EJEMPLOS DE REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE FUNCIONES

1.- Representar gráficamente la función $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 4$.

Dominio:

$Dom(f) = \mathbb{R}$, por ser una función polinómica.

Simetrías:

$f(-x) = 2(-x)^3 + 3(-x)^2 - 12(-x) + 4 = -2x^3 + 3x^2 + 12x + 4$

Como $f(-x) \neq -f(x)$ y $f(-x) \neq f(x)$, la función ni es impar ni es par, es decir, no tiene simetrías.

Periodicidad:

No es periódica.

Puntos de corte con los ejes de coordenadas:

- Con OX:
  $y = 0 \to 2x^3 + 3x^2 - 12x + 4 = 0 \to$ No tiene raíces enteras.
- Con OY:
  $x = 0 \to y = 4$

Regiones de existencia:

En este caso, como no es fácil encontrar las raíces de la ecuación cúbica, nos saltamos este apartado.

Asíntotas:

- Asíntotas verticales
  Hay que buscar un número real x_0 tal que $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$. Por la forma de la función se ve que no hay ninguno, luego esta función no tiene asíntotas verticales.
- Asíntotas horizontales
  Para que existiera asíntota horizontal, el límite $\lim_{x \to \infty} f(x)$ nos tendría que salir un número real, pero este límite vale infinito, luego la función no tiene asíntotas horizontales.
- Asíntotas oblicuas
  $y = mx + n$ con $m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$ y $n = \lim_{x \to \infty} (f(x) - mx)$
  Se puede comprobar fácilmente que m vale infinito, luego tampoco tiene asíntotas oblicuas.

Puntos de discontinuidad:

Por ser una función polinómica es siempre continua.

Monotonía (crecimiento, decrecimiento y extremos relativos):

Hay que estudiar el signo de la derivada primera: $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 + 6x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = \begin{cases} -2 \\ 1 \end{cases}$$

$$f'\begin{cases} >0 & (-\infty,-2) \\ <0 & (-2,1) \\ >0 & (1,+\infty) \end{cases} \Rightarrow f \text{ es } \begin{cases} \text{creciente en } (-\infty,-2)\cup(1,+\infty) \\ \text{decreciente en } (-2,1) \end{cases}$$

Calculamos a derivada segunda:

$f''(x) = 12x + 6$

$f''(-2) < 0 \Rightarrow$ en $x = -2$ hay un máximo relativo

$f''(1) > 0 \Rightarrow$ en $x = 1$ hay un mínimo relativo

Curvatura (convexidad, concavidad y puntos de inflexión):

Hay que estudiar el signo de la derivada segunda: $f''(x) = 12x + 6$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 12x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = -2$

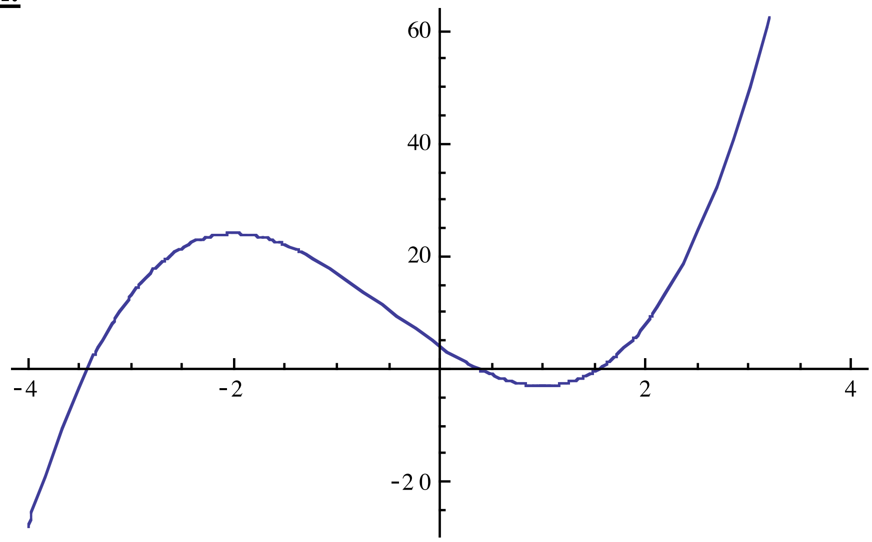
$$f'' \text{ es } \begin{cases} >0 \text{ en } (-2,+\infty) \\ <0 \text{ en } (-\infty,-2) \end{cases} \Rightarrow f \text{ es } \begin{cases} \text{convexa en } (-2,+\infty) \\ \text{cóncava en } (-\infty,-2) \end{cases}$$

Veamos que en $x = -2$ hay un punto de inflexión:

$f'''(x) = 12$

$f'''(-2) > 0 \Rightarrow x = -2$ es un punto de inflexión

Representación:



2.	Representa gráficamente la función $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-1}$.

Dominio:

Dom $(f) = \mathbb{R} - \{\text{puntos que anulan el denominador}\}$

$$x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{1} = \pm 1$$

Dom $(f) = \mathbb{R} - \{-1,\ 1\} = (-\infty,-1)\cup(-1,\ 1)\cup(1,+\infty)$

Simetrías:

$f(-x) = \dfrac{(-x)^2}{(-x)^2-1} = \dfrac{x^2}{x^2-1} = f(x) \Rightarrow f(x)$ es par, es decir, simétrica respecto del eje OY.

