 420 horas, ¿cuántas horas va a trabajar cada uno? Si en total Rebeca les pagará 9240 €, ¿cuánto dinero cobrará cada trabajador?

- 35 Para una campaña de recogida de pilas usadas, Violeta lleva 70 pilas, Marta 110 y Jaime 120. A cambio de las pilas reciben 60 bolígrafos. ¿Cómo se los repartirán de manera directamente proporcional a las pilas que han llevado?



5. Porcentajes

El tanto por ciento o porcentaje, cuyo símbolo es %, es una razón entre un número, a , y 100.



Un porcentaje se puede expresar como fracción o como número decimal.

$$15\% = \frac{15}{100} = 0,15$$

El $a\%$ es una razón, $\frac{a}{100}$, donde a es el antecedente y 100 es el consecuente.



EJEMPLO

7. Explica qué significa esta oración y escribe los datos que proporciona en forma de porcentaje, fracción y número decimal.

«En las últimas elecciones, la participación alcanzó el 76%».

La oración indica que, de cada 100 personas con derecho al voto, 76 fueron a votar.

Puede escribirse así: $76\% = \frac{76}{100} = 0,76$.

Cálculo de porcentajes

Para calcular el tanto por ciento de una cantidad, multiplicamos esa cantidad por el antecedente del tanto por ciento y lo dividimos entre 100.

$$a\% \text{ de } C = \frac{a \cdot C}{100}$$



USA LA CALCULADORA

Para hallar un tanto por ciento:

45% de 860

860 45

EJEMPLO

8. Calcula.

a) $24\% \text{ de } 600 = \frac{24 \cdot 600}{100} = \frac{14\,400}{100} = 144$

b) $65\% \text{ de } 520 = \frac{65 \cdot 520}{100} = \frac{33\,800}{100} = 338$

EJEMPLO

9. El 15% de las 120 personas que trabajan en una empresa tienen más de 60 años. ¿Cuántas son?

$$15\% \text{ de } 120 = \frac{15 \cdot 120}{100} = 18$$

Hay 18 personas mayores de 60 años.

ACTIVIDADES

36. Calcula el tanto por ciento indicado de cada una de estas cantidades.

- a) 6% de 100 b) 34% de 150 c) 72% de 550

37. Escribe en forma de porcentaje.

- a) 7 de cada 10. c) 18 de cada 45.
b) 12 de cada 40. d) 57 de cada 76.

38. REFLEXIONA. Decide, sin hacer ningún cálculo, si las siguientes oraciones son ciertas, y explica qué razonamiento has seguido para llegar a tu conclusión.

- a) El 17% de 63 es lo mismo que el 63% de 17.
b) El 15% de 20 es lo mismo que el 5% de 60.
c) El 32% de 200 es lo mismo que el 16% de 100.

6. Problemas con porcentajes

6

Cuando calculamos el tanto por ciento de una cantidad, $a\%$ de $C = P$, aparecen siempre tres cantidades relacionadas:

$a \rightarrow$ porcentaje $C \rightarrow$ cantidad total $P \rightarrow$ parte

Entre estas cantidades se puede establecer la proporción $\frac{C}{100} = \frac{P}{a}$.

6.1. Calcular la parte, conocidos el porcentaje y el total



Dados el porcentaje, a , y la cantidad total, C , para calcular la parte, P :

$$\frac{C}{100} = \frac{P}{a} \rightarrow P = \frac{C \cdot a}{100}$$

Observa que calcular la parte conociendo el porcentaje y el total es lo mismo que calcular el tanto por ciento de una cantidad.

EJEMPLO

10. Esta es la información nutricional de un yogur. Reescribe la información en tanto por ciento y calcula la cantidad de proteínas, grasa y azúcares del yogur.

El yogur pesa 120 g $\rightarrow C = 120$

Proteínas: 2,5 %

$$\frac{C}{100} = \frac{P}{a} \rightarrow \frac{120}{100} = \frac{P}{2,5} \rightarrow P = \frac{2,5 \cdot 120}{100} = 3 \text{ g}$$

Grasa: 3 %

$$\frac{C}{100} = \frac{P}{a} \rightarrow \frac{120}{100} = \frac{P}{3} \rightarrow P = \frac{3 \cdot 120}{100} = 3,6 \text{ g}$$

Azúcares: 11,5 %

$$\frac{C}{100} = \frac{P}{a} \rightarrow \frac{120}{100} = \frac{P}{11,5} \rightarrow P = \frac{11,5 \cdot 120}{100} = 13,8 \text{ g}$$

El yogur contiene 3 g de proteínas, 3,6 g de grasa y 13,8 g de azúcares.

Porción: 1 vaso de 120 g.

Cada 100 g:

Proteínas (g) 2,5

Grasa (g) 3

Azúcares (g) 11,5

ACTIVIDADES

- 39 El 8% de los habitantes de un pueblo son veganos. Si hay 7 625 personas en el pueblo, contesta.
- ¿Qué porcentaje no son veganos?
 - ¿Cuántos habitantes son veganos?
- 40 El 64% de los estudiantes de un centro escolar llegan al centro andando, el 12% llegan en coche y el resto van en transporte público.
- ¿Qué porcentaje va en transporte público?
 - Si el centro tiene 325 estudiantes, ¿cuántos llegan en cada medio de transporte?
- 41 A la fiesta de graduación han asistido el 44% de los estudiantes. Si este año se han graduado 175 personas, ¿cuántas han asistido?
- 42 **REFLEXIONA.** El 47% de los 1 500 habitantes de una localidad son mayores de edad y el 38% tienen menos de 10 años. ¿Cuántos habitantes tienen entre 10 y 18 años?



6.2. Calcular el porcentaje, conocidos el total y la parte

Dadas la cantidad total, C , y la parte, P , para calcular el porcentaje, a :

$$\frac{C}{100} = \frac{P}{a} \rightarrow a = \frac{P \cdot 100}{C}$$

RETO

El precio de una lavadora se disminuye un 10%. Un mes después se aumenta un 10%. ¿Tiene el mismo precio que al principio?

