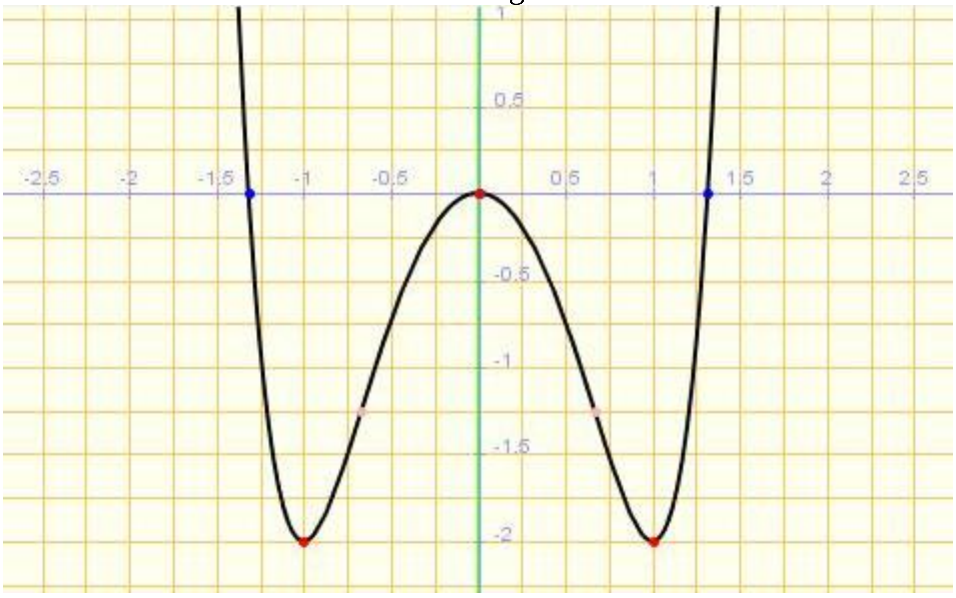
Funciones. Características y funciones elementales

Matemáticas I

1. Indica las características de la siguiente función.



Puntos azules: puntos de corte con los ejes

Puntos rojos: extremos relativos/absolutos

Puntos rosas: curvatura

Dominio:

Imagen o recorrido:

Monotonía:

- *Estrictamente creciente:*
- *Estrictamente decreciente:*
- *Máximos relativos:*
- *Mínimos relativos:*

Periodicidad:

Simetrías:

- *Par:*
- *Impar:*

Continuidad:

Acotación:

- *Acotada superiormente:*
- *Acotada inferiormente:*
- *Acotada:*
- *Cotas superiores:*
- *Cotas inferiores:*
- *Supremo:*
- *Ínfimo:*
- *Extremos absolutos:* $\begin{cases}\textit{Máximos absolutos:}\\ \textit{Mínimos absolutos:}\end{cases}$

Curvatura:

- *Cóncava (cóncava hacia abajo):*
- *Convexa (cóncava hacia arriba):*

Tendencias:

$x \to -1$

$x \to +\infty$

$x \to -\infty$

2. Determina el dominio de las siguientes funciones:

a) $g(x) = \sqrt{x^2 - 9}$

b) $h(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 + 11}}{(x-1)(x-3)}$

3. Dadas las funciones $f(x) = x^2+1$ y $g(x) = 2x-3$, calcula:

a) $g \circ f$ **b)** $f \circ g$

4. Calcula la inversa de las siguientes funciones (no hace falta hacer las comprobaciones):

a) $f(x) = 3x-1$ **b)** $g(x) = \dfrac{5x}{2x-1}$ **c)** $h(x) = \sqrt[3]{2x-3}$

5. El coste de producción de *x* unidades de un producto es igual a $\frac{1}{4}x^2 + 35x + 25$ euros y el precio de venta de x unidades es de $50x - \frac{x}{4}$ euros.

a) Escribe la función que nos da el beneficio total si se venden las *x* unidades producidas y represéntala (esbozo).

b) Halla el número de unidades que deben venderse para que el beneficio sea máximo. ¿Cuál es ese beneficio máximo?

6. El manual de usuario de un vehículo afirma que el ruido producido por el motor sigue aproximadamente la siguiente función:

$$r(t) = at^2 + 2{,}8t + 8$$

donde t es el número de años de antigüedad del vehículo; a es un **número fijo**, que se denomina coeficiente de atenuación, y $r(t)$ es el nivel de ruido, medido en decibelios (dB).

La semana pasada llevé mi vehículo a pasar la revisión de los cuatro años y en el informe figura que la medición fue de 27 decibelios.

a) ¿Cuál es el coeficiente de atenuación?
b) ¿Cuántos decibelios de ruido producirá a los ocho años?