Periodicidad:
Esta función no es periódica

Puntos de corte con los ejes de coordenadas:

- Con OX
  $$y=0\Rightarrow \frac{x^2}{x^2-1}=0\Rightarrow x^2=0\Rightarrow x=0\to(0,0)$$
- Con OY
  $$x=0\Rightarrow y=\frac{0^2}{0^2-1}=0\to(0,0)$$

Regiones de existencia:

- Intervalos de positividad
  $f(x)>0\Leftrightarrow x^2-1>0\Leftrightarrow x^2>1\Leftrightarrow x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)\to(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ Intervalos de negatividad
  $f(x)<0\Leftrightarrow x^2-1<0\Leftrightarrow x^2<1\Leftrightarrow x\in(-1,1)\to(-1,1)$

Asíntotas:

- Asíntotas verticales

$$\lim_{x\to1}f(x)=\infty \text{ con }\begin{cases}\lim\limits_{x\to1-}f(x)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to1+}f(x)=+\infty\end{cases}\Rightarrow x=1 \text{ es una asíntota vertical}$$

$$\lim_{x\to-1}f(x)=\infty \text{ con }\begin{cases}\lim\limits_{x\to-1-}f(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-1+}f(x)=-\infty\end{cases}\Rightarrow x=-1 \text{ es una asíntota vertical}$$

- Asíntotas horizontales

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2-1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}}{\frac{x^2-1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{x^2}}=1\Rightarrow y=1$$ es una asíntota horizontal

Como consecuencia, la función no tiene asíntotas oblicuas.

Puntos de discontinuidad:
Por tratarse de una función racional, es continua en su dominio, esto es, presenta discontinuidades en los puntos $x=-1$ y $x=1$.

Monotonía (crecimiento, decrecimiento y extremos):

$$f'(x)=\frac{2x(x^2-1)-x^2(2x)}{(x^2-1)^2}=\frac{2x^3-2x^2-2x^3}{(x^2-1)^2}=\frac{-2x^2}{(x^2-1)^2}$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{-2x^2}{(x^2-1)^2}=0\Leftrightarrow-2x^2=0\Leftrightarrow x=0$$

signo de f'

$$\begin{array}{ccccccc} + & & + & & - & & - \\ \hline & -1 & & 0 & & 1 & \end{array}$$

$$y = f(x)\begin{cases} \text{creciente en } (-\infty,-1)\cup(-1,0) \\ \text{decreciente en } (0,1)\cup(1,+\infty) \end{cases}$$

En $x=0$ tiene un posible extremo (máximo o mínimo)[1], luego hay que calcular la derivada segunda:

$$f''(x)=\frac{-2\left(x^2-1\right)^2-(-2x)2\left(x^2-1\right)2x}{\left(x^2-1\right)^4}=\frac{\left(x^2-1\right)\left[-2\left(x^2-1\right)+8x^2\right]}{\left(x^2-1\right)^4}=\frac{-2x^2+2+8x^2}{\left(x^2-1\right)^3}=$$

$$=\frac{6x^2+2}{\left(x^2-1\right)^3}$$

$$f''(0)=\frac{6\cdot 0^2+2}{\left(0^2-1\right)^3}=\frac{2}{-1}=-2<0 \Rightarrow x=0 \text{ es un máximo}$$

Para hallar la coordenada *y* del máximo sustituimos $x=0$ en *f*(*x*): $f(0)=\dfrac{0^2}{0^2-1}=0$

<u>Curvatura (concavidad, convexidad y puntos de inflexión):</u>

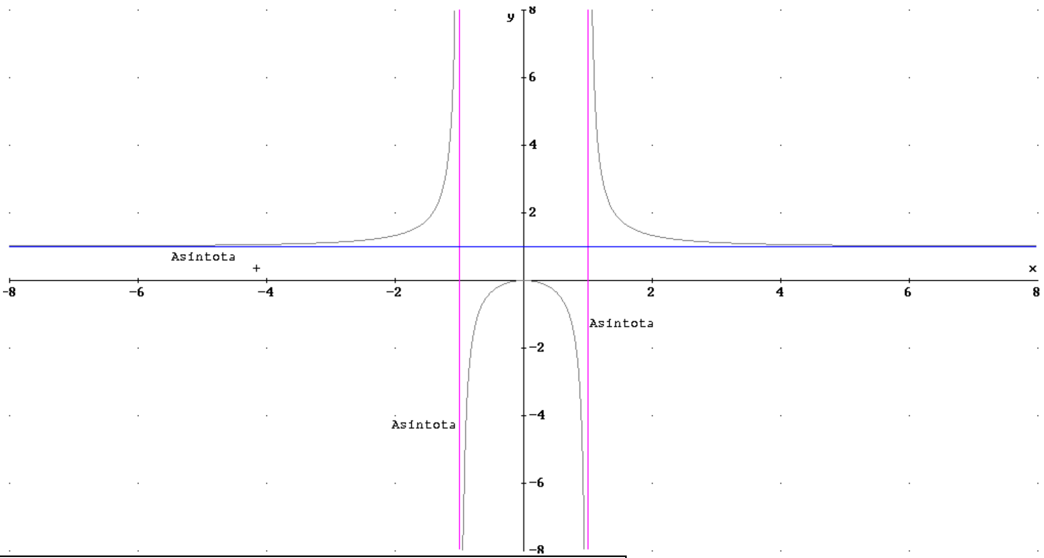
$f''(x)=\dfrac{6x^2+2}{\left(x^2-1\right)^3}=0 \Leftrightarrow 6x^2+2=0 \Leftrightarrow 6x^2=-2 \Leftrightarrow x^2=\dfrac{-2}{6} \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\dfrac{-2}{6}}\notin\mathbb{R}$ y por tanto la función no tiene puntos de inflexión.