EJEMPLO

11. De los 24 estudiantes que hay en clase, 6 tocan algún instrumento.

- ¿Qué porcentaje de la clase toca algún instrumento?
- ¿Cuántos estudiantes no tocan ningún instrumento? ¿Qué porcentaje representan?

$$a) \frac{C}{100} = \frac{P}{a} \rightarrow \frac{24}{100} = \frac{6}{a} \rightarrow a = \frac{6 \cdot 100}{24} = 25$$

El 25% de los estudiantes tocan algún instrumento.

- $24 - 6 = 18 \rightarrow$ Hay 18 estudiantes que no tocan ningún instrumento.
 $100 - 25 = 75 \rightarrow$ El 75% no tocan ningún instrumento.



6.3. Calcular el total, conocidos el porcentaje y la parte

Dados el tanto por ciento, a , y la parte, P , para calcular el total, C :

$$\frac{C}{100} = \frac{P}{a} \rightarrow C = \frac{P \cdot 100}{a}$$

EJEMPLO

12. El 12,5% de los habitantes de una ciudad tienen una bicicleta. Si en total 15 625 personas tienen bicicleta, ¿cuántos habitantes hay en la ciudad?

$$\frac{C}{100} = \frac{P}{a} \rightarrow \frac{C}{100} = \frac{15\,625}{12,5} \rightarrow \\ \rightarrow C = \frac{15\,625 \cdot 100}{12,5} = 125\,000$$

Hay 125 000 habitantes en la ciudad.

EJEMPLO

13. Una jugadora de baloncesto tiene un porcentaje de acierto en triples del 35%. Si este mes ha fallado 13 triples, ¿cuántos ha lanzado?

$$100\% - 35\% = 65\% \rightarrow \text{Ha fallado el } 65\% \text{ de los tiros.}$$

$$\frac{C}{100} = \frac{P}{a} \rightarrow \frac{C}{100} = \frac{13}{65} \rightarrow C = \frac{13 \cdot 100}{65} = 20$$

Ha lanzado 20 triples.

ACTIVIDADES

- 43 Vivo en un bloque con el mismo número de pisos en cada planta. Por encima de mí, vive el 62,5% del vecindario y, por debajo, el 25%. Si en mi planta somos 16 personas, ¿cuántas personas somos en total? ¿Cuántas viven por encima de mí?

- 44 **REFLEXIONA.** Si a es el 10% de una cantidad, razona si las siguientes afirmaciones son ciertas.
- $2a$ es el 10% del doble de esa cantidad.
 - $2a$ es el 20% de esa cantidad.
 - La cantidad es $10a$.

Cómo se resuelven problemas de porcentajes mediante una regla de tres

Un centro escolar tiene 300 estudiantes en Secundaria. Lee y contesta.

- El 40 % están en el primer ciclo.
¿Cuántos estudiantes son?
- Hay 105 estudiantes en el segundo ciclo de Secundaria.
¿Qué porcentaje representan?
- El año pasado había 140 estudiantes en 1.º de ESO, y representaban el 35 %.
¿Cuántos estudiantes había en el centro el año pasado?

① Planteamos la regla de tres con los datos extraídos del problema.

$$\begin{array}{l} \text{a) } \frac{\text{Total}}{\text{Parte}} \\ \text{De } 100 \longrightarrow 40 \\ \text{De } 300 \longrightarrow x \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{b) } \frac{\text{Total}}{\text{Parte}} \\ \text{De } 100 \longrightarrow x \\ \text{De } 300 \longrightarrow 105 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{c) } \frac{\text{Total}}{\text{Parte}} \\ \text{De } 100 \longrightarrow 35 \\ \text{De } x \longrightarrow 140 \end{array}$$

② Resolvemos la regla de tres formando la proporción y despejando la incógnita.

$$\begin{aligned} \frac{100}{300} &= \frac{40}{x} \\ x &= \frac{40 \cdot 300}{100} = 120 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{100}{300} &= \frac{x}{105} \\ x &= \frac{105 \cdot 100}{300} = 35 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{100}{x} &= \frac{35}{140} \\ x &= \frac{140 \cdot 100}{35} = 400 \end{aligned}$$

③ Interpretamos la solución.

Son de primer ciclo 120 estudiantes.

El 35% de los estudiantes son de segundo ciclo.

El año pasado había 400 estudiantes en el centro.

En la regla de tres, la columna de los totales siempre son 100 y la cantidad total.

En la regla de tres, la columna de las partes son el porcentaje y el resultado de aplicar el porcentaje a la cantidad total ($a\%$ de $C = P$).

La regla de tres que se plantea es:

$$\left. \begin{array}{l} 100 \longrightarrow a \\ C \longrightarrow P \end{array} \right\}$$

ACTIVIDADES

45 Para realizar una encuesta sobre el turismo en verano, se ha entrevistado a 500 personas. Se ha preguntado el mes en el que disfrutaron sus vacaciones y el lugar al que van. Los resultados obtenidos han sido los siguientes:

- Agosto: 290 personas.
Julio: 100 personas.
Septiembre: 85 personas.
 - Veranea en España: 83 %.
 - Playa: 350 personas; ciudades: 80 personas.
- ¿Qué porcentaje representa cada mes?
 - ¿Qué porcentaje de personas disfrutaron vacaciones en otros meses?
 - ¿Cuánta gente veranea en el extranjero?
 - ¿Qué porcentaje no veranea en playas ni visita ciudades?

46 Un 1,25% de las personas que cogen un avión tienen miedo a volar. En un avión con 480 pasajeros, ¿cuántas personas viajan pese a su miedo?