7. Representa, razonadamente, las siguientes funciones:

a) Función afín que pasa por los puntos $A(-1,2)$ y $B(2,-3)$

b) $h(x) = \dfrac{2x+1}{x-3}$

c) $g(x) = -e^x$

d) $i(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-x}$

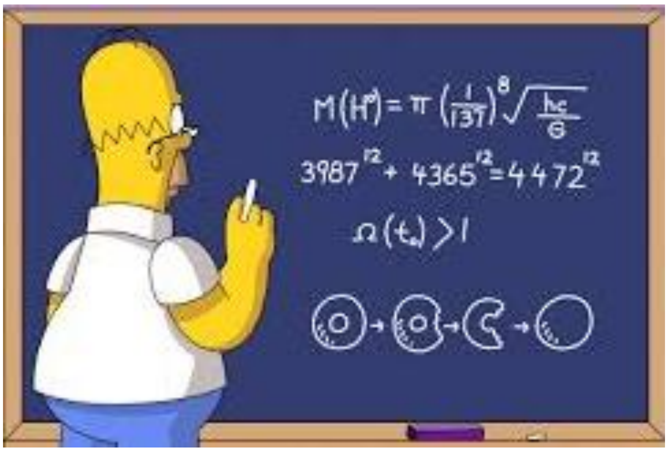
8. Representa, razonadamente, las siguientes funciones definidas a trozos:

a) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{2-x} & si \quad x\leq 1 \\ -x^2+4x-2 & si \quad x>1 \end{cases}$ b) $g(x)=\begin{cases} e^x & si \quad x\leq 0 \\ 1 & si \quad 0<x<3 \\ -x^2+3x+2 & si \quad x\geq 3 \end{cases}$

9. Expresa como una función definida a trozos la siguiente función valor absoluto, y después represéntala gráficamente. Justifica los pasos que vayas dando.

$$f(x)=\left|-x^2+4x\right|$$

10. Representa las funciones trigonométricas inversas (arcsen, arccos y arctg), indicando su dominio y su recorrido. Justifica lo que vayas haciendo.



11. El precio del billete de una línea de cercanías depende de los kilómetros recorridos. Por 57 km he pagado 2,85 euros y por 168 km, 13,4 euros. Calcula el precio de un billete para una distancia de 100 km. ¿Cuál es la función que nos indica el precio según los kilómetros recorridos?

12. Los gastos fijos mensuales de una empresa por la fabricación de x televisores son $G(x)=3000+25x$, en miles de euros, y los ingresos mensuales son $I(x)=50x-0,02x^2$, también en miles de euros. ¿Cuántos televisores deben fabricarse para que el beneficio (ingresos menos gastos) sea máximo? ¿Cuál es dicho beneficio?

13. Una pelota es lanzada verticalmente hacia arriba desde lo alto de un edificio. La altura que alcanza viene dada por la fórmula $h(t)=80+64t-16t^2$ (t en segundos y h en metros).

a) Dibuja la gráfica en el intervalo [0, 5].
b) Halla la altura del edificio.
c) ¿En qué instante alcanza su máxima altura?

14. El precio de venta de un artículo viene dado por la expresión $p=12-0,01x$ (x = número de artículos fabricados; p = precio, en cientos de euros).

a) Si se fabrican y se venden 500 artículos, ¿cuáles serán los ingresos obtenidos?
b) Representa la función número de artículos-ingresos.
c) ¿Cuántos artículos se deben fabricar para que los ingresos sean máximos?

15. Un fabricante vende mensualmente 100 electrodomésticos a 400 euros cada uno y sabe que por cada 10 euros de subida venderá 2 electrodomésticos menos.