signo de f''

$$\begin{array}{ccccc} + & & - & & + \\ \hline & -1 & & 1 & \end{array}$$

$$y = f(x)\begin{cases} \text{convexa en } (-\infty,-1)\cup(1,+\infty) \\ \text{concava en } (-1,1) \end{cases}$$

<u>Gráfica:</u>



3.	Representa gráficamente la función $f(x)=\dfrac{x}{x^2-9}$.

<u>Dominio:</u>

[1] En este caso sabemos que es un máximo por que la función es continua en $x=0$ y en dicho punto pasa de ser creciente a ser decreciente.

Dom $(f) = \mathbb{R} - \{\text{puntos que anulan el denominador}\}$

$$x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$$

Dom $(f) = \mathbb{R} - \{-3,3\} = (-\infty,-3) \cup (-3,3) \cup (3,+\infty)$

Simetrías:

$f(-x) = \dfrac{(-x)}{(-x)^2 - 9} = \dfrac{-x}{x^2 - 9} \neq f(x) \Rightarrow f(x)$ no es par, es decir, no es simétrica respecto del eje OY.

$f(-x) = \dfrac{-x}{x^2 - 9} = -\dfrac{x}{x^2 - 9} = -f(x) \Rightarrow f(x)$ es impar, es decir, es simétrica respecto del origen de coordenadas

Periodicidad:
Esta función no es periódica

Puntos de corte con los ejes de coordenadas:

- Con OX

  $$y = 0 \Rightarrow \frac{x}{x^2 - 9} = 0 \Rightarrow x = 0 \to (0,0)$$

- Con OY

  $$x = 0 \Rightarrow y = \frac{0}{0^2 - 9} = 0 \to (0,0)$$

Regiones de existencia:

- Intervalos de positividad

  $$f(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^2 - 9 > 0 \end{cases} \text{ ó } \begin{cases} x < 0 \\ x^2 - 9 < 0 \end{cases}$$

  La solución del primer sistema de inecuaciones es $x \in (3,+\infty)$ y la del segundo $x \in (-3,0)$, y por tanto, la función es positiva en $(-3,0) \cup (3,+\infty)$.

- Intervalos de negatividad

  $$f(x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^2 - 9 < 0 \end{cases} \text{ ó } \begin{cases} x < 0 \\ x^2 - 9 > 0 \end{cases}$$

  La solución del primer sistema de inecuaciones es $x \in (0,3)$ y la del segundo $x \in (-\infty,-3)$, y por tanto, la función es negativa en $(-\infty,-3) \cup (0,3)$.

Asíntotas:

- Asíntotas verticales

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \infty \text{ con } \begin{cases} \lim\limits_{x\to 3-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 3+} f(x) = +\infty \end{cases} \Rightarrow x = 3 \text{ es una asíntota vertical}$$

$$\lim_{x\to -3} f(x) = \infty \text{ con } \begin{cases} \lim\limits_{x\to -3-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to -3+} f(x) = -\infty \end{cases} \Rightarrow x = -3 \text{ es una asíntota vertical}$$

- Asíntotas horizontales

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2-9} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x}{x^2}}{\frac{x^2-9}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{9}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1-\frac{9}{x^2}} = 0$$

$y = 0$ es una asíntota horizontal

Como consecuencia, la función no tiene asíntotas oblicuas.

Puntos de discontinuidad:

Por tratarse de una función racional, es continua en su dominio, esto es, presenta discontinuidades en los puntos $x = -3$ y $x = 3$.

Monotonía (crecimiento, decrecimiento y extremos):

$$f'(x) = \frac{1(x^2-9) - x(2x)}{(x^2-9)^2} = \frac{x^2 - 9 - 2x^2}{(x^2-9)^2} = \frac{-x^2-9}{(x^2-9)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-x^2-9}{(x^2-9)^2} = 0 \Leftrightarrow -x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -9 \text{ Imposible}$$

signo de f'

$-$		$-$		$-$
	-3		3	

$y = f(x)$ decreciente en $\mathbb{R} - \{-3,\ 3\}$

Como consecuencia esta función no tiene ni máximos ni mínimos.

Curvatura (concavidad, convexidad y puntos de inflexión):

$$f''(x) = \frac{-2x(x^2-9)^2 - (-x^2-9)2(x^2-9)2x}{(x^2-9)^4} = \frac{(x^2-9)[-2x(x^2-9) - (-x^2-9)4x]}{(x^2-9)^4} =$$

$$= \frac{-2x(x^2-9) - (-x^2-9)4x}{(x^2-9)^3} = \frac{-2x^3 + 18x + 4x^3 + 36x}{(x^2-9)^3} = \frac{2x^3 + 54x}{(x^2-9)^3}.$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x^3+54x}{(x^2-9)^3} = 0 \Leftrightarrow 2x^3 + 54x = 0 \Leftrightarrow x(2x^2+54) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2x^2 + 54 = 0 \ !! \end{cases}$$

signo de f''