47 El 65% de los titulados universitarios encuentra trabajo en el primer año tras su titulación.

- Si 312 personas han encontrado trabajo en el primer año, ¿a cuántas personas se ha preguntado?
- Si 234 personas consiguen un trabajo relacionado con sus estudios, ¿qué porcentaje consigue un trabajo relacionado con sus estudios en el primer año?
- ¿Qué porcentaje de quienes encuentran trabajo el primer año trabajan en algo relacionado con su titulación?



7. Aumentos y disminuciones porcentuales



- **Aumentar** una cantidad un $t\%$ equivale a calcular el $(100 + t)\%$ de dicha cantidad.
- **Disminuir** una cantidad un $t\%$ equivale a calcular el $(100 - t)\%$ de dicha cantidad.

EJEMPLO

14. La paga mensual de Elena era de 50 €. Su familia se la ha aumentado un 10%.
¿Cuánto recibe ahora de paga?

$$110\% \text{ de } 50 = \frac{110 \cdot 50}{100} = 55 \text{ €}.$$

Esta operación equivale a calcular el aumento y sumárselo a la cantidad inicial.

Aumenta el 10% de 50:

$$10\% \text{ de } 50 = \frac{10}{100} \cdot 50 = 5$$

Calculamos cuánto recibe ahora de paga: $50 + 5 = 55$.

Ahora recibe 55 € de paga.



Para hacer un aumento del 10%, puedes multiplicar por 1,1:

$$1 + 10\% = 1 + 0,1 = 1,1$$

$$50 \cdot 1,1 = 55$$



Para hacer una disminución del 20%, puedes multiplicar por 0,8:

$$1 - 20\% = 1 - 0,2 = 0,8$$

$$650 \cdot 0,8 = 520$$

EJEMPLO

15. Una cámara de vídeo vale 650 €, pero el vendedor hace una rebaja del 20%. ¿Qué cantidad hay que pagar por la cámara?

$$80\% \text{ de } 650 = \frac{80 \cdot 650}{100} = 520$$

Esta operación equivale a calcular la disminución y restársela a la cantidad inicial.

Disminuye el 20% de 650:

$$20\% \text{ de } 650 = \frac{20}{100} \cdot 650 = 130$$

Calculamos cuánto hay que pagar ahora por la cámara:

$$650 - 130 = 520$$

Ahora hay que pagar 520 €.



ACTIVIDADES

- 48 Jaime ha comprado ropa por valor de 180 €. Al pagar le aplican un descuento del 15%. ¿Cuánto tendrá que pagar por la ropa?
- 49 Una ciudad de 135000 habitantes ha perdido durante los últimos años un 8% de su población. Calcula cuántos habitantes tiene actualmente.
- 50 **REFLEXIONA.** A Mercedes le han puesto una multa por exceso de velocidad. Al no pagarla durante el periodo voluntario, se la han enviado de nuevo con un 20% de recargo. El importe que tiene que pagar ahora asciende a 108 €. ¿Cuál era el importe de la multa antes de aplicarle el recargo?



Cómo se calculan aumentos y disminuciones porcentuales

Resolver un problema de aumentos y disminuciones porcentuales es equivalente a resolver un problema de proporcionalidad directa.

Resuelve estos problemas.

- Una tienda de telefonía decide aumentar sus precios un 3%. ¿Cuál será ahora el precio de un teléfono que valía 142 €?
- En unos grandes almacenes se han anunciado unas rebajas del 20%. ¿Cuál será ahora el precio de un abrigo que valía 116 €?

1 Pensamos si la cantidad final aumenta o disminuye y cómo lo hace.

- Como la tienda aumenta sus precios, la cantidad final aumenta. Los precios aumentan un 3%, es decir, lo que antes costaba 100 € ahora cuesta $100 + 3 = 103$ €.
- Como los grandes almacenes rebajan los precios, la cantidad final disminuye. Los precios disminuyen un 20%, es decir, lo que antes costaba 100 € ahora cuesta $100 - 20 = 80$ €.

2 Planteamos una regla de tres con los datos que tenemos.

Antes	Ahora	Aumento (100 + 3)
100 €	→ 103 €	←
142 €	→ x €	

Antes	Ahora	Disminución (100 - 20)
100 €	→ 80 €	←
116 €	→ x €	

3 Calculamos el término desconocido.

$$\frac{100}{142} = \frac{103}{x}$$

$$x = \frac{103 \cdot 142}{100} = 146,26$$

$$\frac{100}{116} = \frac{80}{x}$$

$$x = \frac{116 \cdot 80}{100} = 92,8$$

4 Interpretamos la solución.

Con la subida del 3%, el teléfono vale 146,26 €.

Con la rebaja del 20%, el abrigo vale 92,80 €.

ACTIVIDADES

- Aplica estos aumentos a 540.
 - 5%
 - 10%
 - 50%
 - 25%
 - 37%
 - 23%
 - 100%
 - 200%
- Disminuye 350 según los siguientes porcentajes.
 - 10%
 - 20%
 - 50%
 - 18%
 - 37%
 - 71%
- En una biblioteca ha disminuido un 35% el número de novelas que se sacan. En cambio, la demanda de cómics ha aumentado un 14%. Si se habían sacado 1200 novelas y 675 cómics, ¿cuántas novelas y cuántos cómics se han sacado ahora?
- Una empresa tenía 60 personas contratadas. En septiembre decidieron contratar más gente, de forma que la plantilla aumentó en un 25%.
 - ¿Cuántas personas contratadas hay ahora?
 - ¿A cuántas personas han contratado en septiembre?
- En la gasolinera de una localidad, el precio de la gasolina el domingo era de 1,40 € el litro. El lunes subió un 2%, el martes bajó un 5% y el miércoles volvió a subir un 4%.
 - ¿Cuánto costaba la gasolina cada día? Aproxima los resultados a los céntimos.
 - ¿En qué porcentaje varió el precio desde el domingo hasta el miércoles?