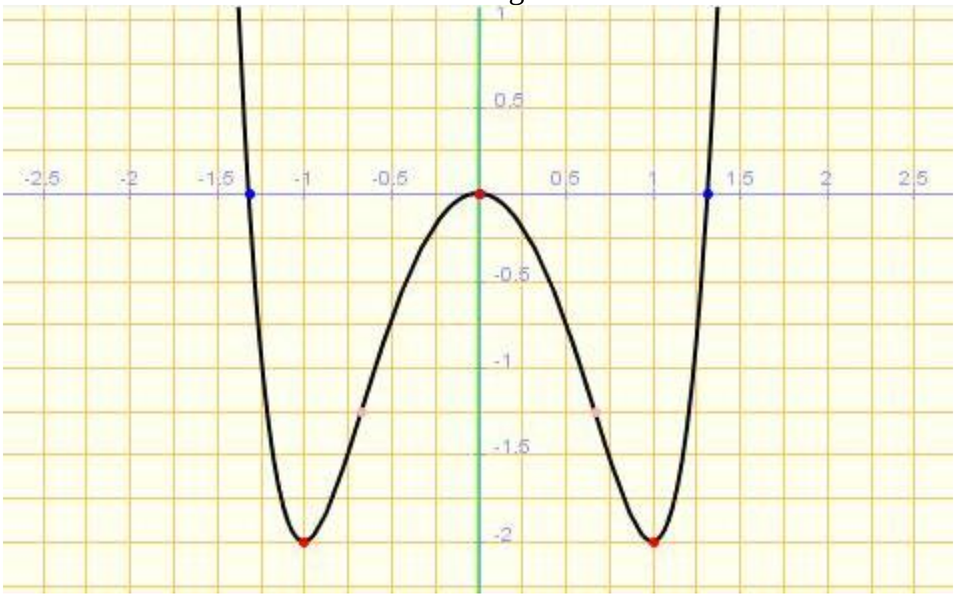
a) ¿Cuáles serán los ingresos si sube los precios 50 euros?

b) Escribe la función que relaciona la subida de precio con los ingresos mensuales.

c) ¿Cuál debe ser la subida para que los ingresos sean máximos?

SOLUCIONES

1. Indica las características de la siguiente función.



Puntos azules: puntos de corte con los ejes

Puntos rojos: extremos relativos/absolutos

Puntos rosas: curvatura

Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$

Imagen o recorrido: $\text{Img}(f) = \text{Rec}(f) = [-2, +\infty)$

Monotonía:

- *Estrictamente creciente:* $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$
- *Estrictamente decreciente:* $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$
- *Máximos relativos:* $(0, 0)$
- *Mínimos relativos:* $(-1, -2)$ y $(1, -2)$

Periodicidad: No

Simetrías: Par (simétrica respecto del eje OY)

Continuidad: Sí, en su dominio que es $\mathbb{R}$

Acotación:

- *Acotada superiormente: No*
- *Acotada inferiormente: Sí*
- *Acotada: No*
- *Cotas superiores: No tiene*
- *Cotas inferiores:* $-2, -3, -4, \ldots$
- *Supremo: No tiene*
- *Ínfimo: -2*
- *Mínimos absolutos:* $(-1, -2)$ y $(1, -2)$

Curvatura:

- *Cóncava:* $(-0,6 \ , \ 0,6)$
- *Convexa:* $(-\infty, -0,6) \cup (0,6, +\infty)$

Tendencias:

$$x \to -1 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \to -1- \Rightarrow y \to -2 \\ x \to -1+ \Rightarrow y \to -2 \end{array} \right\} \Rightarrow y \to -2$$

$$x \to +\infty \Rightarrow y \to +\infty$$

$$x \to -\infty \Rightarrow y \to +\infty$$

2. Determina el dominio de las siguientes funciones:

a) $g(x) = \sqrt{x^2 - 9}$ b) $h(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+11}}{(x-1)(x-3)}$

a) $x^2 - 9 \geq 0 \to x^2 - 9 = 0 \to x = \begin{cases} -3 \\ 3 \end{cases}$

Sí		No		Sí
	-3		3	

$$\mathrm{Dom}(g) = (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$$

b) En el numerador no hay ningún problema ya que el radicando es siempre positivo, y por tanto siempre vamos a poder calcular la raíz cuadrada.

En el denominador: $(x-1)(x-3) = 0 \to x = \begin{cases} 1 \\ 3 \end{cases} \Rightarrow \mathrm{Dom}(h) = \mathbb{R} - \{1, 3\}$

3. Dadas las funciones $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = 2x - 3$, calcula:

b) $g \circ f$ **b)** $f \circ g$

a) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2+1) = 2(x^2+1) - 3 = 2x^2 + 2 - 3 = 2x^2 - 1$

b) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x-3) = (2x-3)^2 + 1 = 4x^2 + 9 - 12x + 1 = 4x^2 - 12x + 10$

4. Calcula la inversa de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 3x - 1$

$$y = 3x - 1$$
$$x = 3y - 1$$
$$x + 1 = 3y$$
$$\frac{x+1}{3} = y = f^{-1}(x)$$

b) $g(x) = \dfrac{5x}{2x-1}$

$$y = \frac{5x}{2x-1}$$
$$x = \frac{5y}{2y-1}$$
$$x(2y-1) = 5y$$
$$2xy - x - 5y = 0$$
$$y(2x-5) - x = 0$$
$$y = \frac{x}{2x-5} = g^{-1}(x)$$

c) $h(x) = \sqrt[3]{2x-3}$

$$y = \sqrt[3]{2x-3}$$
$$x = \sqrt[3]{2y-3}$$
$$x^3 = 2y - 3$$
$$x^3 + 3 = 2y$$
$$\frac{x^3+3}{2} = y = h^{-1}(x)$$

5. El coste de producción de x unidades de un producto es igual a $\frac{1}{4}x^2+35x+25$ euros y el precio de venta de una unidad es de $50x-\frac{x}{4}$ euros.