$-$		$+$		$-$		$+$
	-3		0		3	

$$y = f(x) \begin{cases} \text{convexa en } (-3,\ 0) \cup (3,\ +\infty) \\ \text{concava en } (-\infty, -3) \cup (0,\ 3) \end{cases}$$

Como la derivada segunda sea anula en $x = 0$, en dicho punto la función puede presentar un punto de inflexión. Para ver si lo es o no, calculamos la derivada tercera:

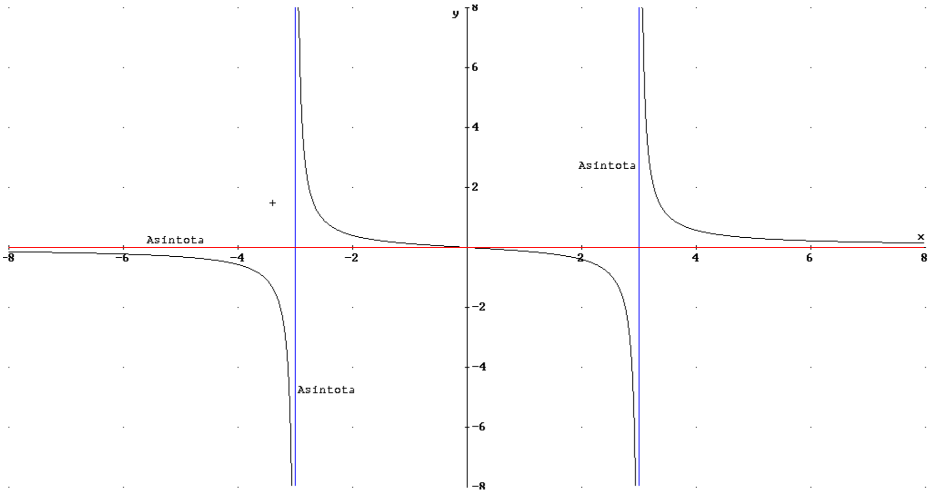
$$f'''(x) = \frac{(6x^2+54)(x^2-9)^3 - (2x^3+54x)3(x^2-9)^2\,2x}{(x^2-9)^6}$$

y evaluamos dicha derivada en cero:

$$f'''(0) = \frac{(6\cdot 0^2 + 54)(0^2-9)^3 - (2\cdot 0^3 + 54\cdot 0)3(0^2-9)^2\,2\cdot 0}{(0^2-9)^6} < 0$$

es decir, $x = 0$ es un punto de inflexión convexo-cóncavo.

Gráfica:



4.	Representa gráficamente la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x+1}$.

Dominio:

Dom $(f) = \mathbb{R} - \{\text{puntos que anulan el denominador}\}$

$$x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

Dom $(f) = \mathbb{R} - \{-1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$

Simetrías:

$f(-x) = \dfrac{(-x)^2 - 4}{-x+1} = \dfrac{x^2 - 4}{-x+1} \neq f(x) \Rightarrow f(x)$ no es par, es decir, no es simétrica respecto del eje *OY*.

$f(-x) = \dfrac{x^2 - 4}{-x+1} \neq -f(x) \Rightarrow f(x)$ no es impar, es decir, no es simétrica respecto del origen de coordenadas

Periodicidad:

Esta función no es periódica

Puntos de corte con los ejes de coordenadas:

- Con *OX*

$$y = 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 4}{x+1} = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{4} = \pm 2 \rightarrow \begin{cases} (-2,0) \\ (2,0) \end{cases}$$

- Con *OY*

$$x = 0 \Rightarrow y = \frac{0^2 - 4}{0+1} = \frac{-4}{1} = -4 \rightarrow (0,-4)$$

Regiones de existencia:

- Intervalos de positividad

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4 > 0 \\ x + 1 > 0 \end{cases} \text{ ó } \begin{cases} x^2 - 4 < 0 \\ x + 1 < 0 \end{cases}$$

La solución del primer sistema de inecuaciones es $x \in (2,+\infty)$ y la del segundo $x \in (-2,-1)$ y por tanto, la función es positiva en $(-2,-1) \cup (2,+\infty)$.

- Intervalos de negatividad

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4 > 0 \\ x+1 < 0 \end{cases} \text{ ó } \begin{cases} x^2 - 4 < 0 \\ x+1 > 0 \end{cases}$$

La solución del primer sistema de inecuaciones es $x \in (-\infty,-2)$ y la del segundo $x \in (-1, 2)$, y por tanto, la función es negativa en $(-\infty,-2) \cup (-1,2)$.

Asíntotas:

- Asíntotas verticales

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \infty \text{ con } \begin{cases} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty \end{cases} \Rightarrow x = -1 \text{ es una asíntota vertical}$$

- Asíntotas horizontales

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-4}{x+1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2-4}{x^2}}{\frac{x+1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} - \frac{4}{x^2}}{\frac{x}{x^2} + \frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - \frac{4}{x^2}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \infty$$

$\Rightarrow f(x)$ no tiene asíntotas horizontales

- Asíntota oblicua

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2-4}{x+1}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-4}{x(x+1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-4}{x^2+x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2-4}{x^2}}{\frac{x^2+x}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} - \frac{4}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} + \frac{x}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - \frac{4}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}} = 1 \Rightarrow m = 1$$

$$n = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2-4}{x+1} - x \right) = [\infty - \infty] = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 4 - x(x+1)}{x+1}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 4 - x^2 - x}{x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{-x-4}{x+1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{-x-4}{x}}{\frac{x+1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{-x}{x} - \frac{4}{x}}{\frac{x}{x} + \frac{1}{x}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-1 - \frac{4}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = -1 \Rightarrow n = -1$$

Por tanto, la recta $y = mx + n = x - 1$ es una asíntota oblicua.