ACTIVIDADES FINALES

1. Identifica relaciones de proporcionalidad numérica directa

Razón y proporción

ACTIVIDADES FLASH

- 56 ●●○ Calcula mentalmente las razones entre estas cantidades e interpreta el resultado.
- Un coche recorre 300 km en 3 horas.
 - 3 kg de fruta se consumen en 2 días.
 - Un grifo vierte 15 l de agua cada 10 minutos.
 - 2 kg de pescado cuestan 10 €.
- 57 ●●○ Razona y di una proporción en cada caso.
- Los extremos son 3 y 4.
 - Los medios son 4 y 6.
 - Los antecedentes son 2 y 8.
 - Los consecuentes son 6 y 9.
- 58 ●●○ Halla el valor de x para que estas igualdades sean proporciones.
- $\frac{x}{25} = \frac{2}{5}$
 - $\frac{9}{x} = \frac{15}{5}$
 - $\frac{2}{3} = \frac{8}{x}$
 - $\frac{8}{64} = \frac{x}{8}$

- 59 ●●○ Expresa cada enunciado en forma de razón. Calcula otra razón con la que guarde proporción e interprétala.
- 2 de cada 5 € recaudados se gastarán en medicinas.
 - 1 de cada 3 personas sufre dolor a diario.
 - Como pescado 3 de cada 4 días.
 - De cada 10 ríos, 4 están contaminados.

- 60 ●●○ **JUEGO.** Extrae algunos datos de tu clase para expresarlos en forma de razón. Por ejemplo, el número de chicas con respecto al total, el número de chicos con los ojos azules con respecto al total, etc.

Después, tus compañeros deben adivinar qué magnitudes estás comparando en esas razones.

- 61 ●●○ En el jardín se van a plantar 3 rosales blancos por cada 5 rojos y 7 azuleas amarillas por cada azalea morada. Indica la razón entre los rosales blancos y los rojos, y entre las azuleas amarillas y las moradas. ¿Forman una proporción?



- 62 ●●○ En un puesto de una feria de artesanía, normalmente, se venden 4 pulseras por cada 7 anillos.



Este domingo han vendido 32 anillos y 18 pulseras. ¿Se ha mantenido la proporción con respecto a los días anteriores?

- 63 ●●○ Completa en tu cuaderno para que estas razones formen una proporción.

a) $\frac{5}{10} = \frac{\square}{2} = \frac{6}{\square} = \frac{7}{\square} = \frac{\square}{1} = \frac{\square}{0,1}$

b) $\frac{10}{4} = \frac{\square}{8} = \frac{12}{\square} = \frac{3}{\square} = \frac{\square}{1} = \frac{\square}{0,1}$

- 64 ●●○ Para elaborar un guiso de legumbres del que se obtienen 4 raciones, se emplean 280 g de lentejas. Escribe la proporción correspondiente a las siguientes cantidades y calcula cuántas raciones se obtienen en cada caso.

- a) 420 g b) 490 g c) 630 g d) 770 g

Magnitudes directamente proporcionales

ACTIVIDADES FLASH

- 65 ●●○ ¿Cuáles de las siguientes magnitudes son directamente proporcionales?
- El número de personas que van en el autobús y el precio del billete.
 - El número de vacas que posee una ganadera y la cantidad de pienso que gasta a la semana.
 - El número de páginas de un libro y su peso.
 - El número de páginas de un libro y su precio.
 - El número de hijos e hijas de una familia y el número de días que tienen de vacaciones.
 - El volumen de una caja y el número de cajas iguales que se pueden almacenar en una nave.
 - El número de litros de agua por minuto que salen de un grifo y el tiempo que tarda en llenarse una garrafa de 20 litros.
 - El tiempo que está encendida una bombilla y el gasto en electricidad.
 - La velocidad de un tren y el tiempo que tarda en recorrer el trayecto entre dos ciudades.
 - El precio de un coche y el número de asientos que tiene.
 - Las horas que tardo en recargar el teléfono y la batería del móvil que me queda.

- 66 Begoña, que tiene 16 años y mide 1,68 m, entrena todos los días corriendo 2 km.
- ¿Puedes saber cuántos kilómetros correrá en 3 días? ¿Y en una semana? ¿Cómo lo calculas?
 - ¿Son proporcionales el número de kilómetros corridos y el número de días?
 - ¿Puedes saber cuánto medirá cuando tenga 19 años? ¿Y cuando tenga 42?
 - ¿Son proporcionales la estatura y la edad?

67 Este es el precio de las fotocopias en una papelería.

N.º de fotocopias	10	25	50	100
Precio (€)	3,50	8	15	22

- ¿El número de fotocopias es directamente proporcional a su precio?
 - ¿Puedes averiguar cuánto valdrían 56 fotocopias?
- 68 **INVENTA.** Estos son los precios de las manzanas en dos tiendas distintas.

Tienda A		
1 kg	2 kg	3 kg
0,53 €	1,06 €	1,59 €

Tienda B		
1 kg	2 kg	3 kg
0,60 €	1 €	1,50 €

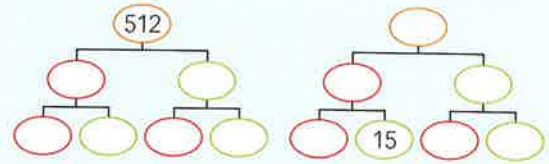


- ¿En alguna de las tiendas el peso y el precio son directamente proporcionales?
 - Inventa una tabla en la que las dos magnitudes sean directamente proporcionales.
- 69 Marcos hace tortillas de 6 huevos para un restaurante.
- ¿Cuántos huevos necesita para hacer 2 tortillas? ¿Y para 5 tortillas?
 - ¿Cuántas tortillas hace con 36 huevos? ¿Y con 60?
- 70 **INVESTIGA.** Si un sofá de dos plazas cuesta la mitad que uno de cuatro, y uno de tres plazas cuesta una cuarta parte menos que el de cuatro plazas, ¿el número de plazas y el precio son directamente proporcionales?