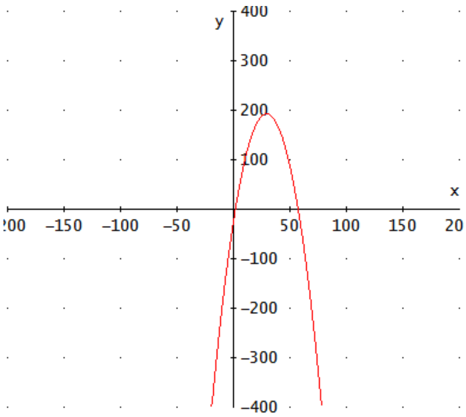
a) Escribe la función que nos da el beneficio total si se venden las x unidades producidas y represéntala.
b) Halla el número de unidades que deben venderse para que el beneficio sea máximo. ¿Cuál es ese beneficio máximo?

a) $C(x)=\frac{1}{4}x^2+35x+25$

$P(x)=50x-\frac{x}{4}$

$B(x)=P(x)-C(x)=50x-\frac{x}{4}-\left(\frac{1}{4}x^2+35x+25\right)=-\frac{1}{4}x^2+\frac{59}{4}x-25=$ función beneficio

Para representarla:
Vértice:



$$x_v=\frac{-b}{2a}=\frac{-\frac{59}{4}}{2\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)}=\frac{59}{2}=29,5$$

$$y_v=-\frac{1}{4}\left(\frac{59}{2}\right)^2+\frac{59}{4}\cdot\frac{59}{2}-25=\frac{3081}{16}\simeq 192,56$$

Puntos de corte con el eje OX:

$$B(x)=0\rightarrow -\frac{1}{4}x^2+\frac{59}{4}x-25=0\rightarrow x=\frac{59\pm\sqrt{3081}}{2}\simeq\begin{cases}1,75\\57,25\end{cases}$$

b) La función anterior tiene su máximo en el vértice:
Por tanto, hay que vender $29,5\simeq 30$ unidades para que el beneficio sea máximo, en cuyo caso dicho beneficio es de $B(30)=\frac{385}{2}=192,5$ €.

6. El manual de usuario de un vehículo afirma que el ruido producido por el motor sigue aproximadamente la siguiente función:

$$r(t)=at^2+2,8t+8$$

donde t es el número de años de antigüedad del vehículo; a es un **número fijo**, que se denomina coeficiente de atenuación, y $r(t)$ es el nivel de ruido, medido en decibelios (dB).

La semana pasada llevé mi vehículo a pasar la revisión de los cuatro años y en el informe figura que la medición fue de 27 decibelios.

a) ¿Cuál es el coeficiente de atenuación?
b) ¿Cuántos decibelios de ruido producirá a los ocho años?

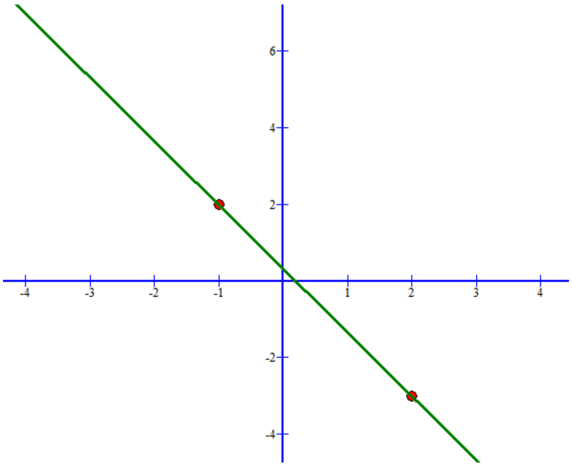
a) $27=a\cdot 4^2+2,8\cdot 4+8\Rightarrow 16a=7,8\Rightarrow \boxed{a=0,4875}$

b) A los 8 años producirá:

