Álgebra

1. Factorización de polinomios

a) $P(x) = x^5 + x^4 - 16x - 16$

$Div(16) = \{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 16\}$

	1	1	0	0	−16	−16
−1		−1	0	0	0	16
	1	0	0	0	−16	0
−2		−2	4	−8	16	
	1	−2	4	−8	0	
2		2	0	8		
	1	0	4	0		

$$P(x) = x^5 + x^4 - 16x - 16 = (x+1)(x+2)(x-2)(x^2+4)$$

b) $Q(x) = x^6 - x^2 = x^2(x^4 - 1)$

$Div(-1) = \{\pm 1\}$

	1	0	0	0	−1
−1		−1	1	−1	1
	1	−1	1	−1	0
1		1	0	1	
	1	0	1	0	

$$Q(x) = x^6 - x^2 = x^2(x^4 - 1) = x^2(x+1)(x-1)(x^2+1)$$

2. Fracciones algebraicas

a) $$\frac{\dfrac{x}{1-\dfrac{1-x}{1+x}}}{\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x}}}}$$

Numerador:

$$1-\frac{1-x}{1+x}=\frac{1+x-(1-x)}{1+x}=\frac{1+x-1+x}{1+x}=\frac{2x}{1+x}$$

$$\frac{x}{\dfrac{2x}{1+x}}=\frac{(1+x)x}{2x}=\frac{1+x}{2}$$

Denominador:

$$1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$$

$$1-\frac{1}{1-\dfrac{1}{x}}=1-\frac{x}{x-1}=\frac{x-1-x}{x-1}=\frac{-1}{x-1}$$

$$\frac{1}{1-\dfrac{1}{x}}=\frac{1}{\dfrac{x-1}{x}}=\frac{x}{x-1}$$

$$\frac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x}}}=\frac{1}{\dfrac{-1}{x-1}}=-(x-1)=-x+1$$

Expresión:

$$\frac{\dfrac{x}{1-\dfrac{1-x}{1+x}}}{\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x}}}}=\frac{\dfrac{1+x}{2}}{-x+1}=\frac{1+x}{2(-x+1)}=\frac{1+x}{-2x+2}$$

b) $$\frac{\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right):\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)}{\left(\dfrac{1+x}{1-x}-1\right)\cdot\left(1-\dfrac{1}{1+x}\right)}$$

Numerador:

$$\left(\frac{1+x}{1-x}\right):\left(\frac{1-x}{1+x}\right)=\frac{(1+x)^2}{(1-x)^2}$$

Denominador:

$$\frac{1+x}{1-x}-1=\frac{1+x-(1-x)}{1-x}=\frac{1+x-1+x}{1-x}=\frac{2x}{1-x}$$

$$1-\frac{1}{x+1}=\frac{x+1-1}{x+1}=\frac{x}{x+1}$$

$$\left(\frac{1+x}{1-x}-1\right)\cdot\left(1-\frac{1}{1+x}\right)=\frac{2x}{1-x}\cdot\frac{x}{x+1}=\frac{2x^2}{(1-x)(x+1)}$$

Expresión:

$$\frac{\left(\frac{1+x}{1-x}\right):\left(\frac{1-x}{1+x}\right)}{\left(\frac{1+x}{1-x}-1\right)\cdot\left(1-\frac{1}{1+x}\right)}=\frac{\frac{(1+x)^2}{(1-x)^2}}{\frac{2x^2}{(1-x)(x+1)}}=\frac{(1+x)^2\,\cancel{(1-x)}\,(x+1)}{(1-x)^{\cancel{2}}\cdot 2x^2}=\frac{(1+x)^3}{(1-x)\cdot 2x^2}=\frac{x^3+3x^2+3x+1}{-2x^3+2x^2}$$

3. Ecuación de primer grado

$$6\left(\frac{x+1}{8}-\frac{2x-3}{16}\right)=3\left(\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}\right)-\frac{3}{8}(3x-2)$$

$$\frac{6\cdot(x+1)}{8}-\frac{6\cdot(2x-3)}{16}=\frac{3\cdot 3}{4}x-\frac{3}{4}-\frac{3\cdot 3x}{8}+\frac{3\cdot 2}{8}$$

$$\frac{6x+6}{8}-\frac{12x-18}{16}=\frac{9x}{4}-\frac{3}{4}-\frac{9x}{8}+\frac{6}{8}$$

$$\frac{2(6x+6)}{16}-\frac{12x-18}{16}=\frac{4\cdot 9x}{16}-\frac{4\cdot 3}{16}-\frac{2\cdot 9x}{16}+\frac{2\cdot 6}{16}$$

$$2\cdot(6x+6)-(12x-18)=36x-12-18x+12$$

$$12x+12-12x+18=36x-12-18x+12$$

$$12x-12x-36x+18x=-12+12-12-18$$

$$-18x=-30$$

$$x=\frac{-30}{-18}=\frac{5}{3}$$

4. Ecuación de segundo grado

$$\frac{(2x-1)(2x+1)}{3}+\frac{(x-2)^2}{4}=\frac{3x+4}{6}+\frac{x^2}{3}$$

$$\frac{4(2x-1)(2x+1)}{12}+\frac{3(x-2)^2}{12}=\frac{2(3x+4)}{12}+\frac{4x^2}{12}$$

$$4(2x-1)(2x+1)+3(x-2)^2=2(3x+4)+4x^2$$

$$16x^2-4+3x^2-12x+12-6x-8-4x^2=0$$

$$15x^2-18x=0\rightarrow 3x(5x-6)=0\rightarrow\begin{cases}3x=0\rightarrow x=0\\ 5x-6=0\rightarrow x=\frac{6}{5}\end{cases}$$