Puntos de discontinuidad:

Por tratarse de una función racional, es continua en su dominio, esto es, presenta discontinuidades en los puntos $x = -1$.

Monotonía (crecimiento, decrecimiento y extremos):

$$f'(x)=\frac{2x(x+1)-(x^2-4)\cdot 1}{(x+1)^2}=\frac{2x^2+2x-x^2+4}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2x+4}{(x+1)^2}$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow \frac{x^2+2x+4}{(x+1)^2}=0\Leftrightarrow x^2+2x+4=0\Leftrightarrow x=\frac{-2\pm\left(\sqrt{2^2-4\cdot 1\cdot 4}\right)}{2\cdot 1}\notin\mathbb{R}$$

signo de f'

$$\begin{array}{ccc} + & & + \\ \hline & -1 & \end{array}$$

$y=f(x)$ decreciente en $\mathbb{R}-\{-1\}$

Como consecuencia esta función no tiene ni máximos ni mínimos.

Curvatura (concavidad, convexidad y puntos de inflexión):

$$f''(x)=\frac{(2x+2)(x+1)^2-(x^2+2x+4)2(x+1)\cdot 1}{(x+1)^4}=\frac{(x+1)\left[(2x+2)(x+1)-(x^2+2x+4)2\right]}{(x+1)^4}=$$

$$=\frac{(2x+2)(x+1)-2(x^2+2x+4)}{(x+1)^3}=\frac{2x^2+2x+2x+2-2x^2-4x-8}{(x+1)^3}=\frac{-6}{(x+1)^3}$$

$$f''(x)=0\Leftrightarrow\frac{-6}{(x+1)^3}=0\Leftrightarrow -6=0 \text{ Imposible}$$

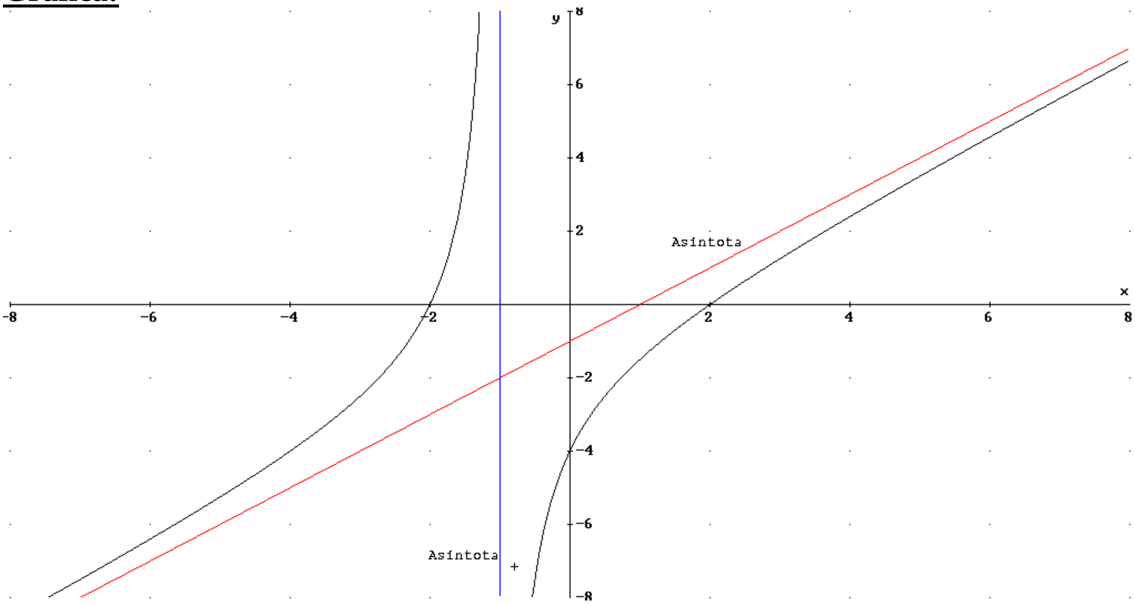
signo de f''

$$\begin{array}{ccc} + & & - \\ \hline & -1 & \end{array}$$

$$y=f(x)\begin{cases}\text{convexa en } (-\infty,-1)\\ \text{concava en } (-1,\ +\infty)\end{cases}$$

Como la derivada segunda no se anula, la función no tiene puntos de inflexión.

Gráfica:



5.	Representa gráficamente la función $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+4}$.

Dominio:

Dom $(f)=\mathbb{R}-\{$puntos que anulan el denominador$\}$

$$x^2+4=0 \Leftrightarrow x^2=-4 \text{ Imposible}$$

Dom $(f)=\mathbb{R}$

Simetrías:

$f(-x)=\dfrac{(-x)^2-1}{(-x)^2+4}=\dfrac{x^2-1}{x^2+4}=f(x)\Rightarrow f(x)$ es par, es decir, es simétrica respecto del eje *OY*.