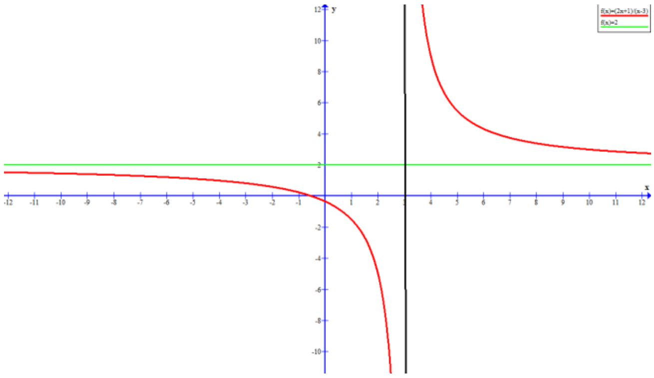
$$r(8)=0,4875\cdot 8^2+2,8\cdot 8+8=\boxed{61,6\text{ dB}}$$

7. Representa las siguientes funciones:

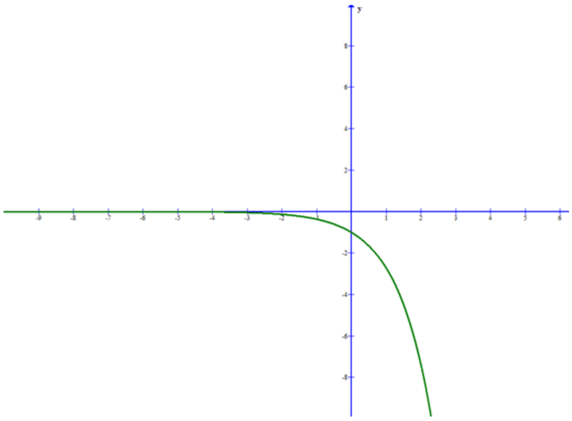
a) $$y=mx+n\begin{cases}2=-m+n\\-3=2m+n\end{cases}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow(m,n)=\left(-\frac{5}{3},\frac{1}{3}\right)$$



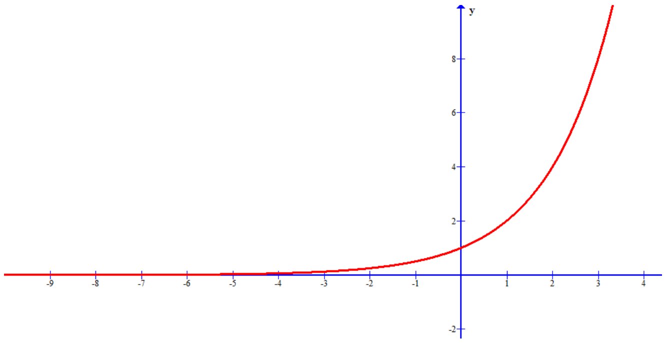
b) $h(x)=\dfrac{2x+1}{x-3}$



c) $g(x)=-e^x$



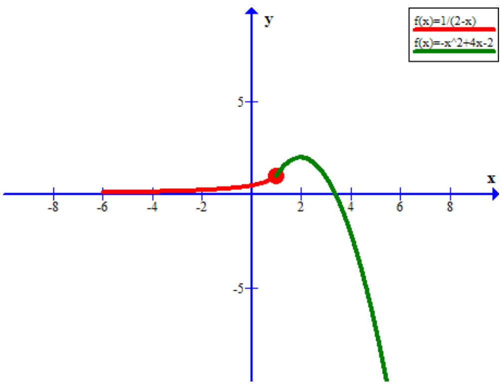
d) $i(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-x}$

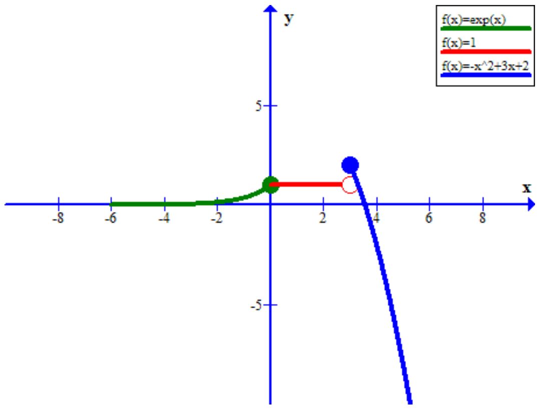


8. Representa las siguientes funciones definidas a trozos:

b) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2-x} & si \quad x\le 1\\ -x^2+4x-2 & si \quad x>1\end{cases}$

b) $g(x)=\begin{cases}e^x & si & x\le 0\\ 1 & si & 0<x<3\\ -x^2+3x+2 & si & x\ge 3\end{cases}$





9. Expresa como una función definida a trozos la siguiente función valor absoluto, y después represéntala gráficamente. Justifica los pasos que vayas dando.