5. Ecuaciones bicuadradas

a) $x^4-13x^2+36=0$

$y=x^2$

$y^2-13y+36=0$

$$y=\frac{13\pm\sqrt{(-13)^2-4\cdot 1\cdot 36}}{2\cdot 1}=\frac{13\pm 5}{2}=\begin{cases}\frac{18}{9}=2\\ \frac{8}{2}=4\end{cases}$$

$$x^2=9\rightarrow x=\pm\sqrt{9}=\pm 3$$

$$x^2=4\rightarrow x=\pm\sqrt{4}=\pm 2$$

b) $x^4+x^2+1=0$

$$y=x^2$$

$$y^2+y+1=0$$

$$y=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot 1\cdot 1}}{2\cdot 1}=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{3}\cdot i}{2}$$ es decir, no tiene soluciones reales

¿Nos atrevemos con las complejas? Venga:

$$x^2=\frac{-1\pm\sqrt{3}\cdot i}{2}\rightarrow x=\sqrt{\frac{-1\pm\sqrt{3}\cdot i}{2}}$$

$$z_1=\frac{-1+\sqrt{3}\cdot i}{2}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$|z_1|=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=1$$

$$\alpha_1=180^o+\operatorname{arctg}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}}=180^o-60^o=120^o$$

$$z_1=1_{120^o}$$

$$\sqrt{1_{120^o}}=\begin{cases}1_{\frac{120^o+0\cdot 360^o}{2}}=1_{60^o}\\ 1_{\frac{120^o+1\cdot 360^o}{2}}=1_{240^o}\end{cases}$$

$$z_2=\frac{-1-\sqrt{3}\cdot i}{2}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$|z_2|=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=1$$

$$\alpha_2=180^o+\operatorname{arctg}\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}}=180^o+60^o=240^o$$

$$z_2=1_{240^o}$$

$$\sqrt{1_{240^o}}=\begin{cases}1_{\frac{240^o+0\cdot 360^o}{2}}=1_{120^o}\\ 1_{\frac{240^o+1\cdot 360^o}{2}}=1_{300^o}\end{cases}$$

Las cuatro soluciones de la ecuación son: 1_{60^o}, 1_{120^o}, 1_{240^o} y 1_{300^o}.

c) $16x^4 - 73x^2 + 36 = 0$

$y = x^2$

$16y^2 - 73y + 36 = 0$

$$y = \frac{73 \pm \sqrt{(-73)^2 - 4 \cdot 16 \cdot 36}}{2 \cdot 16} = \frac{73 \pm 55}{32} = \begin{cases} 4 \\ \dfrac{9}{16} \end{cases}$$

$x^2 = 4 \rightarrow x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$

$x^2 = \dfrac{9}{16} \rightarrow x = \pm\sqrt{\dfrac{9}{16}} = \pm\dfrac{3}{4}$

6. Ecuaciones bicúbicas

a) $x^6 - 7x^3 + 6 = 0$

$y = x^3$

$y^2 - 7y + 6 = 0$

$$y = \frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \frac{7 \pm 5}{2} = \begin{cases} \dfrac{12}{2} = 6 \\ \dfrac{2}{2} = 2 \end{cases}$$

$x^3 = 6 \rightarrow x = \sqrt[3]{6}$

$x^3 = 1 \rightarrow x = \sqrt[3]{1} = 1$

En realidad tiene seis raíces. Las otras cuatro son complejas. Te animo a que las calcules.

b) $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$

$y = x^3$

$y^2 - 9y + 8 = 0$

$$y = \frac{9 \pm \sqrt{(-9)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8}}{2 \cdot 1} = \frac{9 \pm 7}{2} = \begin{cases} 8 \\ 1 \end{cases}$$

$x^3 = 8 \rightarrow x = \sqrt[3]{8} = 2$

$x^3 = 1 \rightarrow x = \sqrt[3]{1} = 1$

En realidad tiene seis raíces. Las otras cuatro son complejas. Te animo a que las calcules.

7. Ecuaciones de grado superior: factorización

a) $x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 4 = 0$ (No es bicuadrada)

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & 1 & -3 & -4 & -4 \\
-2 & & -2 & 2 & 2 & 4 \\
\hline
 & 1 & -1 & -1 & -2 & \boxed{0} \\
2 & & 2 & 2 & 2 & \\
\hline
 & 1 & 2 & 1 & \boxed{0} &
\end{array}
$$

$$x^4+x^3-3x^2-4x-4=(x+2)(x-2)\left(x^2+2x+1\right)$$

$$(x+2)(x-2)\left(x^2+2x+1\right)=0\rightarrow\begin{cases}x+2=0\rightarrow x=-2\\ x-2=0\rightarrow x=2\\ x^2+2x+1=0\rightarrow x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}\cdot i}{2}\end{cases}$$

b) $x^4-3x^3-13x^2+9x+30=0$

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & -3 & -13 & 9 & 30 \\
-2 & & -2 & 10 & 6 & -30 \\
\hline
 & 1 & -5 & -3 & 15 & \boxed{0} \\
5 & & 5 & 0 & -15 & \\
\hline
 & 1 & 0 & -3 & \boxed{0} &
\end{array}
$$

$$x^4-3x^3-13x^2+9x+30=(x+2)(x-5)\left(x^2-3\right)=0$$

$$(x+2)(x-5)\left(x^2-3\right)=0\rightarrow\begin{cases}x+2=0\rightarrow x=-2\\ x-5=0\rightarrow x=5\\ x^2-3=0\rightarrow x=\pm\sqrt{3}\end{cases}$$