$f(-x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+4}\neq -f(x)\Rightarrow f(x)$ no es impar, es decir, no es simétrica respecto del origen de coordenadas

Periodicidad:

Esta función no es periódica

Puntos de corte con los ejes de coordenadas:

- Con *OX*

$$y=0\Rightarrow \frac{x^2-1}{x^2+4}=0\Leftrightarrow x^2-1=0\Leftrightarrow x^2=1\Leftrightarrow x=\pm 1\to \begin{cases}(-1,0)\\(1,0)\end{cases}$$

- Con *OY*

$$x=0\Rightarrow y=\frac{0^2-1}{0^2+4}=-\frac{1}{4}\to\left(0,\frac{-1}{4}\right)$$

Regiones de existencia:

- Intervalos de positividad

$$f(x)>0\Leftrightarrow \begin{cases}x^2-1>0\\x^2+4>0\end{cases} \text{ ó } \begin{cases}x^2-1<0\\x^2+4<0\end{cases}$$

Por tanto, la función es positiva en $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$.

- Intervalos de negatividad

$$f(x)<0\Leftrightarrow \begin{cases}x^2-1>0\\x^2+4<0\end{cases} \text{ ó } \begin{cases}x^2-1<0\\x^2+4>0\end{cases}$$

Por tanto, la función es negativa en $(-1,1)$.

Asíntotas:

- Asíntotas verticales
  No tiene (ya que el denominador no se anula)
- Asíntotas horizontales

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{x^2+4}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2-1}{x^2}}{\frac{x^2+4}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{4}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{4}{x^2}}=1$$

$\Rightarrow y=1$ es una asíntota horizontal

Por tanto no hay asíntotas oblicuas.

Puntos de discontinuidad:
Por tratarse de una función racional, es continua en su dominio, luego es continua en IR.

Monotonía (crecimiento, decrecimiento y extremos):

$$f'(x)=\frac{2x\left(x^2+4\right)-\left(x^2-1\right)(2x)}{\left(x^2+4\right)^2}=\frac{2x^3+8x-2x^3+2x}{\left(x^2+4\right)^2}=\frac{10x}{\left(x^2+4\right)^2}$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{10x}{\left(x^2+4\right)^2}=0\Leftrightarrow 10x=0\Leftrightarrow x=0$$

signo de f'

$$\begin{array}{c|c} - & + \\ \hline & \\ \end{array}$$
$$\quad 0$$

$$y=f(x)\ \begin{cases}\text{decreciente en } (-\infty,\ 0)\\ \text{creciente en } (0,+\infty)\end{cases}$$

En $x=0$ va a tener un mínimo, ya que la función es continua y en dicho punto pasa de ser creciente a ser decreciente. De todas formas lo vamos a comprobar calculando la derivada segunda:

$$f''(x)=\frac{10\left(x^2+4\right)^2-10x\cdot 2\left(x^2+4\right)2x}{\left(x^2+4\right)^4}=\frac{\left(x^2+4\right)\left[10\left(x^2+4\right)-40x^2\right]}{\left(x^2+4\right)^4}=\frac{10\left(x^2+4\right)-40x^2}{\left(x^2+4\right)^3}=$$

$$=\frac{10x^2+40-40x^2}{\left(x^2+4\right)^3}=\frac{-30x^2+40}{\left(x^2+4\right)^3}$$

y evaluamos dicha derivada en $x=0$:

$$f''(0)=\frac{-30\cdot 0^2+40}{\left(0^2+4\right)^3}>0\Rightarrow x=0 \text{ es un mínimo}$$

Hallamos la coordenada *y* del mínimo: $f(0)=\frac{0^2-1}{0^2+4}=-\frac{1}{4}\rightarrow$ Mínimo $\left(0,-\frac{1}{4}\right)$

Curvatura (concavidad, convexidad y puntos de inflexión):

$$f''(x)=0\Leftrightarrow\frac{-30x^2+40}{\left(x^2+4\right)^3}=0\Leftrightarrow -30x^2+40=0\Leftrightarrow x^2=\frac{-40}{-30}=\frac{4}{3}\Leftrightarrow x=\pm\frac{2}{\sqrt{3}}$$

signo de f''

$$\begin{array}{c|c|c} - & + & - \\ \hline & & \\ \end{array}$$
$$-\frac{2\sqrt{3}}{3} \qquad \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$y=f(x)\begin{cases}\text{convexa en}\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)\\ \text{concava en}\left(-\infty,-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)\cup\left(\frac{2\sqrt{3}}{3},+\infty\right)\end{cases}$$

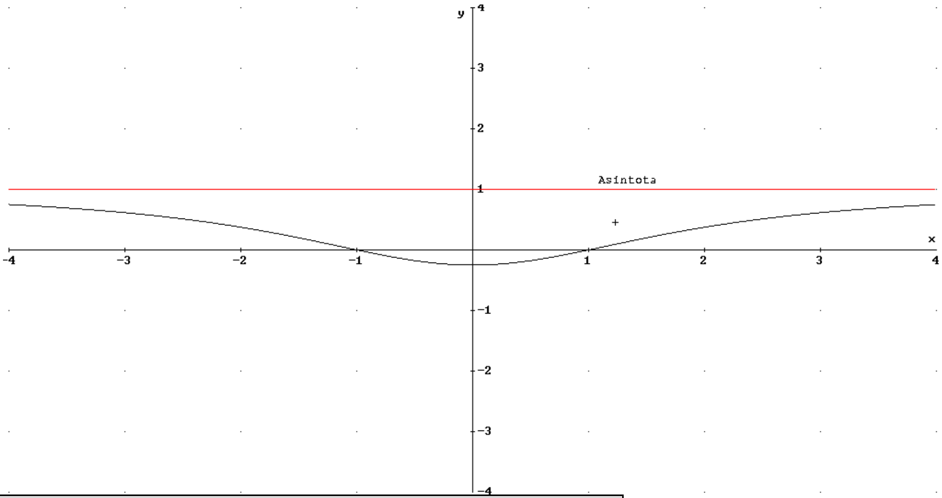
Los puntos $x=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ y $x=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ son puntos de inflexión. Lo comprobamos calculando la derivada tercera y evaluando:

$$f'''(x)=\frac{-60x(x^2+4)^3-(-30x^2+40)3(x^2+4)2x}{(x^2+4)^6}$$

$f'''\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)>0 \Rightarrow x=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ es un punto de inflexión cóncavo-convexo