Repartos directamente proporcionales

71 La cantidad superior se reparte en las dos inferiores de forma directamente proporcional a 3 y 5. Completa en tu cuaderno.



- 72 **INVESTIGA.** Realiza un reparto de 18 000 en partes directamente proporcionales a 6, 8 y 11, y, después, a 12, 16 y 22. ¿Cómo son las partes que has obtenido? ¿Y si las partes fueran el triple que las iniciales?
- 73 Tres vecinos van a pagar, según los metros de fachada, el arreglo de su calle. Juan tiene 7 metros, Concha 12 y Andrés 6. Si cuesta 50 000 €, ¿cuánto pagará cada uno?
- 74 Tres familias se reúnen en un restaurante para comer. En la familia de Miguel son 5 personas, en la de Paula 3 y en la de Rocío 4. Han pagado 234 € en total.
- Si deciden pagar haciendo un reparto directamente proporcional al número de personas de las familias, ¿cuánto tiene que pagar cada familia?
 - Propón otra manera de pagar. ¿Sería más justa?
- 75 Lidia, Félix y Vicenta han comprado un décimo de lotería de Navidad. Lidia puso 10 €, Félix 6 € y Vicenta 4 €. Les han tocado 400 €. ¿Cuál es la manera más justa de repartirlo? ¿A cuánto tocará cada uno?
- 76 El ayuntamiento subvenciona con 124 000 € a 3 colegios de forma proporcional a su número de alumnos.

		
Colegio A 520 estudiantes	Colegio B 360 estudiantes	Colegio C 140 estudiantes

¿Cuánto recibirán? ¿Se te ocurre un método más justo?

77 **MATEMÁTICAS Y... ECONOMÍA.** Una manera de repartir los beneficios de una empresa entre sus socios y socias es repartirlos proporcionalmente a la cantidad de dinero que pusieron cuando se creó.

SOCIO/A 1 Aportación inicial: 30 000 €	SOCIO/A 2 Aportación inicial: 20 000 €	SOCIO/A 3 Aportación inicial: 10 000 €
---	---	---

Si los beneficios de este año han sido 102 000 €, ¿cuánto le corresponde a cada persona?

ACTIVIDADES FINALES



Cómo se calcula la cantidad repartida sabiendo una parte

- 78 Se ha repartido una cantidad de forma directamente proporcional a las edades de tres hermanos, que son 8, 4 y 3 años. Si al hermano mayor le han correspondido 800 €, ¿qué cantidad se ha repartido?

PRIMERO. Se halla la constante de proporcionalidad.

$$k = \frac{800}{8} = 100$$

SEGUNDO. Se calcula el total.

$$(8 + 4 + 3) \cdot 100 = 1500$$

Se han repartido 1500 €.



- 79 Laura, Eva y Mario trabajan en un bar. Se reparten las propinas del mes en función de las horas diarias que trabajan. Laura trabaja 8 horas al día y le han correspondido 124 €.

- a) Si Eva trabaja 6 horas y Mario 4, ¿cuánto les corresponde a ellos?
b) ¿Cuánto dinero se han repartido?

- 80 Por realizar un mural, tres artistas cobran 10350 €. Lo reparten de forma directamente proporcional a las horas trabajadas: uno 22 horas, otro 23 y del tercero se sabe que ha recibido 3600 €.

¿Qué cantidad les corresponde a los demás?

2. Realiza cálculos con porcentajes



ACTIVIDADES FLASH

- 81 Calcula mentalmente.
a) El 10% de 75. c) El 20% de 400.
b) El 50% de 86. d) El 75% de 200.
- 82 Completa.
a)% de 500 = 250 c) 20% de = 60
b) 25% de = 30 d) 10% de = 8,3
- 83 Indica el porcentaje que equivale a estas razones.
a) $\frac{21}{100}$ b) $\frac{9}{50}$ c) $\frac{7}{10}$ d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{1}{4}$ f) $\frac{1}{5}$

- 84 Expresa en forma de porcentaje.
a) Siete de cada diez personas utilizan la bicicleta.
b) Tres de cada cinco escolares realizan una actividad deportiva durante el fin de semana.
c) Una de cada cuatro personas respondió afirmativamente.

- 85 **INVESTIGA.** ¿Qué oferta crees que es mejor?

- a) La segunda unidad a mitad de precio.
b) Lleve 3 y pague 2.
c) 2×1

Calcula el porcentaje de descuento en cada caso.

- 86 **INVESTIGA.** Razona si estos enunciados son ciertos.

- a) El 20% de una cantidad es lo mismo que el 10% del doble de esa cantidad.
b) El 20% más el 30% de una cantidad es lo mismo que el 50% de esa cantidad.
c) El 20% del 30% de una cantidad es lo mismo que el 50% de esa cantidad.
d) El 20% del 30% de una cantidad es igual al 30% del 20% de esa cantidad.

Aumentos y disminuciones porcentuales



ACTIVIDADES FLASH

- 87 Aumenta el 20% a estas cantidades.
a) 10 b) 20 c) 120 d) 500 e) 1500
- 88 Disminuye el 90% a estas cantidades.
a) 10 b) 20 c) 120 d) 500 e) 1500
- 89 Completa en tu cuaderno:
a) Si disminuyes un 10% a 80, obtienes ...
b) Si disminuyes un 10% a ..., obtienes 54.
c) Si disminuyes un ...% a 40, obtienes 32.
d) Si aumentas un 30% a 50, obtienes ...
e) Si aumentas un 30% a ..., obtienes 26.
f) Si aumentas un ...% a 20, obtienes 21.

- 90 Completa en tu cuaderno el crucigrama calculando el porcentaje para pasar de una cantidad a otra.

- A: de 60 a 9
B: de 80 a 96
C: de 20 a 20
D: de 200 a 10
E: de 40 a 50



Inventa definiciones para los números en vertical.