8. Ecuaciones radicales

a) $\sqrt{3x}+\sqrt{5x+1}=7$

$\sqrt{3x}=7-\sqrt{5x+1}$

$\left(\sqrt{3x}\right)^2=\left(7-\sqrt{5x+1}\right)^2$

$$3x = 49 - 14\sqrt{5x+1} + 5x + 1$$
$$14\sqrt{5x+1} = 50 + 2x$$
$$\left(14\sqrt{5x+1}\right)^2 = (50+2x)^2$$
$$196(5x+1) = 2500 + 200x + 4x^2$$
$$980x + 196 - 2500 - 200x - 4x^2 = 0$$
$$-4x^2 + 700x - 2304 = 0$$
$$x = \begin{cases} 3 \\ 192 \end{cases}$$

Comprobamos si los valores obtenidos son solución:

$x = 3 \rightarrow \sqrt{3\cdot 3} + \sqrt{5\cdot 3+1} = 7 \rightarrow 7 = 7 \rightarrow x = 3$ es solución

$x = 192 \rightarrow \sqrt{3\cdot 192} + \sqrt{5\cdot 192+1} = 7 \rightarrow 55 = 7 \rightarrow x = 192$ no es solución

b) $\sqrt{3x-6} + \sqrt{2x+6} = \sqrt{9x+4}$
$$\left(\sqrt{3x-6} + \sqrt{2x+6}\right)^2 = \left(\sqrt{9x+4}\right)^2$$
$$3x - 6 + 2\sqrt{3x-6}\sqrt{2x+6} + 2x + 6 = 9x + 4$$
$$2\sqrt{3x-6}\sqrt{2x+6} = 9x + 4 - 3x + 6 - 2x - 6$$
$$2\sqrt{(3x-6)(2x+6)} = 4x + 4$$
$$\left(2\sqrt{(3x-6)(2x+6)}\right)^2 = (4x+4)^2$$
$$4(3x-6)(2x+6) = 16x^2 + 32x + 16$$
$$4\left(6x^2 + 6x - 36\right) = 16x^2 + 32x + 16$$
$$24x^2 + 24x - 144 - 16x^2 - 32x - 16 = 0$$
$$8x^2 - 8x - 160 = 0$$
$$x = \begin{cases} 5 \\ -4 \end{cases}$$

Comprobamos si los valores obtenidos son solución:

$x = 5 \rightarrow \sqrt{3\cdot 5 - 6} + \sqrt{2\cdot 5 + 6} = \sqrt{9\cdot 5 + 4} \rightarrow 7 = 7 \rightarrow x = 5$ si es solución

$x = -4 \rightarrow \sqrt{3\cdot(-4) - 6} + \sqrt{2\cdot(-4) + 6} = \sqrt{9\cdot(-4) + 4} \rightarrow 4\sqrt{2}i = 4\sqrt{2}i \rightarrow x = -4$ si es solución

9. Ecuaciones con fracciones algebraicas

a) $\dfrac{x^2 - x - 2}{x^3 - 4x^2 + x + 6} = \dfrac{15}{x^2 + x}$

$$\left(x^2-x-2\right)\left(x^2+x\right)=15\left(x^3-4x^2+x+6\right)$$
$$x^4+x^3-x^3-x^2-2x^2-2x=15x^2-60x^2+15x+90$$
$$x^4-15x^3+57x^2-17x-90=0\rightarrow\left(\text{factorizando}\right)$$
$$(x+1)(x-2)(x-5)(x-9)=0\rightarrow$$
$$\rightarrow\begin{cases}x+1=0\rightarrow x=-1\\x-2=0\rightarrow x=2\\x-5=0\rightarrow x=5\\x-9=0\rightarrow x=9\end{cases}$$

Hay que comprobar si son solución:

$$x=-1\rightarrow\frac{0}{0}=\frac{15}{0}\ \text{Falsa}\rightarrow\text{No es solución}$$
$$x=2\rightarrow\frac{0}{0}=\frac{5}{2}\ \text{Falsa}\rightarrow\text{No es solución}$$
$$x=5\rightarrow\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\rightarrow x=5\ \text{si es solución}$$
$$x=9\rightarrow\frac{1}{6}=\frac{1}{6}\rightarrow x=9\ \text{si es solución}$$

b) $\dfrac{2x-3}{x^2-4}+\dfrac{3x+1}{x+2}=\dfrac{13}{5(x-2)}$

$$\frac{5(2x-3)}{5(x+2)(x-2)}+\frac{5(x-2)(3x+1)}{5(x+2)(x-2)}=\frac{13(x+2)}{5(x+2)(x-2)}$$
$$5(2x-3)+5(x-2)(3x+1)=13(x+2)$$
$$10x-15+5\left(3x^2+x-6x-2\right)=13x+26$$
$$15x^2-28x-51=0$$
$$x=\begin{cases}-17/15\\3\end{cases}$$

Comprobamos si los valores obtenidos son solución:

$$x=-\frac{17}{15}\rightarrow-\frac{39}{47}=-\frac{39}{47}\rightarrow x=-\frac{17}{15}\ \text{si es solución}$$
$$x=3\rightarrow\frac{13}{5}=\frac{13}{5}\rightarrow x=3\ \text{si es solución}$$

10. Ecuaciones exponenciales

a) $4^{1-3x}=2^{x-2}$

$$\left(2^2\right)^{1-3x}=2^{x-2}$$
$$2^{2(1-3x)}=2^{x-2}$$
$$2(1-3x)=x-2$$
$$2-6x=x-2$$
$$-6x-x=-2-2$$
$$-7x=-4$$

$$x=\frac{-4}{-7}=\frac{4}{7}$$

b) $3\cdot 4^{3x}=768$

$$4^{3x}=\frac{768}{3}$$

$$4^{3x}=256$$

$$\left(2^2\right)^{3x}=2^8$$

$$2^{6x}=2^8$$

$$6x=8$$

$$x=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$$

c) $9^x-8\cdot 3^x-5913=0$

$$\left(3^2\right)^x-8\cdot 3^x-5913=0$$

$$\left(3^x\right)^2-8\cdot 3^x-5913=0$$

$$y^2-8y-5913=0$$

$$y=\frac{8\pm\sqrt{8^2-4\cdot 1\cdot(-5913)}}{2\cdot 1}=\begin{cases}\dfrac{8+154}{2}=81\\[2mm] \dfrac{8-154}{2}=-73\end{cases}$$

$$3^x=\begin{cases}81\rightarrow 3^x=3^4\rightarrow x=3\\ -73\rightarrow \text{No tiene solución}\end{cases}$$