$f'''\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)<0 \Rightarrow x=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ es un punto de inflexión convexo-cóncavo

Gráfica:



6.	Representa gráficamente la función $f(x)=\ln\sqrt{x^2+1}$.

Dominio:

El dominio de la función logaritmo es $(0,+\infty)$ y el dominio de una función radical de índice par es el conjunto de los x tales que el radicando es ≥ 0.

En nuestro caso, como $x^2+1>0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$, se tiene que el dominio de la función $f(x)$ es $\mathbb{R}$.

Simetrías:

$f(-x)=\ln\sqrt{(-x)^2+1}=\ln\sqrt{x^2+1}=f(x)\Rightarrow f(x)$ es par, es decir, simétrica respecto del eje *OY*.

Periodicidad:

Esta función no es periódica

Puntos de corte con los ejes de coordenadas:

- Con *OX*

  $y=0\Rightarrow \ln\sqrt{x^2+1}=0\Rightarrow e^{\ln\sqrt{x^2+1}}=e^0\Rightarrow\sqrt{x^2+1}=1\Rightarrow x^2+1=1\Rightarrow x^2=0$

  $\Rightarrow x=0\rightarrow(0,0)$

- Con *OY*

  $x=0\Rightarrow y=\ln\sqrt{0^2+1}=\ln 1=0\rightarrow(0,0)$

Regiones de existencia:

$f(x)=0\Leftrightarrow x=0$

signo de $f(x)$: $\quad \underset{}{+} \;\Big|_{0}\; +$

Así, $f(x)$ es positiva en $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

Asíntotas:
Esta función no tiene asíntotas.

Puntos de discontinuidad:
Por ser composición de funciones continuas es continua en todo su dominio.

Monotonía (crecimiento, decrecimiento y extremos):

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}-1}2x=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}\sqrt{x^2+1}}=\frac{x}{x^2+1}$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{x}{x^2+1}=0\Leftrightarrow x=0$$

signo de f': $\quad - \;\Big|_{0}\; +$

$$y=f(x)\begin{cases}\text{creciente en } (0,+\infty)\\ \text{decreciente en } (-\infty,0)\end{cases}$$

En $x=0$ tiene un posible extremo (máximo o mínimo)[2], luego hay que calcular la derivada segunda:

$$f''(x)=\frac{1\cdot\left(x^2+1\right)-x\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{x^2+1-2x^2}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{-x^2+1}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$f''(0)=\frac{-0^2+1}{\left(0^2+1\right)^2}=1>0\Rightarrow x=0 \text{ es un mínimo}$$

Para hallar la coordenada y del máximo sustituimos $x=0$ en $f(x)$: $f(0)=0$

Curvatura (concavidad, convexidad y puntos de inflexión):

$$f''(x)=0\Leftrightarrow\frac{-x^2+1}{\left(x^2+1\right)^2}=0\Leftrightarrow -x^2+1=0\Leftrightarrow x^2=1\Leftrightarrow x=\pm 1$$

signo de f'': $\quad - \;\Big|_{-1}\; + \;\Big|_{1}\; -$ $\qquad y=f(x)\begin{cases}\text{convexa en } (-1,1)\\ \text{cóncava en } (-\infty-1)\cup(1,+\infty)\end{cases}$

Los puntos $x=\pm 1$ son posibles puntos de inflexión. Para verlo, calculamos la derivada tercera:

$$f'''(x)=\frac{-2x\left(x^2+1\right)^2-\left(-x^2+1\right)2\left(x^2+1\right)2x}{\left(x^2+1\right)^4}=\frac{\left(x^2+1\right)\left[-2x\left(x^2+1\right)-4x\left(-x^2+1\right)\right]}{\left(x^2+1\right)^4}=$$