$$f(x) = \left|-x^2 + 4x\right|$$

Resolvemos la inecuación correspondiente:

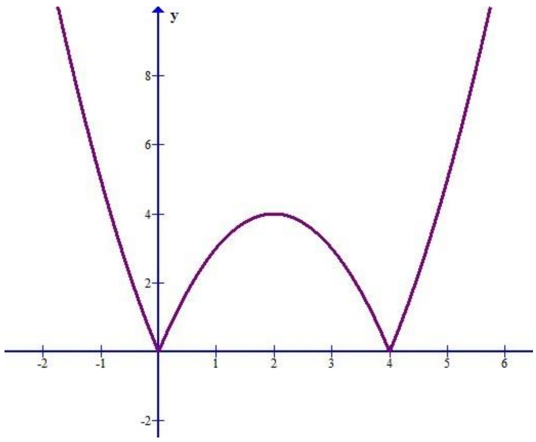
$-x^2 + 4x \geq 0 \Rightarrow -x^2 + 4x = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} 0 \\ 4 \end{cases}$

$-x^2 + 4x$ es positiva en $(-\infty, 0] \cup [4, +\infty)$

$-x^2 + 4x$ es negativa en $(0, 4)$

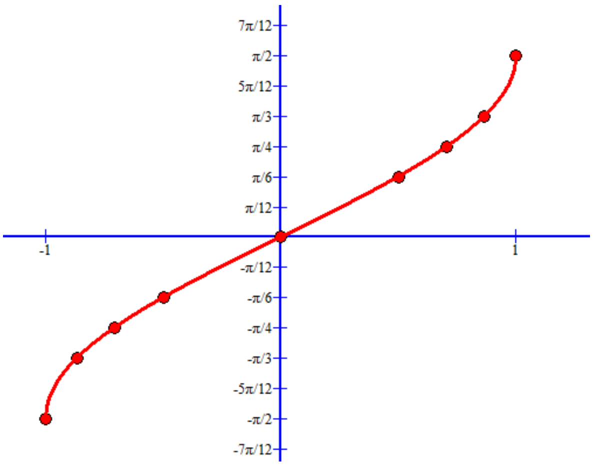
Así:

$$f(x) = \left|-x^2 + 4x\right| = f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4x & \text{si} \quad x \leq 0 \\ -\left(-x^2 + 4x\right) & \text{si} \quad 0 < x < 4 \\ -x^2 + 4x & \text{si} \quad x \geq 4 \end{cases} = \begin{cases} -x^2 + 4x & \text{si} \quad x \leq 0 \\ x^2 - 4x & \text{si} \quad 0 < x < 4 \\ -x^2 + 4x & \text{si} \quad x \geq 4 \end{cases}$$



10. **<u>Función arcoseno:</u>** $\boxed{y = \operatorname{arcsen} x}$ con $x \in [-1, 1]$ e $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

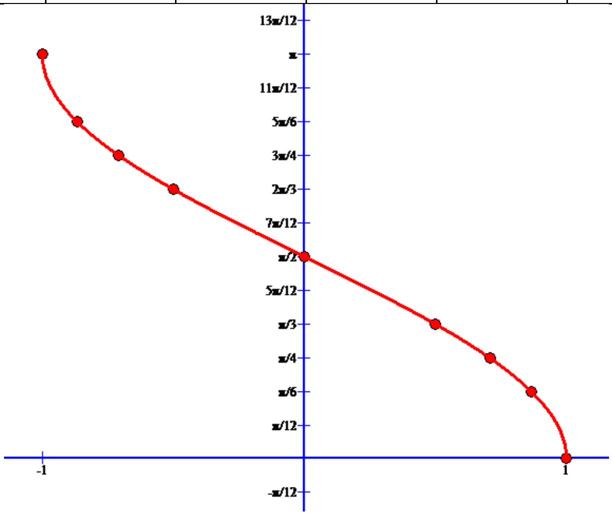
x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
y	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$



<u>Función arcocoseno:</u> $\boxed{y = \arccos x}$

Completa la siguiente tabla, con $x \in [-1,1]$ e $y \in [0,\pi]$.