11. Ecuaciones logarítmicas

a) $\log 2+\log\left(11-x^2\right)=2\log(5-x)$

$$\log\left[2\cdot\left(11-x^2\right)\right]=\log(5-x)^2$$

$$2\cdot\left(11-x^2\right)=(5-x)^2$$

$$3x^2-10x+3=0\rightarrow x=\begin{cases}3\\ 1/3\end{cases}$$

$$11-3^2>0\ \text{ y }\ 5-3>0$$

$$11-\left(\frac{1}{3}\right)^2>0\ \text{ y }\ 5-\frac{1}{3}>0$$

$$11-3^2>0\ \text{ y }\ 5-3>0$$

$$11-\left(\frac{1}{3}\right)^2>0\ \text{ y }\ 5-\frac{1}{3}>0$$

$$x=3\ \text{ y }\ x=\frac{1}{3}$$

$¿\log\left[2\cdot\left(11-3^2\right)\right]=\log\left(5-3\right)^2?$

$\log 4=\log 4 \;\rightarrow\; x=3$ si es solución de la ec. logarítmica

$¿\log\left[2\cdot\left(11-\left(\frac{1}{3}\right)^2\right)\right]=\log\left(5-\frac{1}{3}\right)^2?$

$\log\frac{196}{9}=\log\frac{196}{9} \;\rightarrow\; x=\frac{1}{3}$ si es solución de la ec. logarítmica

b) $\log(3x+1)-\log(2x-3)=1-\log 5$

$\log\frac{3x+1}{2x-3}=\log 10-\log 5$

$\log\frac{3x+1}{2x-3}=\log\frac{10}{5}$

$\frac{3x+1}{2x-3}=2$

$3x+1=2(2x-3)$

$3x+1-4x+6=0$

$-x=-7\rightarrow x=7$

Comprobación:

$\log(3\cdot 7+1)-\log(2\cdot 7-3)=1-\log 5$

$\log 22-\log 11=1-\log 5$ que es cierta

Por tanto, la solución de la ecuación es $x=7$

c) $\frac{10^{\log x}}{1+10^{2\cdot\log x}}=\frac{1}{2}$

$\frac{10^{\log x}}{1+\left(10^{\log x}\right)^2}=\frac{1}{2}\xrightarrow{y=\log x}1\frac{y}{1+y^2}=\frac{1}{2}\rightarrow y=\frac{1}{2}\left(1+y^2\right)\rightarrow\frac{1}{2}y^2-y+\frac{1}{2}=0\rightarrow$

$\xrightarrow{\cdot 2}y^2-2y+1=0\rightarrow y=\frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot 1\cdot 1}}{2\cdot 1}=\frac{2}{2}=1$

$y=10^{\log x}\rightarrow 1=10^{\log x}\rightarrow 10^0=10^{\log x}\rightarrow 0=\log x\rightarrow$ La ec. no tiene solución

d) $2\log x=3+\log\frac{x}{10}\rightarrow\log x^2=\log 1000+\log\frac{x}{10}\rightarrow\log x^2=\log\left(1000\cdot\frac{x}{10}\right)\rightarrow x^2=100x\rightarrow$

$\rightarrow x^2-100x=0\rightarrow x(x-100)=0\rightarrow x=\begin{cases}0\\100\end{cases}$

Comprobaciones:

$x=0$ no es solución, porque $\nexists\log 0$

$x=100\rightarrow 2\log 100=3+\log\frac{100}{10}\rightarrow 4=4\rightarrow x=100$ es solución de la ecuación

e) $\frac{\log 2+\log\left(11-x^2\right)}{\log(5-x)}=2$

$$\log\left[2\left(11-x^2\right)\right]=2\log(5-x)\rightarrow\log\left(22-2x^2\right)=\log(5-x)^2\rightarrow 22-2x^2=(5-x)^2\rightarrow$$

$$22-2x^2=25-10x+x^2\rightarrow 3x^2-10x+3=0\rightarrow x=\begin{cases}3\\ \dfrac{1}{3}\end{cases}$$

Comprobaciones:

$$x=3\rightarrow\frac{\log 2+\log(11-9)}{\log(5-3)}=2\rightarrow\frac{2\cancel{\log 2}}{\cancel{\log 2}}=2\rightarrow 2=2\rightarrow x=3 \text{ es solución}$$

$$x=\frac{1}{3}\rightarrow\frac{\log 2+\log\left(11-\frac{1}{9}\right)}{\log\left(5-\frac{1}{3}\right)}=2 \text{ es cierta } \rightarrow x=\frac{1}{3} \text{ es solución de la ecuación}$$

12. Inecuaciones de primer grado con una incógnita

a) $\dfrac{1}{2}\left(8+\dfrac{5x}{3}\right)-\dfrac{4}{3}\left(\dfrac{1-x}{2}\right)\le\dfrac{6x}{3}$

$4+\dfrac{5x}{6}-\dfrac{4-4x}{6}\le\dfrac{6x}{3}$

$\dfrac{24}{6}+\dfrac{5x}{6}-\dfrac{4-4x}{6}\le\dfrac{12x}{6}$

$24+5x-4+4x\le 12x$

$5x+4x-12x\le -24+4$

$-3x\le -20$

$x\ge\dfrac{-20}{-3}=\dfrac{20}{3}$

b) $-\dfrac{1}{2}\left(4-\dfrac{6x}{3}\right)+\dfrac{5x}{3}>-\dfrac{5}{3}\left(\dfrac{2+x}{2}\right)$

$-2+\dfrac{6x}{6}+\dfrac{5x}{6}>\dfrac{-10-5x}{6}$

$\dfrac{-12}{6}+\dfrac{6x}{6}+\dfrac{5x}{6}>\dfrac{10-5x}{6}$

$12+6x+5x>-10-5x$

$6x+5x+5x>-10+12$

$21x>2$

$x>\dfrac{2}{21}$

13. Inecuaciones de segundo grado con una incógnita

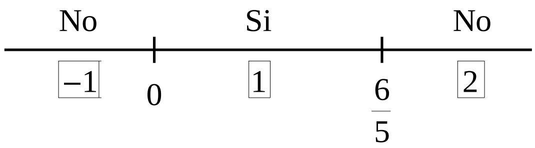
a) $\dfrac{(2x-1)(2x+1)}{3}+\dfrac{(x-2)^2}{4}\le\dfrac{3x+4}{6}+\dfrac{x^2}{3}$

$\dfrac{4x^2-1}{3}+\dfrac{x^2+4-4x}{4}=\dfrac{3x+4}{6}+\dfrac{x^2}{3}$

$$\frac{4\cdot(4x^2-1)}{12}+\frac{3\cdot(x^2+4-4x)}{12}=\frac{2\cdot(3x+4)}{12}+\frac{4x^2}{12}$$

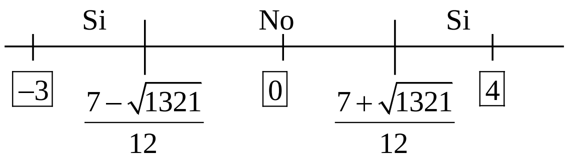
$$4\cdot(4x^2-1)+3\cdot(x^2+4-4x)=2\cdot(3x+4)+4x^2$$
$$16x^2-4+3x^2+12-12x=6x+8+4x^2$$
$$16x^2-4+3x^2+12-12x-6x-8-4x^2=0$$
$$15x^2-18x=0$$
$$x=\frac{-(-18)\pm\sqrt{(-18)^2-4\cdot 15\cdot 0}}{2\cdot 15}=\frac{18\pm 18}{30}=\begin{cases}6/5\\0\end{cases}$$

$$15(-1)^2-18\cdot(-1)\le 0\rightarrow 33\le 0 \text{ Falsa}$$
$$15\cdot 1^2-18\cdot 1\le 0\rightarrow -3\le 0 \text{ Verdadera}$$
$$15\cdot 2^2-18\cdot 2\le 0\rightarrow 24\le 0 \text{ Falsa}$$



Las soluciones son: $x\in\left[0,\frac{6}{5}\right]$

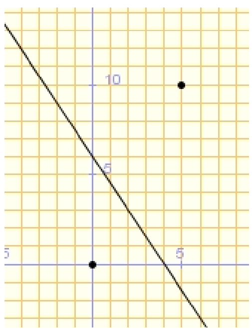
b) $$\frac{3(x+1)}{2}-\frac{2(x-1)}{3}\le\frac{(x+1)(x+2)}{5}$$
$$\frac{15\cdot 3(x+1)}{30}-\frac{10\cdot 2(x-1)}{30}\le\frac{6(x+1)(x+2)}{30}$$
$$45(x+1)-20(x-1)\le 6(x+1)(x+2)$$
$$45x+45-20x+20\le 6\left(x^2+3x+2\right)$$
$$45x+45-20x+20-6x^2-18x-12\le 0$$
$$-6x^2+x+33\le 0$$
$$-6x^2+x+33=0\rightarrow x=\frac{7\pm\sqrt{1321}}{12}\simeq\begin{cases}-2,45\\3,61\end{cases}$$



Soluciones:
$$x\in\left(-\infty,\frac{7-\sqrt{1321}}{12}\right]\cup\left[\frac{7+\sqrt{1321}}{12},+\infty\right)$$

14. Inecuación lineal con dos incógnitas

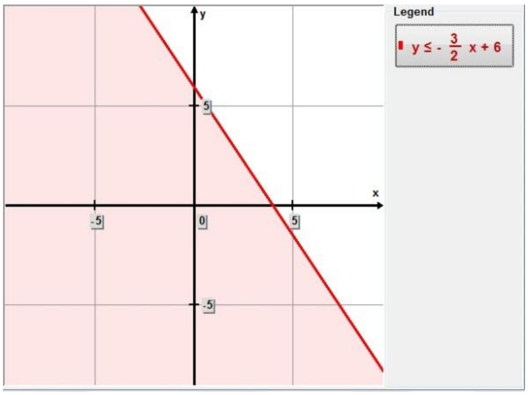
$$3x+2y\le 12$$
$$3x+2y=12$$



x	y
$\boxed{0}$	6
4	$\boxed{0}$

$(0,0)\rightarrow 3\cdot 0+2\cdot 0\le 12\rightarrow 0\le 12$ Verdadera
$(5,10)\rightarrow 3\cdot 5+2\cdot 10\le 12\rightarrow 35\le 12$ Falsa

Por tanto, el semiplano solución es el de abajo, es decir, el que incluye al punto $(0,0)$.



15. Sistemas de ecuaciones lineales: método de Gauss

a) $\begin{cases} x+2y-3z=3 \\ -3x-6y+9z=-9 \\ 2x+4y-6z=11 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 3 \\ -3 & -6 & 9 & -9 \\ 2 & 4 & -6 & 11 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2:3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 3 \\ -1 & -2 & 3 & -3 \\ 2 & 4 & -6 & 11 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3=-2F_1+F_3]{F_2=F_1+F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right)$$

El sistema es incompatible.

b) $\begin{cases} x+y-3z=8 \\ -2x+4y=2 \\ y+z=1 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 8 \\ -2 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2=2F_1+F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 8 \\ 0 & 6 & -6 & 18 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2\leftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & -6 & 18 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{F_3=-6F_2+F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -12 & 12 \end{array}\right) \longrightarrow (x,y,z)=(3,2,-1)$$

c) $\begin{cases} 3x+2y+z=1 \\ 5x+3y+3z=3 \\ x+y+z=0 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 3 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[-5F_1+F_3]{-3F_2+F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2:(-1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & -2 & 3 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow (x,y,z)=\left(\frac{3}{2},-2,\frac{1}{2}\right)$$

16. Sistemas de ecuaciones no lineales

a) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 8 & [1] \\ xy = -3 & [2] \end{cases}$

De [2] despejamos y: $y = \dfrac{-3}{x}$

Sustituimos en [1]: $x^2 - \left(\dfrac{-3}{x}\right)^2 = 8 \rightarrow x^2 - \dfrac{9}{x^2} = 8 \rightarrow x^4 - 9 = 8x^2 \rightarrow x^4 - 8x^2 - 9 = 0$

Resolvemos la ecuación bicuadrada:

$t = x^2$

$$t^2 - 8t - 9 = 0 \rightarrow t = \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4\cdot 1\cdot(-9)}}{2\cdot 1} = \frac{8 \pm 10}{2} = \begin{cases} 9 \\ -1 \end{cases}$$

$$x^2 = 9 \rightarrow x = \pm\sqrt{9} = \pm 3 \rightarrow y = \frac{-3}{\pm 3} = \mp 1 \rightarrow (x, y) = \begin{cases} (3, -1) \\ (-3, 1) \end{cases}$$

$$x^2 = -1 \rightarrow x = \pm i \rightarrow y = \pm 3i \rightarrow (x, y) = \begin{cases} (i, 3i) \\ (-i, -3i) \end{cases}$$

b) $\begin{cases} \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = 13 \\ \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{1}{x}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{y}\right)^2 = 13 \\ \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = 1 \end{cases}$

Hacemos el cambio de variable: $u = \dfrac{1}{x}$ y $v = \dfrac{1}{y}$

$\begin{cases} u^2 + v^2 = 13 & [1] \\ u - v = 1 & [2] \end{cases}$

De [2] despejamos u: $u = 1 + v$

Sustituimos en [1]: $(1+v)^2 + v^2 = 13 \rightarrow 1 + 2v + v^2 + v^2 = 13 \rightarrow 2v^2 + 2v - 12 = 0 \rightarrow v = \begin{cases} -3 \\ 2 \end{cases}$

Como $u = 1 + v = \begin{cases} 1 + (-3) = -2 \\ 1 + 2 = 3 \end{cases}$

Por tanto: $(u, v) = \begin{cases} (-2, -3) \\ (3, 2) \end{cases}$

Si $\begin{array}{l} (u,v) = (-2,-3) \rightarrow (x,y) = \left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{3}\right) \\ (u,v) = (3,2) \rightarrow (x,y) = \left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{2}\right) \end{array}$

17. Sistemas exponenciales

a) $\begin{cases} 2^x \cdot 2^y = 256 \\ x - y = 4 \end{cases}$

$2^x \cdot 2^y = 2^8 \rightarrow 2^{x+y} = 2^8 \rightarrow x + y = 8$

$$\begin{cases} x+y=8 \\ x-y=4 \end{cases} \to (x,y)=(6,2)$$

b) $$\begin{cases} 2^x+5^y=9 \\ \dfrac{1}{2}\cdot 2^x+5\cdot 5^y=9 \end{cases}$$

Hacemos el cambio de variable: $\begin{matrix} u=2^x \\ v=5^x \end{matrix}$

$$\begin{cases} u+v=9 \xrightarrow{\text{despejamos}} u=9-v \\ \dfrac{1}{2}u+5v=9 \end{cases} \quad \searrow \frac{1}{2}(9-v)+5v=9$$

$$(u,v)=(8,1)$$

$$\left.\begin{matrix} 2^x=8\to x=3 \\ 5^y=1\to y=0 \end{matrix}\right\} \to (x,y)=(3,0)$$

c) $$\begin{cases} 5\cdot 2^{x+y}=80 \\ 9^x=3^{y-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5\cdot 2^{x+y}=80 \\ 9^x=3^{y-1} \end{cases} \to \begin{cases} 2^{x+y}=\dfrac{80}{5} \\ \left(3^2\right)^x=3^{y-1} \end{cases} \to \begin{cases} 2^{x+y}=2^4 \\ 3^{2x}=3^{y-1} \end{cases} \to \begin{cases} x+y=4 \\ 2x=y-1 \end{cases} \to (x,y)=(1,3)$$

d) $$\begin{cases} 2^{x+1}+3^y=35 \\ 5\cdot 2^x-2\cdot 3^y=-34 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2^{x+1}+3^y=35 \\ 5\cdot 2^x-2\cdot 3^y=-34 \end{cases} \to \begin{cases} 2\cdot 2^x+3^y=35 \\ 5\cdot 2^x-2\cdot 3^y=-34 \end{cases} \to \begin{bmatrix} u=2^x \\ v=3^y \end{bmatrix} \to \begin{cases} 2u+v=35 \\ 5u-2v=-34 \end{cases} \to (u,v)=(4,27)$$

Si $\begin{cases} u=4=2^x\to x=2 \\ v=27=3^y\to y=3 \end{cases} \to (x,y)=(2,3)$

e) $$\begin{cases} 2^x+2^y=24 \\ 2^{x+y}=128 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2^x+2^y=24 \\ 2^{x+y}=128 \end{cases} \to \begin{cases} 2^x+2^y=24 \\ 2^x\cdot 2^y=128 \end{cases} \to \begin{bmatrix} u=2^x \\ v=2^y \end{bmatrix} \to \begin{cases} u+v=24 \\ u\cdot v=128 \end{cases} \to (u,v)=\begin{cases} (8,16) \\ (16,8) \end{cases}$$

Si $\begin{cases} u=8\to 8=2^x\to x=3 \\ v=16\to 16=2^y\to y=4 \end{cases} \to (x,y)=(3,4)$

Si $\begin{cases} u=16\to 16=2^x\to x=4 \\ v=8\to 8=2^y\to y=3 \end{cases} \to (x,y)=(4,3)$

f) $\begin{cases} 5^x = 5^y \cdot 625 \\ 2^x \cdot 2^y = 256 \end{cases}$

$$\begin{cases} 5^x = 5^y \cdot 625 \\ 2^x \cdot 2^y = 256 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 5^x = 5^y \cdot 5^4 \\ 2^{x+y} = 2^8 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 5^x = 5^{y+4} \\ 2^{x+y} = 2^8 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = y+4 \\ x+y=8 \end{cases} \rightarrow (x,y)=(6,2)$$

18. Sistemas logarítmicos

a) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 11 \\ \log x - \log y = 1 \end{cases}$

$$\log \frac{x}{y} = 1 = \log 10 \rightarrow \frac{x}{y} = 10 \rightarrow x = 10y$$

$$(10y)^2 - y^2 = 11$$

$$99y^2 = 11 \rightarrow y = \pm\sqrt{\frac{11}{99}} = \pm\sqrt{\frac{1}{9}} = \pm\frac{1}{\sqrt{9}} = \pm\frac{1}{3}$$

$$x = \pm 10 \cdot \frac{1}{3} = \pm\frac{10}{3}$$

$$(x,y) = \left(\frac{10}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

Comprobación:

$$¿\left(\frac{10}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 11?$$

$\frac{100}{9} - \frac{1}{9} = \frac{99}{9} = 11 \rightarrow (x,y) = \left(\frac{10}{3}, \frac{1}{3}\right)$ es la solución del sistema

b) $\begin{cases} \log x + \log y = 7 \\ \log x - \log y = 3 \end{cases}$

Sumando las dos ecuaciones obtenemos:

$$2\log x = 10 \rightarrow \log x = \frac{10}{2} \rightarrow \log x = 5 \rightarrow x = 10^5 = 100\ 000$$

Sustituimos en la primera ecuación:

$$5 + \log y = 7 \rightarrow \log y = 2 \rightarrow y = 10^2 = 100$$

Es inmediato comprobar que verifican las ecuaciones del sistema. Por tanto, la solución es $(x,y) = (10^5, 10^2)$

c) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ \log_2 2^x - \log_2 2^y = 1 \end{cases}$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ \log_2 2^x - \log_2 2^y = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x \cdot \log_2 2 - y \cdot \log_2 2 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x - y = 1 \end{cases} \rightarrow (x,y) = \begin{cases} (4,3) \\ (-3,-4) \end{cases}$$

Comprobaciones:

Si $(x,y)=(4,3)\rightarrow\begin{cases}4^2+3^2=25\\ \log_2 2^4-\log_2 2^3=1\end{cases}$ ciertas $\rightarrow (x,y)=(4,3)$ es solución

Si $(x,y)=(-3,-4)\rightarrow\begin{cases}(-3)^2+(-4)^2=25\\ \log_2 2^{-3}-\log_2 2^{-4}=1\end{cases}$ ciertas $\rightarrow (x,y)=(-3,-4)$ es solución

d) $\begin{cases}\log_x(y+8)=2\\ \log_y(x-4)=\dfrac{1}{2}\end{cases}$

$$\begin{cases}\log_x(y+8)=2\\ \log_y(x-4)=\dfrac{1}{2}\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x^2=y+8\\ y^{1/2}=x-4\end{cases}$$

Despejamos y de la primera ecuación: $y=x^2-8$

Sustituimos en la segunda:

$\sqrt{x^2-8}=x-4\rightarrow x^2-8=(x-4)^2\rightarrow x^2-8=x^2+16-8x\rightarrow -8-16=-8x\rightarrow x=3$

Como $y=x^2-8\rightarrow y=3^2-8=1$

Posible solución: $(x,y)=(3,1)$

Comprobación:

$(x,y)=(3,1)\rightarrow\begin{cases}\log_3 9=2 \text{ que es cierta}\\ \nexists\ \log_1(3-4)\end{cases}\rightarrow$ El sistema no tiene solución

e) $\begin{cases}\log_x(y-18)=2\\ \log_y(x+3)=\dfrac{1}{2}\end{cases}$

$$\begin{cases}\log_x(y-18)=2\\ \log_y(x+3)=\dfrac{1}{2}\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x^2=y-18\\ \sqrt{y}=x+3\end{cases}$$

Despejamos y de la primera ecuación: $y=x^2+18$

Sustituimos en la segunda ecuación:

$\sqrt{x^2+18}=x+3\rightarrow x^2+18=(x+3)^2\rightarrow x^2+18=x^2+9+6x\rightarrow 9=6x\rightarrow x=\dfrac{3}{2}$

Como $y=x^2+18\rightarrow y=\left(\dfrac{3}{2}\right)^2+18=\dfrac{81}{4}$

Posible solución: $(x,y)=\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{81}{4}\right)$

Comprobación:

$$(x,y)=\left(\frac{3}{2},\frac{81}{4}\right)\rightarrow\begin{cases}\log_{3/2}\left(\dfrac{81}{4}-18\right)=2\rightarrow\log_{3/2}\dfrac{9}{4}=2 \text{ cierta}\\ \log_{81/4}\left(\dfrac{3}{2}+3\right)=\dfrac{1}{2}\rightarrow\log_{81/4}\dfrac{9}{2}=\dfrac{1}{2} \text{ cierta}\end{cases}\rightarrow$$

$\rightarrow (x, y) = \left(\frac{3}{2}, \frac{81}{4} \right)$ es la solución del sistema

f) $\begin{cases} \log x - \log y = 3\log 5 \\ \log x^3 + \log y^2 = \log 16 \end{cases}$

$$\begin{cases} \log x - \log y = 3\log 5 \\ \log x^3 + \log y^2 = \log 16 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \log \frac{x}{y} = \log 5^3 \\ \log\left(x^3 \cdot y^2\right) = \log 16 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{x}{y} = 5^3 \\ x^3 y^2 = 16 \end{cases}$$

Despejamos x de la primera ecuación: $x = 125y$

Sustituimos en la segunda:

$$(125y)^3 y^2 = 16 \rightarrow 5^9 y^3 y^2 = 16 \rightarrow y^5 = \frac{16}{5^9} \rightarrow y = \sqrt[5]{\frac{16}{5^9}} = \frac{1}{5} \cdot \sqrt[5]{\frac{16}{625}}$$

Como $x = 125y \rightarrow x = 125 \cdot \frac{1}{5} \cdot \sqrt[5]{\frac{16}{625}} = 25 \cdot \sqrt[5]{\frac{16}{625}}$

Posible solución: $(x, y) = \left(25 \cdot \sqrt[5]{\frac{16}{625}} \ , \ \frac{1}{5} \cdot \sqrt[5]{\frac{16}{625}} \right)$

Comprobación:

Realizando las correspondientes operaciones con la calculadora se ve que $(x, y) = \left(25 \cdot \sqrt[5]{\frac{16}{625}} \ , \ \frac{1}{5} \cdot \sqrt[5]{\frac{16}{625}} \right)$ es la solución del sistema.

g) $\begin{cases} \log_{a^2} + \log_{a^2} y = \frac{3}{2} \\ \log_{b^2} x - \log_{b^2} y = 1 \end{cases}$

$$\begin{cases} \log_{a^2} x + \log_{a^2} y = \frac{3}{2} \\ \log_{b^2} x - \log_{b^2} y = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \log_{a^2}(xy) = \frac{3}{2} \\ \log_{b^2} \frac{x}{y} = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \left(a^2\right)^{3/2} = xy \\ \left(b^2\right)^1 = \frac{x}{y} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \sqrt{a^6} = xy \\ b^2 = \frac{x}{y} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a^3 = xy \\ b^2 = \frac{x}{y} \end{cases}$$

Despejamos x de la segunda ecuación: $x = b^2 y$

Sustituimos en la primera:

$a^3 = b^2 yy \rightarrow a^3 = b^2 y^2 \rightarrow y = \pm\sqrt{\frac{a^3}{b^2}} = \pm \frac{a}{b}\sqrt{a}$ (la solución negativa no vale porque $\nexists \log_{b^2}\left(-\frac{a}{b}\sqrt{a} \right)$)

Como $x = b^2 y \rightarrow x = b^2 \frac{a}{b}\sqrt{a} = ab\sqrt{a}$

Posible solución: $(x, y) = \left(ab\sqrt{a}, \frac{a}{b}\sqrt{a} \right)$

Comprobación:

$$xy = ab\sqrt{a} \cdot \frac{a}{b}\sqrt{a} = a^2 \cdot a = a^3$$

$$\frac{x}{y} = \frac{ab\sqrt{a}}{\frac{a}{b}\sqrt{a}} = b^2$$

$$\left\{\begin{array}{l}\log_{a^2} a^3 = \dfrac{3}{2} \to \left(a^2\right)^{3/2} = a^3 \to \sqrt{a^6} = a^3 \text{ que es cierta} \\ \log_{b^2} b^2 = 1 \text{ que es cierta}\end{array}\right. \to$$

$$\left(x, y\right) = \left(ab\sqrt{a}, \frac{a}{b}\sqrt{a}\right) \text{ es la solución del sistema}$$

h) $\left\{\begin{array}{l}\log_3 x + \log_3 y = 0 \\ x + y = 3\end{array}\right.$

$$\left\{\begin{array}{l}\log_3 x + \log_3 y = 0 \to \log_3 \left(xy\right) = \log_3 1 \\ x + y = 3\end{array}\right. \to \left\{\begin{array}{l}xy = 1 \\ x + y = 3\end{array}\right.$$

Despejamos y de la segunda ecuación: $y = 3 - x$

Sustituimos en la primera:

$$x\left(3 - x\right) = 1 \to 3x - x^2 = 1 \to x = \left\{\begin{array}{l}\dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \\ \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\end{array}\right. \to y = \left\{\begin{array}{l}\dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \\ \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\end{array}\right. \to \left(x, y\right) = \left\{\begin{array}{l}\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}, \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right) \\ \left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}, \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\end{array}\right.$$

Comprobaciones:

$$\left(x, y\right) = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) \to \left\{\begin{array}{l}0 = 0 \\ 3 = 3\end{array}\right. \to \text{ Si es solución}$$

$$\left(x, y\right) = \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) \to \left\{\begin{array}{l}0 = 0 \\ 3 = 3\end{array}\right. \to \text{ Si es solución}$$