---

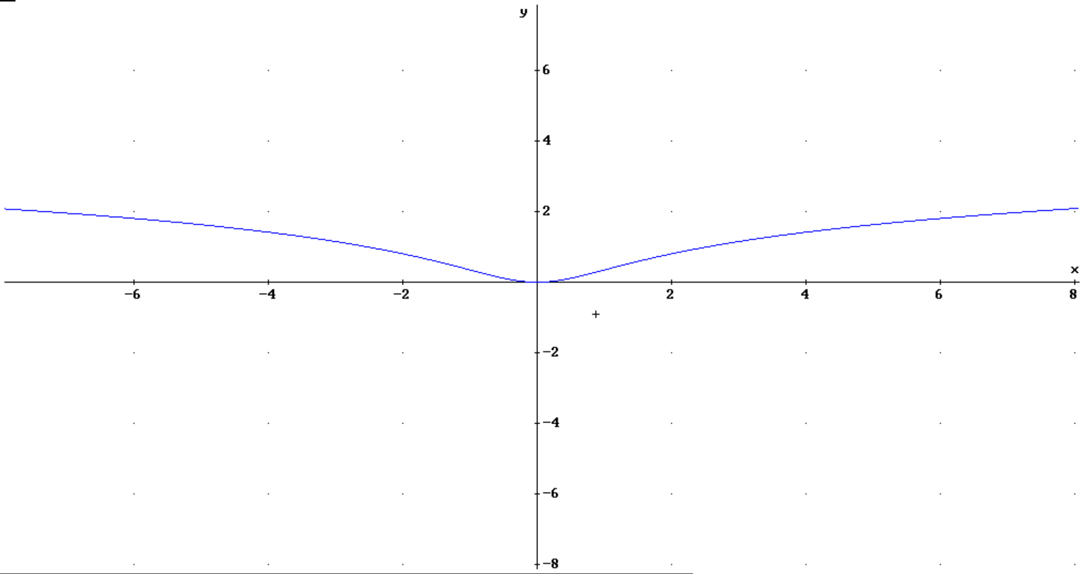
[2] En este caso sabemos que es un mínimo por que la función es continua en $x=0$ y en dicho punto pasa de ser decreciente a ser creciente.

$$= \frac{-2x(x^2+1)-4x(-x^2+1)}{(x^2+1)^3} = \frac{-2x^3-2x+4x^3-4x}{(x^2+1)^3} = \frac{x^3-6x}{(x^2+1)^3}$$

$f'''(-1) > 0 \Rightarrow x = -1$ es un punto de inflexión convexo-cóncavo $\rightarrow (-1, 0.35)$

$f'''(1) < 0 \Rightarrow x = 1$ es un punto de inflexión cóncavo-convexo $\rightarrow (1, 0.35)$

Gráfica:



7.	Representa gráficamente la función $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$.

Dominio:

$Dom(f) = \mathbb{R} - \{1\}$

$x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Simetrías:

$f(-x) = \dfrac{(-x)^2}{-x-1} = \dfrac{x^2}{-x-1} \neq f(x) \Rightarrow f(x)$ no es par, es decir, no es simétrica respecto del eje *OY*.

$f(-x) \neq -\dfrac{x^2}{x-1} = -f(x) \Rightarrow f(x)$ no es impar, es decir, no es simétrica respecto del origen de coordenadas.

Periodicidad:

Esta función no es periódica

Puntos de corte con los ejes de coordenadas:

- Con *OX*

  $y = 0 \Rightarrow \dfrac{x^2}{x-1} = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$

- Con *OY*

  $x = 0 \Rightarrow f(0) = \dfrac{0^2}{0-1} = 0 \rightarrow (0, 0)$

Regiones de existencia:

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

signo de $f(x)$	$-$	0	$-$	1	$+$

Así, $f(x)$ es $\begin{cases} \text{positiva en } (1,+\infty) \\ \text{negativa en } (-\infty,0)\cup(0,1) \end{cases}$

Puntos de discontinuidad:
Es continua en todo su dominio.

Asíntotas:

- Asíntotas verticales

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^2}{x-1} = \left[\frac{1}{0}\right] = \infty \text{ con } \begin{cases} \lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty \end{cases}$$

Por tanto, la recta $x = 1$ es una asíntota vertical.

- Asíntotas horizontales

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x-1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2}}{\frac{x-1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{x}{x^2} - \frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} = \infty$$

Es decir, esta función no tiene asíntotas horizontales.

- Asíntotas oblicuas

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2}{x-1}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x(x-1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x-1} = 1 \Rightarrow m = 1$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(f(x) - x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x-1} - x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2 - x(x-1)}{x-1}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - x^2 + x}{x-1} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x-1} = 1 \Rightarrow n = 1$$

Así, la recta $y = x + 1$ es una asíntota oblicua.

Monotonía (crecimiento, decrecimiento y extremos):

$$f'(x) = \frac{2x(x-1) - x^2\cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \end{cases}$$

signo de f'	$+$	0	$-$	1	$-$	2	$+$

$y = f(x)\begin{cases} \text{creciente en } (-\infty,0)\cup(2,+\infty) \\ \text{decreciente en } (0,1)\cup(1,2) \end{cases}$

En $x = 0$ y $x = 2$ tiene posibles extremos (máximo o mínimo), luego hay que calcular la derivada segunda:

$$f''(x) = \frac{(2x-2)(x-1)^2 - (x^2-2x)2(x-1)\cdot 1}{(x-1)^3} = \frac{(2x-2)(x-1) - 2(x^2-2x)}{(x-1)^3} =$$

$$= \frac{2x^2 - 2x - 2x + 2 - 2x^2 + 4x}{(x-1)^3} = \frac{2}{(x-1)^3}$$

$f''(0) < 0 \Rightarrow x = 0$ es un máximo $\rightarrow (0, 0)$

$f''(0) > 0 \Rightarrow x = 2$ es un mínimo $\rightarrow \left(2, \dfrac{4}{3}\right)$

Curvatura (concavidad, convexidad y puntos de inflexión):

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{2}{(x-1)^3} = 0$ Absurdo

signo de f'' $\quad$ $-$ | $+$ (en 1)

$$y = f(x) \begin{cases} \text{convexa en } (1, +\infty) \\ \text{cóncava en } (-\infty, 1) \end{cases}$$

Esta función no tiene puntos de inflexión.

Gráfica: