Continuidad y discontinuidades

Matemáticas I

1. Se considera la función $f(x)$ definida por:

$$f(x)=\begin{cases} -x & \text{si } x<0 \\ 3x+b & \text{si } 0\le x<2 \\ ax^2 & \text{si } x\ge 2 \end{cases}$$

Calcula los valores de a y b para que $f(x)$ sea continua en todos los puntos.

2. Dada la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-25}{x-5} & \text{si} \quad x\ne 5 \\ 0 & \text{si} \quad x=5 \end{cases}$, estudiar su continuidad.

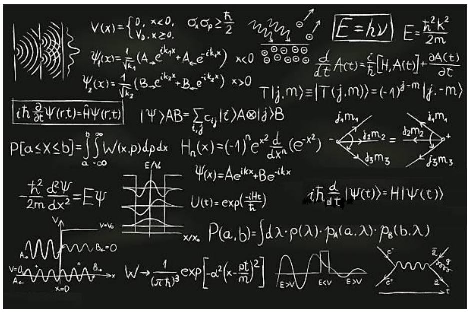
3. Calcula los valores de a y b para que $f(x)$ sea continua en todos los puntos:

$$f(x)=\begin{cases} x+a & \text{si} \quad x\le 0 \\ \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{3x} & \text{si} \quad 0<x<1 \\ bx & \text{si} \quad x\ge 1 \end{cases}$$

4. **[2,5 puntos]** Estudia las discontinuidades de la siguiente función:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x+2}{x-1} & \text{si} \quad x\le 2 \\ \dfrac{3x^2-2x}{x+2} & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$$

¡Indicación! Ojo con el dominio. En los puntos en los que la función no esté definida también hay discontinuidades.



SOLUCIONES

1. Se considera la función $f(x)$ definida por:

$$f(x)=\begin{cases}-x & \text{si } x<0\\ 3x+b & \text{si } 0\le x<2\\ ax^2 & \text{si } x\ge 2\end{cases}$$

Calcula los valores de a y b para que $f(x)$ sea continua en todos los puntos.

Cada una de las funciones componentes es continua en su dominio, por ser funciones polinómicas (que son continuas siempre). Estudiamos la continuidad en cero y en dos.

Continuidad en $x=0$: ¿$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$?

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 0} f(x)\left\{\begin{array}{l}\lim_{x\to 0-}(-x)=0\\ \lim_{x\to 0+}(3x+b)=b\end{array}\right\}\Rightarrow b=0 \text{ para que } \exists\lim_{x\to 0} f(x)=0\\ f(0)=3\cdot 0+b=b=0\end{array}\right\}\Rightarrow f \text{ es continua para } b=0$$

Continuidad en $x=2$: ¿$\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$?

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 2} f(x)\left\{\begin{array}{l}\lim_{x\to 2-}(3x+b)=6+b\\ \lim_{x\to 2+} ax^2=4a\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}6+b=4a\\ a=\dfrac{3}{2}\end{array}\right\} \text{ para que } \exists\lim_{x\to 2} f(x)=0\\ f(2)=\dfrac{3}{2}2^2=6\end{array}\right\}\Rightarrow f \text{ es continua en } x=2$$

Conclusión: $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$ para $(a,b)=\left(\frac{3}{2},0\right)$.

2. Dada la función $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-25}{x-5} & \text{si } x\ne 5\\ 0 & \text{si } x=5\end{cases}$, estudiar su continuidad.

Cada una de las funciones componentes es continua en su dominio, por ser funciones elementales (racional y constante).

Continuidad en $x=5$: ¿$\exists\lim_{x\to 5} f(x) = f(5)$?

$$\left.\begin{array}{r}\lim_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{x-5}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 5}\dfrac{(x+5)\cancel{(x-5)}}{\cancel{x-5}}=\lim_{x\to 5}(x+5)=10\\ f(5)=0\end{array}\right\}\Rightarrow f \text{ no es continua en } x=5$$

3. Calcula los valores de a y b para que $f(x)$ sea continua en todos los puntos:

$$f(x)=\begin{cases} x+a & \text{si} \quad x\le 0 \\ \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{3x} & \text{si} \quad 0<x<1 \\ bx & \text{si} \quad x\ge 1 \end{cases}$$

Cada una de las funciones componentes es continua en su dominio, por ser funciones elementales (polinómica, irracional (bien definida) y polinómica).

Continuidad en $x=0$: ¿$\exists \lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$?

$\lim\limits_{x\to 0-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0-}(x+a)=a$

$$\lim_{x\to 0+} f(x)=\lim_{x\to 0+}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{3x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0+}\frac{\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}{3x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0+}\frac{\left(\sqrt{1+x}\right)^2-\left(\sqrt{1-x}\right)^2}{3x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}=\lim_{x\to 0+}\frac{1+x-(1-x)}{3x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}=\lim_{x\to 0+}\frac{2\cancel{x}}{3\cancel{x}\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

De aquí deducimos que $a=\dfrac{1}{3}$

Continuidad en $x=1$: ¿$\exists \lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)$?

$$\lim_{x\to 1-} f(x)=\lim_{x\to 1-}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{3x}=\frac{\sqrt{2}}{3}$$

$\lim\limits_{x\to 1+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1+}(bx)=b$

De aquí, $b=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

Conclusión: $f(x)$ es continua para $\boxed{(a,b)=\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)}$

4. Estudia las discontinuidades de la siguiente función:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x+2}{x-1} & \text{si} \quad x\le 2 \\ \dfrac{3x^2-2x}{x+2} & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$$

Esta función tiene discontinuidades en $x=1$ (ya que en dicho punto no está definida) y hay que estudiar si es discontinua en $x=2$:

Discontinuidad en $x=1$:

Como $f(x)$ no está definida en $x=1$, estudiamos el límite:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{x-1}=\left[\frac{3}{0}\right]$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x+2}{x-1}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x+2}{x-1}=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \nexists\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+2}{x-1}\Rightarrow f(x)\text{ tiene una discontinuidad asintótica en } x=1$$

<u>Continuidad en $x=2$</u>: ¿$\exists\lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)$?

- $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x+2}{x-1}=4\\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{3x^2-2x}{x+2}=2\end{array}\right\}\Rightarrow f(x)\text{ tiene una discontinuidad de salto finito 2 en } x=2$$