- 91 **MATEMÁTICAS Y... CONSUMO.** Dependiendo del tipo de producto, el IVA varía de porcentaje. Actualmente, según la Agencia Tributaria, se aplican estos porcentajes: el 4% en periódicos y revistas, el 10% en alimentos, el 21% en material escolar... Calcula el precio con IVA de estos productos.



- 92 Quiero comprarme unas zapatillas de deporte, y en internet he encontrado dos páginas donde las venden. En ambas valen 46 €, pero en una me cobran 5 € de gastos de envío y en la otra los gastos de envío son el 8% del precio de las zapatillas. ¿En qué página me conviene comprarlas? ¿Cuánto tendré que pagar?

- 93 **INVESTIGA.** En una tienda se realiza un descuento del 20% en todos los productos durante el invierno. Cuando llega la primavera, los precios vuelven a su coste anterior. ¿En qué porcentaje aumentan?

3. Resuelve problemas de proporcionalidad directa y porcentajes

- 94 **MATEMÁTICAS Y... BIOLOGÍA.** Las hormigas pueden levantar pesos enormes con respecto a su tamaño. El peso medio de una hormiga es de 3 mg y es capaz de levantar hasta 20 veces su peso corporal.

- ¿Qué peso es capaz de levantar una hormiga?
- Si tuvieras proporcionalmente la fuerza de una hormiga, ¿cuánto peso podrías levantar?



- 95 **MATEMÁTICAS Y... VIDA SALUDABLE.** Un refresco contiene, por término medio, unos 11 g de azúcar por cada 100 ml. La Organización Mundial de la Salud recomienda que una persona adulta no tome más de 25 g de azúcar al día.

- ¿Cuánto azúcar contiene una lata de 330 ml?
- ¿Cuántos mililitros de refresco debería beber, como máximo, un adulto al día?

Teniendo en cuenta que el azúcar está presente en la fruta, la pasta, la verdura, etc., ¿crees que es saludable beber una lata de refresco al día?

- 96 **MATEMÁTICAS Y... ECONOMÍA.**

Este es el cambio de euros a dólares en el día de hoy.



- ¿Cuántos dólares nos darán si cambiamos 550 €?
- ¿Cuántos euros nos darán por 550 dólares?

- 97 Luis quiere hacer crema de chocolate para él y sus 6 amigos.

Crema de chocolate	
Ingredientes para 4 personas:	
100 g de chocolate	100 g de azúcar
2 dl de leche	40 g de harina
2 yemas de huevo	1 vaina de vainilla



- ¿Existe alguna relación de proporcionalidad entre los ingredientes y el número de personas? ¿Y entre unos ingredientes y otros?
- ¿Cuál es la razón entre el peso del chocolate y del azúcar?
- ¿Qué cantidad de cada ingrediente necesita Luis para él y sus amigos?
- ¿Y si solo quisiera hacer 3 raciones?
- Si utiliza un litro de leche, ¿cuántas raciones de crema de chocolate obtendrá?

- 98 Estos son los precios de dos tipos de cromos.

Animales			
N.º de paquetes	1	2	5
Precio (€)	0,90	1,80	4,50

Fútbol			
N.º de paquetes	1	2	5
Precio (€)	0,95	1,85	4,25



- ¿En qué tipo de cromos son directamente proporcionales el número de paquetes y el precio?
 - ¿Cuánto costarán 12 paquetes de este tipo?
 - ¿Se podría calcular lo que costarán 12 paquetes del otro tipo de cromos?
- 99 Sabiendo que la relación entre las medidas de un televisor es 16:9, ¿cuánto medirá de alto un televisor que mide 110,5 cm de ancho?
- 100 **RETO.** Un grupo de personas pagó 600 € por alojarse en un hotel durante 4 noches en 3 habitaciones dobles. ¿Cuánto cuesta alojarse en este hotel 3 noches en 2 habitaciones dobles?

ACTIVIDADES FINALES

101 MATEMÁTICAS Y... SOCIEDAD. Según un estudio realizado por la organización Save the Children:

- Un 8% de los chicos en edad escolar reconoció haber sufrido acoso escolar durante los últimos dos meses.
- En el caso de las chicas, este porcentaje se incrementa en un 2,6%.
- Un 3,3% de los escolares reconoció haber sido agresor.

Si estos porcentajes se mantuvieran en tu clase, ¿cuántos chicos habrían sufrido acoso? ¿Y chicas? ¿Cuántos agresores habría en un colegio con 250 estudiantes?

102 MATEMÁTICAS Y... CONSUMO. Cada año los precios suben, de media, lo que marca el IPC (índice de precios al consumo). En esta tabla figura el IPC de España y Francia en los últimos años en %.




País	2020	2019	2018	2017	2016
España	-0,53	0,79	1,18	1,11	1,57
Francia	-0,02	1,46	1,59	1,19	0,61

Un coche se vendía en 2016 en España y Francia por el mismo precio, 15 350 €. ¿Cuánto costaba en el año 2021 en cada país? ¿Qué porcentaje ha subido el precio en estos años?

103 MATEMÁTICAS Y... MONEDAS. Las monedas que utilizamos están fabricadas con una mezcla de metales que tienen ciertas características:

- La mezcla tiene que ser lo suficientemente dura como para que no se deterioren con el uso.
- El precio de los metales que se mezclan no debe ser superior al valor de la moneda.

La composición y el peso de algunas monedas es:

Composición	Peso		
89% cobre			
5% aluminio			
5% cinc			
1% estaño			
	7,8 g	5,7 g	4,1 g

a) ¿Qué peso llevo en el bolsillo si tengo 3 monedas de 50 céntimos, 4 de 20 céntimos y 2 de 10 céntimos?

b) El precio de los metales es:

Cobre: 3,14 €/kg Cinc: 1,82 €/kg
Aluminio: 1,79 €/kg Estaño: 20,14 €/kg

¿Cuál es el coste del metal de una moneda de 50 cts.?

104 INVESTIGA. En una tienda hacen un 20% de descuento y después cargan un IVA del 10%. ¿Qué es preferible, que primero nos hagan el descuento y luego nos apliquen el IVA, o al revés?

105 MATEMÁTICAS Y... MEDIOAMBIENTE. Estos son los datos que recogió la empresa Ecoembes, responsable del reciclaje en España, durante 2021.

Número medio de kilos reciclado por cada habitante durante 2021:



- a) ¿Cuántos kilos más recicló, de media, cada habitante en el contenedor amarillo durante 2021? ¿Y en el azul?
- b) Investiga cuántos habitantes hay en tu provincia y calcula cuántos kilos de basura se han reciclado aproximadamente.

106 INVESTIGA. En las rebajas se suele bajar el precio de los artículos dos veces, al principio y más adelante.



Si un artículo se ha rebajado primero un 20% y después un 10% más, ¿el precio final es el mismo que si lo rebajaran directamente un 30%?

107 MATEMÁTICAS Y... SOCIEDAD. Según un informe de Acnur, la Agencia de la ONU para los Refugiados:

- 781 millones de personas en el mundo son analfabetas.
- El 64% de la población analfabeta son mujeres.
- 115 millones son jóvenes que tienen entre 15 y 24 años.

- a) ¿Cuántas mujeres hay analfabetas en el mundo?
- b) ¿Qué porcentaje de la población analfabeta son jóvenes entre 15 y 24 años?

108 ¿Qué estudiante ha cometido el mayor error al realizar una medición?

Estudiante	Medida	Error
Marta	18,5 m	90 cm
Félix	5 m	13 cm
Carla	12 m	16 cm
Pilar	10,8 m	80 cm
Domingo	3 m	10 cm





El día sin IVA

Cada vez es más frecuente que las tiendas de electrodomésticos e informática organicen un día al año en el que no se cobra el IVA. En ese día puedes comprar cualquiera de sus productos con una rebaja del 21% correspondiente al IVA.

Estos son algunos anuncios que una de esas tiendas hizo durante los días previos al Día sin IVA.

Fecha: 10/09/2022



Kasbi
Note 5
157 €

Fecha: 16/09/2022



Kasbi
Note 5
199 €

Fecha:
20/09/2022



DÍA SIN IVA

Kasbi
Note 5
199 €
(-21%)

Y tú, ¿qué opinas?

109 ¿Cuál era el precio de un videojuego sin oferta?



OFERTA
Un videojuego
por tan solo 41,25 €
Hemos rebajado
el precio un 40%.

110 **MATEMÁTICAS Y... NUTRICIÓN.** Esta es la información nutricional de una hamburguesa.

A la derecha se indica la cantidad de calorías y nutrientes que contiene. Los porcentajes representan la aportación de esas cantidades a las cantidades diarias recomendadas para seguir una dieta sana.

kcal	25%	495 kcal	kcal	Energía
g	36%	27 g	g	Proteínas
g	37%	25 g	g	Grasas
g	15%	40 g	g	Hidratos de carbono
g	46%	2,3 g	g	Sal

- a) ¿Cuántas hamburguesas como máximo es recomendable comer en un día?
- b) ¿Cuántas calorías como máximo se deben consumir diariamente? ¿Y gramos de sal?

PROBLEMAS APARENTEMENTE DISTINTOS

111 Halla el valor de la variable x para que las siguientes razones formen una proporción.

$$\frac{4}{3} = \frac{24}{16 + x}$$

113 Realiza un reparto de 900 en partes directamente proporcionales a los siguientes números.

- a) 10, 12 y 18
b) 1000, 1200 y 1800

115 Lee y calcula.

- a) El 16% de 50.
b) ¿Qué tanto por ciento representa 6 respecto de 50?
c) El 90% de 150.

112 Leo quiere regalar a su madre un retrato. Ha comprado un marco de 16 cm de ancho por 24 cm de alto, y también ha encargado ampliar 6 veces la fotografía en formato 4:3. ¿Cuánto tendrá que recortar la foto para que ajuste en el marco?

114 Tres personas comparten un piso por 900 euros y han decidido que el alquiler no se pagará a partes iguales, sino que se dividirá proporcionalmente a sus sueldos. Marga gana 1800 € al mes y Sandro y Celia ganan 1200 € y 1000 €, respectivamente. ¿Cuánto pagará cada persona por el piso?

116 Para aprobar una oposición que consta de 3 pruebas con 50 preguntas cada una, es necesario tener el 90% de las preguntas acertadas. Antes de comenzar la tercera prueba ya se conocen los resultados de las anteriores. He fallado el 16% en la primera prueba y tengo 6 fallos en la segunda. ¿Puedo aprobar la oposición?

SITUACIÓN DE APRENDIZAJE



Espera o...
desespera

La publicidad es la fuente de ingresos más importante para la televisión. El precio que se cobra a las empresas que se anuncian varía según el número de personas que en ese momento están viendo el programa. La publicidad es más cara cuanto mayor sea la audiencia de un programa.

Las personas que están viendo un programa o una cadena de televisión en un cierto momento se miden con la cuota de pantalla (*share*). La cuota de pantalla indica el porcentaje de personas que están viendo un programa o cadena con respecto al número total de espectadores que en ese momento están viendo la televisión.

Es decir, si un programa que se emitió anoche tuvo un 12% de cuota de pantalla, significa que, de todas las personas que estaban viendo la televisión anoche, el 12% estaba viendo ese programa.

Estas son las cuotas de pantalla de los programas emitidos una noche.

Audiencia por programas

Programa	Inicio	Duración	Televidentes	Cuota de pantalla
<i>El hormiguero 3.0</i>	21:51	50 min	2 935 000	16,5%
<i>Tu cara me suena</i>	22:41	19 min	2 910 000	16,6%
<i>Vivir sin permiso</i>	22:42	94 min	2 847 000	19,6%
<i>Informativos noche</i>	21:11	32 min	2 650 000	16,8%
<i>Película: Última hora</i>	22:10	31 min	2 361 000	13,2%
<i>¡Boom!</i>	20:05	59 min	2 204 000	18,3%



1 ¡Prime time! Máxima audiencia

Se llama *prime time* a la franja horaria que congrega más personas viendo la televisión, independientemente del programa que vean. En España comienza a las 22:30 h, y es a partir de esa hora cuando las cadenas emiten los programas que consideran que más interesan a la gente. Según la tabla de las cuotas de audiencia de la página anterior:

- ¿Cuál fue el programa con mayor cuota de pantalla?
¿Cuántas personas lo vieron?
- ¿Cuántas personas estaban viendo la televisión durante la emisión de este programa?
- ¿Y el segundo con mayor cuota de pantalla?
¿Cuántas personas siguieron ese programa?
- ¿Cuántas personas estaban viendo la televisión durante la emisión de este programa?
- ¿Por qué el número de personas que obtienes es distinto?
- Fíjate en la relación entre el número de televidentes y en las cuotas de pantalla de cada programa. ¿Qué ocurre a partir de las 22:30 h? ¿Crees que tiene sentido decir que el *prime time* en España comienza a partir de esta hora?



Fíjate en dos programas que comenzaron prácticamente a la misma hora: *Tu cara me suena* y *Vivir sin permiso*.

- ¿Cuál de los dos programas tuvo mayor cuota de pantalla? ¿Y de televidentes?
- ¿Cuál puede ser la explicación de que teniendo mayor cuota de pantalla haya menos televidentes?



2 ¡Tampoco ve tanta gente la televisión!

Fíjate ahora en los informativos que aparecen en la tabla.

- ¿Cuál fue su cuota de pantalla? ¿Y su número de televidentes?
- ¿Cuántas personas estaban viendo la televisión en ese momento?
- Sabiendo que en España viven aproximadamente 47 millones de personas, ¿podrías decir qué porcentaje de la población estaba en aquel momento viendo ese programa?

3 ¿Y cómo me fio de las cuotas de pantalla?

Si te fijas en la tabla, el programa con mayor número de televidentes no tiene por qué coincidir con el programa que obtuvo mayor cuota de pantalla.

- ¿Cuál es el programa con mayor número de televidentes?
¿Y el que obtuvo mayor cuota de pantalla?
- ¿Por qué crees que la audiencia máxima no coincide con la máxima cuota de pantalla?
- ¿Cómo podrías comparar las cuotas de pantalla de dos programas que se emitan a horas distintas?



RESUMEN DE UNIDAD

RAZÓN

$$\frac{a}{b} \begin{matrix} \rightarrow \text{Antecedente} \\ \rightarrow \text{Consecuente} \end{matrix}$$

PROPORCIÓN

$$\begin{matrix} \text{Extremo} & \leftarrow & \frac{a}{b} & = & \frac{c}{d} & \rightarrow & \text{Medio} \\ \text{Medio} & \leftarrow & & & & \rightarrow & \text{Extremo} \end{matrix}$$

a es a b como c es a d .

CONSTANTE DE PROPORCIONALIDAD

Magnitud A	a_1	a_2	$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = k$
Magnitud B	b_1	b_2	

PORCENTAJES

$$t \% \text{ de } C = \frac{t \cdot C}{100}$$

MAGNITUDES DIRECTAMENTE PROPORCIONALES

Magnitud A	1	2	4	6
Magnitud B	6	12	24	36

Diagram showing multiplication factors: $\cdot 2$ and $\cdot 3$ between columns.

REPARTO DE UNA CANTIDAD N DE FORMA DIRECTAMENTE PROPORCIONAL A a, b, c

$$P_1 = \frac{N}{a + b + c} \cdot a$$

$$P_2 = \frac{N}{a + b + c} \cdot b$$

$$P_3 = \frac{N}{a + b + c} \cdot c$$

AUTOEVALUACIÓN

1. Identifica relaciones de proporcionalidad numérica directa

1 Halla el valor de x para que estas razones formen una proporción.

$$\frac{7}{5} \text{ y } \frac{x}{2}$$

- a) 1,4 b) 2,5 c) 2,8 d) 3

2 Elige la tabla en la que se representan dos magnitudes directamente proporcionales

a)

N.º de meses	1	3	5	8
Peso (kg)	3,8	5,8	6,9	8,1

b)

N.º de meses	1	3	5	8
Talla (cm)	52	60	64	68

c)

N.º de meses	1	3	5	8
N.º de días	30	90	150	240

2. Realiza cálculos con porcentajes

3 ¿Cuánto es el 27% de 1200?
a) 300 b) 324 c) 325 d) 400

4 El 48% de una cantidad es 36. ¿Cuál es la cantidad?
a) 70 b) 72 c) 75 d) 80

3. Resuelve problemas de proporcionalidad directa y porcentajes

5 Una caja con 6 cartones de leche cuesta 3,78 €. ¿Cuánto cuestan 9 cartones de leche?
a) 5,67 € b) 6,30 € c) 6,93 € d) 7,56 €

6 Luisa va a repartir 100 cromos de forma directamente proporcional a las edades de sus hermanas, que son 5, 7 y 8 años. ¿Cuántos cromos dará a cada una?
a) 25, 35 y 40 b) 30, 35 y 35 c) 50, 70 y 80

7 ¿Qué porcentaje representan 351 de 540 personas?
a) 50% b) 55% c) 60% d) 65%

8 Se disminuye el 12% el precio de un abrigo. Si antes costaba 60 €, ¿cuánto cuesta ahora?
a) 52,80 € b) 53,40 € c) 56 € d) 67,20 €

9 18 preguntas supone el 25% del total. ¿Cuántas preguntas hay?
a) 72 b) 74 c) 76 d) 78

VALORA TU APRENDIZAJE

- ¿Valoras positivamente las críticas razonadas?
- ¿Aceptas la tarea que te asignan dentro del grupo?