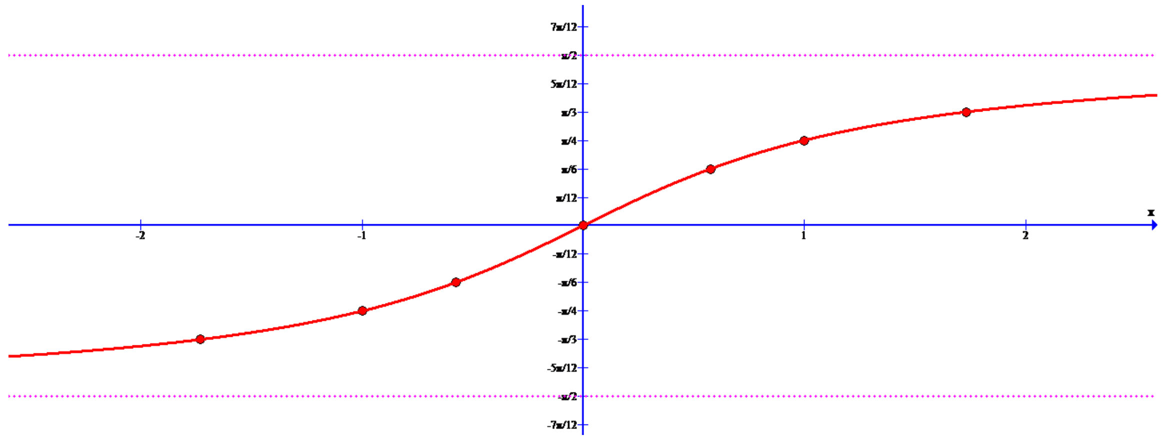
x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
y	π	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0



<u>Función arcotangente:</u> $\boxed{y = \operatorname{arctg} x}$

Completa la siguiente tabla, con $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
y	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$



11. El precio del billete de una línea de cercanías depende de los kilómetros recorridos. Por 57 km he pagado 2,85 euros y por 168 km, 13,4 euros. Calcula el precio de un billete para una distancia de 100 km. ¿Cuál es la función que nos indica el precio según los kilómetros recorridos?

Solución:
Si llamamos x al número de km recorridos e y al precio del billete, los datos que nos dan se recogen en la siguiente tabla:

x	y
57	2,85
168	13,4

Por tanto, se trata de una función lineal, que es de la forma $y = mx + n$. Los datos dan lugar al siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2,85 = 57m + n \\ 13,4 = 168m + n \end{cases} \rightarrow (m, n) = \left(\frac{211}{2220}, -\frac{95}{37} \right) \simeq (0,095 \quad , \quad -2,568)$$

Así, la función que nos piden es $f(x) = 0,095x - 2,568$

Y el precio para una distancia de 100 km es:

$$f(100) = 0,095 \cdot 100 - 2,568 \simeq 6,93 \text{ €}$$

12. Los gastos fijos mensuales de una empresa por la fabricación de x televisores son $G(x) = 3000 + 25x$, en miles de euros, y los ingresos mensuales son $I(x) = 50x - 0,02x^2$, también en miles de euros. ¿Cuántos televisores deben fabricarse para que el beneficio (ingresos menos gastos) sea máximo? ¿Cuál es dicho beneficio?

Solución:
La función beneficio es:

$$B(x) = I(x) - G(x) = 50x - 0,02x^2 - (3000 + 25x) = -0,02x^2 + 25x - 3000$$

y por tratarse de una parábola, el extremo relativo lo tiene en el vértice. En este caso es un máximo relativo (y absoluto), ya que la parábola está abierta hacia abajo ($a = -0,02 < 0$).

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-25}{2 \cdot (-0,02)} = 625$$

Para que el beneficio sea máximo tiene que fabricar 625 televisores, en cuyo caso, el beneficio máximo es de $f(625) = -0,02 \cdot 625^2 + 25 \cdot 625 - 3000 = 4812,5$ miles de euros, esto es, 4 812 500 €.

13. Una pelota es lanzada verticalmente hacia arriba desde lo alto de un edificio. La altura que alcanza viene dada por la fórmula $h(t) = 80 + 64t - 16t^2$ (t en segundos y h en metros).

a) Dibuja la gráfica en el intervalo [0, 5].
b) Halla la altura del edificio.
c) ¿En qué instante alcanza su máxima altura?

Solución:
a) Como es una parábola, hay que calcular el vértice y los puntos de corte con los ejes.

Vértice: $t = \frac{-b}{2a} = \frac{-64}{2\cdot(-16)} = 2$

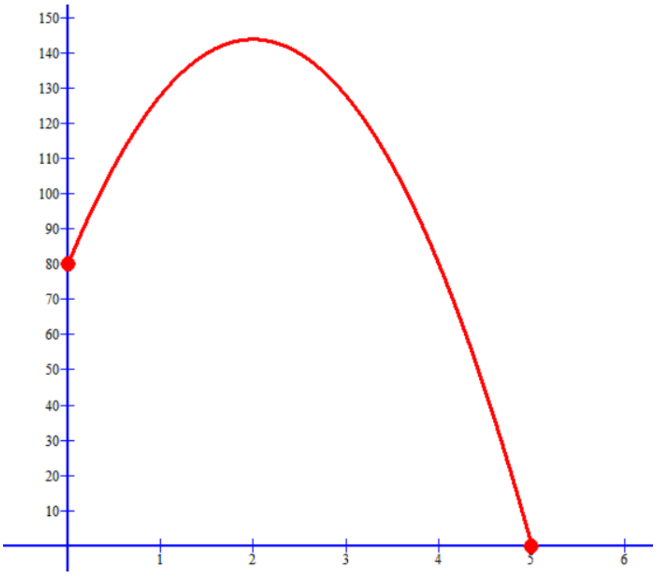
$$h(2) = 80 + 64\cdot 2 - 16\cdot 2^2 = 144$$

Puntos de corte con el eje OT:

$$80 + 64t - 16t^2 = 0 \Rightarrow t = \begin{cases} 5 \\ -1 \end{cases}$$

Punto de corte con el eje OH:

$$t = 0 \Rightarrow h(0) = 80$$



b) El edificio mide 80 metros.

c) Alcanza su altura máxima a los 2 segundos de lanzarla, y dicha altura máxima es de 144 m.

14. El precio de venta de un artículo viene dado por la expresión $p = 12 - 0,01x$ (x = número de artículos fabricados; p = precio, en cientos de euros).

a) Si se fabrican y se venden 500 artículos, ¿cuáles serán los ingresos obtenidos?
b) Representa la función número de artículos-ingresos.
c) ¿Cuántos artículos se deben fabricar para que los ingresos sean máximos?

Solución:
a) Se tiene que $x = 500$, luego el precio es de $12 - 0,01\cdot 500 = 7$ cientos de euros, y por tanto, como la función que nos da los ingresos es

$$I(x) = p(x)\cdot x$$

los ingresos ascienden a $I(500) = p(500)\cdot 500 = 700\cdot 500 = 350\ 000$ €

b) Para la representación gráfica de la función ingresos,

$$I(x) = p(x)\cdot x = (12 - 0,01x)\cdot x = 12x - 0,01x^2$$

calculamos:

Vértice: $x = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-12}{2\cdot(-0,01)} = 600$

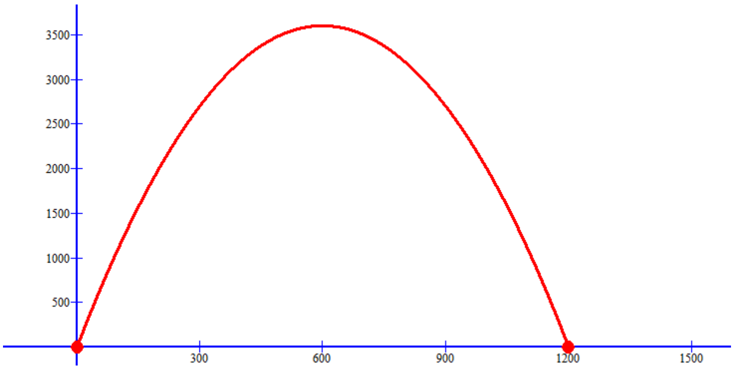
$$I(600) = 12\cdot 600 - 0,01\cdot 600^2 = 3600$$

Puntos de corte con el eje OX:

$$12x - 0,01x^2 = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} 0 \\ 1200 \end{cases}$$

Punto de corte con el eje OY:

$$I(0) = 0$$



c) Para que los ingresos sean máximos se deben fabricar 600 artículos, en cuyo caso los ingresos máximos son de 360 000 euros

15. Un fabricante vende mensualmente 100 electrodomésticos a 400 euros cada uno y sabe que por cada 10 euros de subida venderá 2 electrodomésticos menos.

a) ¿Cuáles serán los ingresos si sube los precios 50 euros?

b) Escribe la función que relaciona la subida de precio con los ingresos mensuales.

c) ¿Cuál debe ser la subida para que los ingresos sean máximos?

Solución:

a) En este caso venderían 90 electrodomésticos a 450 euros cada uno, luego los ingresos ascenderían a $450\cdot 90 = 40\ 500$ €

b) La función ingresos es:

$$I(x) = (400 + 10x)(100 - 2x) = -20x^2 + 200x + 40000$$

(donde x viene dada en decenas de euros).

c) Como es una parábola, el máximo se alcanza en el vértice, que es:

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-200}{-40} = 5 \Rightarrow 50 \text{ €}$$

La subida debe de ser de 50 euros.