Límites y Asíntotas

Matemáticas I

1. Calcula los siguientes límites, resolviendo las correspondientes indeterminaciones (aplicando las técnicas vistas en clase):

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{x^4-1}$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{5x^3}{5x^3-7}\right)^{2x}$

c) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{9-x^2}{2-\sqrt{x^2-5}}$

d) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x^2}{\sqrt{x^3+1}}$

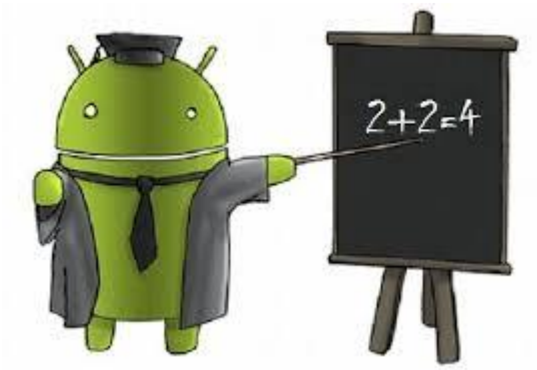
e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x+8}{x^4+2x^2}$

f) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left[\left(\sqrt{x^4+x}-x\right)\dfrac{1}{x}\right]$

2. Calcula, razonadamente, las asíntotas de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+1}$

b) $g(x)=\dfrac{x^2+1}{x-1}$



SOLUCIONES

1. Calcula los siguientes límites, resolviendo las correspondientes indeterminaciones (aplicando las técnicas vistas en clase):

a)

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^4-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}\left(x^2+x+1\right)}{\cancel{(x-1)}\left(x+1\right)\left(x^2+1\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(x^2+x+1\right)}{\left(x+1\right)\left(x^2+1\right)}=\frac{1^2+1+1}{(1+1)\left(1^2+1\right)}=\frac{3}{4}$$

$x^3-1=\left(x-1\right)\left(x^2+x+1\right)$ por Ruffini

$x^4-1=\left(x^2\right)^2-1^2=\left(x^2+1\right)\left(x^2-1\right)=\left(x^2+1\right)\left(x+1\right)\left(x-1\right)$ (aplicando las identidades notables)

b)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{5x^3}{5x^3-7}\right)^{2x}=\left[1^{\infty}\right]=e^{\alpha} \text{ donde}$$

$$\alpha=\lim_{x\to+\infty}2x\left(\frac{5x^3}{5x^3-7}-1\right)=\lim_{x\to+\infty}2x\left(\frac{5x^3-\left(5x^3-7\right)}{5x^3-7}\right)=\lim_{x\to+\infty}2x\cdot\frac{7}{5x^3-7}=\left[\infty\cdot 0\right]=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{14x}{5x^3-7}=0$$

Por tanto, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{5x^3}{5x^3-7}\right)^{2x}=e^0=1$

c)

$$\lim_{x\to 3}\frac{9-x^2}{2-\sqrt{x^2-5}}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 3}\frac{\left(9-x^2\right)\left(2+\sqrt{x^2-5}\right)}{\left(2-\sqrt{x^2-5}\right)\left(2+\sqrt{x^2-5}\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{\left(9-x^2\right)\left(2+\sqrt{x^2-5}\right)}{2^2-\left(\sqrt{x^2-5}\right)^2}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{\left(9-x^2\right)\left(2+\sqrt{x^2-5}\right)}{2^2-\left(x^2-5\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{\cancel{\left(9-x^2\right)}\left(2+\sqrt{x^2-5}\right)}{\cancel{9-x^2}}=2+\sqrt{3^2-5}=4$$

d)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{\sqrt{x^3+1}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x^2}{x^2}}{\frac{\sqrt{x^3+1}}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{\frac{x^3}{x^4}+\frac{1}{x^4}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^4}}}=\left[\frac{2}{0}\right]=+\infty$$

e)

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x+8}{x^4+2x^2}=+\infty$$

$$\text{Ya que}\ \begin{cases}\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{2x+8}{x^4+2x^2}=+\infty\\[2ex]\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{2x+8}{x^4+2x^2}=+\infty\end{cases}$$

f)

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\left(\sqrt{x^4+x}-x\right)\frac{1}{x}\right]=[\infty\cdot 0]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^4+x}-x}{x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\sqrt{x^4+x}-x}{x}}{\frac{x}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\frac{x^4}{x^2}+\frac{x}{x^2}}-\frac{x}{x}}{\frac{x}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+\frac{1}{x}}-1}{1}=+\infty$$

2. Solución:

a) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+1}$

Asíntotas verticales:

No tiene, ya que $x^2+1\neq 0\ \ \forall x\in\mathbb{R}$ y, por tanto, no hay ningún $a\in\mathbb{R}$ tal que $\lim_{x\to a} f(x)=\infty$.

Asíntotas horizontales:

$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\dfrac{x+1}{x^2+1}=0\Rightarrow y=0$ es una A.H.

Asíntotas oblicuas:

No tiene, ya que tiene A.H.

b) $g(x)=\dfrac{x^2+1}{x-1}$

Asíntotas verticales:

$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2+1}{x-1}=\infty\Rightarrow x=1$ es una A.V.

Asíntotas horizontales:

$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\dfrac{x^2+1}{x-1}=\infty\Rightarrow$ No tiene A.H.

Asíntotas oblicuas:

$$y=mx+n \text{ con } \begin{cases} m=\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}\\ n=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right)\end{cases}$$

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2+1}{x-1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x(x-1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x^2-x}=1 \text{ (por la regla IV)}$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x-1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x-1}-\frac{x(x-1)}{x-1}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x-1}-\frac{x^2-x}{x-1}\right)=$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\cancel{x^2}+1-\cancel{x^2}+x}{x-1}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1+x}{x-1}=1 \text{ (por la regla IV)}$$

Por tanto, la recta $y = x+1$ es una A.O. de $f(x)$.