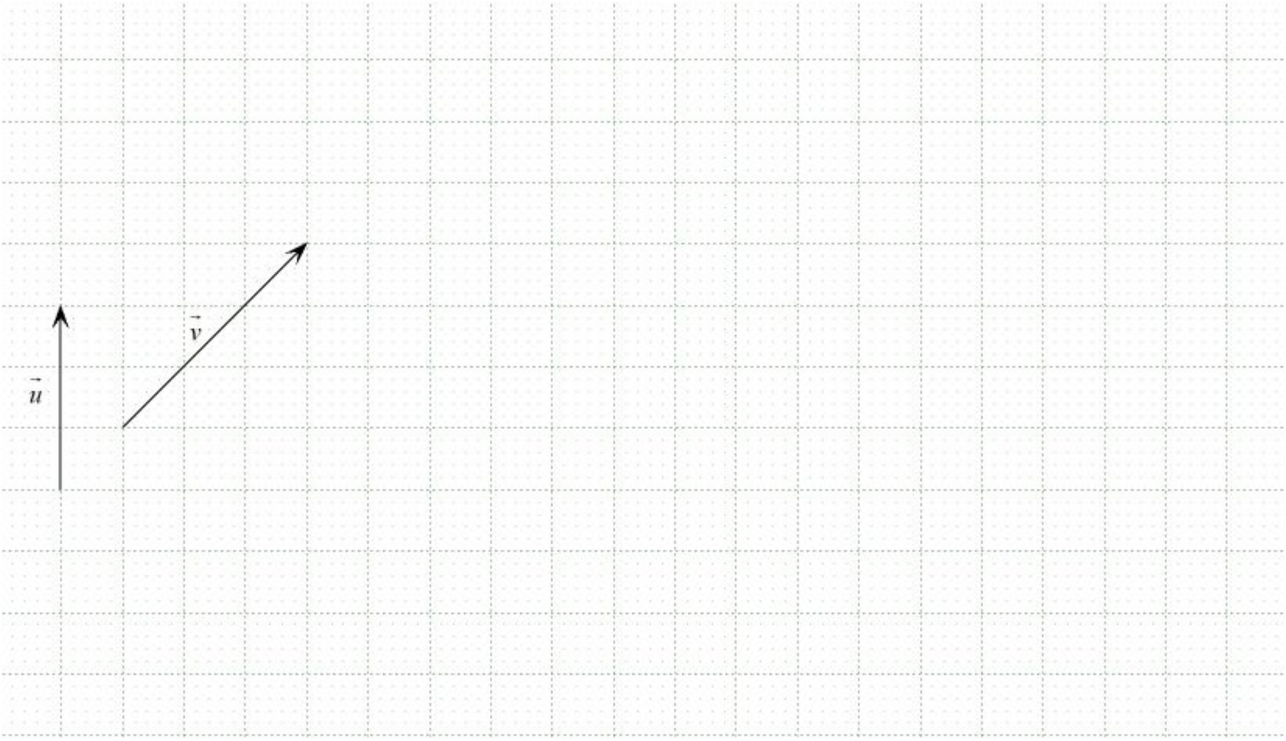
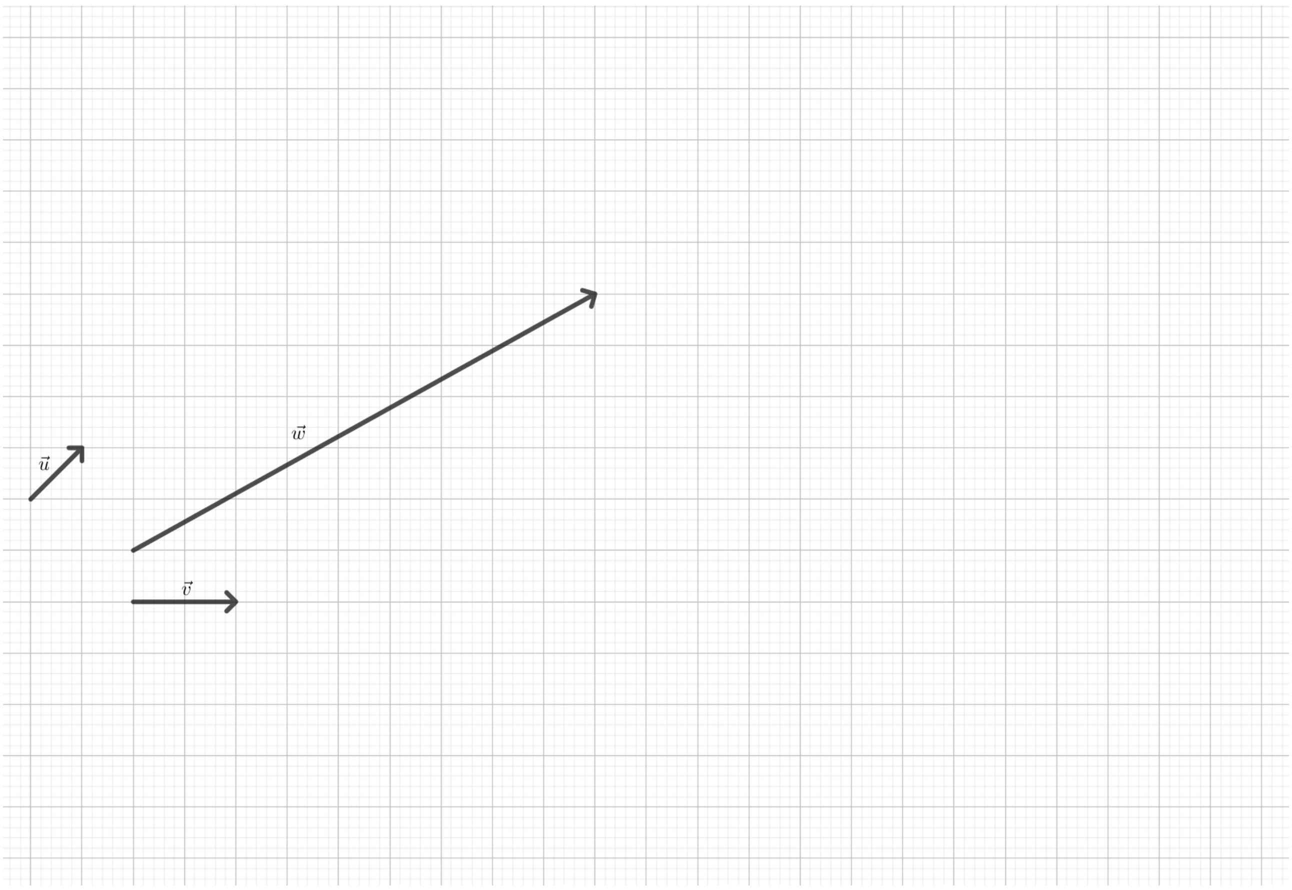
Geometría Analítica Plana

Matemáticas I

1. Calcula, vectorialmente, $\vec{u}+\vec{v}$, $\vec{u}-\vec{v}$ y $-2\vec{u}$ con los vectores del dibujo:



2. Expresa el vector $\vec{w}$ como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$:



3. Determina, razonadamente, la ecuación de la recta paralela a $r \equiv -2x - y + 2 = 0$ que pasa por el punto $P(-1,2)$.

4. Halla la ecuación de la recta que es perpendicular a $r \equiv \dfrac{x}{2} = \dfrac{y+3}{-1}$ y que pasa por el punto $P(-1,2)$.

5. Dados $A(-2,3)$ y $B(1,-2)$, halla, razonadamente, el punto medio del segmento $\overline{AB}$.

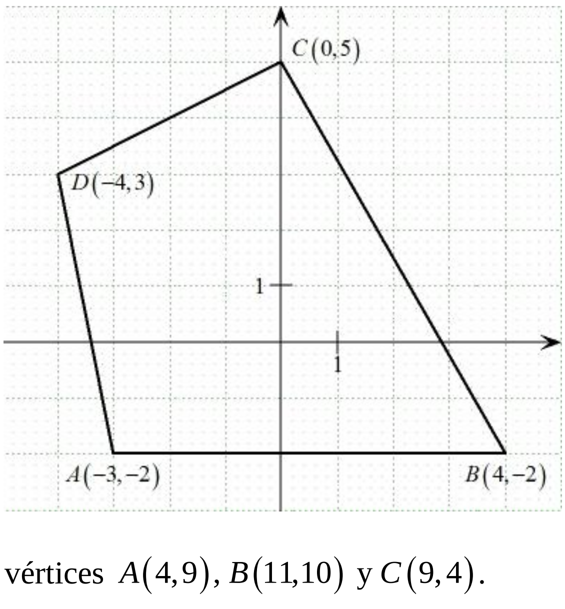
6. Determina todas las ecuaciones de la recta (vectorial, paramétricas, continua, general, explícita y punto pendiente) que pasa por los puntos $A(7,3)$ y $B(2,2)$.

7. Dadas las rectas $r \equiv \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+1}{3}$ y $s \equiv \begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = -3 + \lambda \end{cases}$:

a) Estudia su posición relativa.
b) El ángulo que forman.

8. Calcula el área del cuadrilátero de la figura, hallando:

a) La recta que pasa por B y por D (que es la que divide al cuadrilátero en dos triángulos de igual base)
b) La distancia de B a D (que es la base de los triángulos)
c) La distancia de A a la recta calculada en el apartado a. (que es la altura del triángulo inferior)
d) La distancia de C a la recta calculada en el apartado a. (que es la altura del triángulo superior)



9. Dado el triángulo de vértices $A(4,9)$, $B(11,10)$ y $C(9,4)$.

a) Comprueba, analíticamente, que es un triángulo isósceles.
b) Traza una recta paralela al lado desigual que pase por $P(7,6)$ y determina la ecuación de dicha recta.
c) Cuando se traza la recta del apartado b), se forma un trapecio isósceles. Determina su área.

Indicaciones para calcular el área:

i) El otro punto, que puedes necesitar, para calcular la longitud de la base menor es $Q\left(\frac{49}{5},\frac{32}{5}\right)$.

ii) La fórmula del área (superficie) del trapecio es:

$$S_{\text{trapecio}}=\frac{(B+b)\cdot h}{2} \text{ donde } \begin{cases} B= \text{ base mayor} \\ b= \text{ base menor} \\ h= \text{ altura} \end{cases}$$

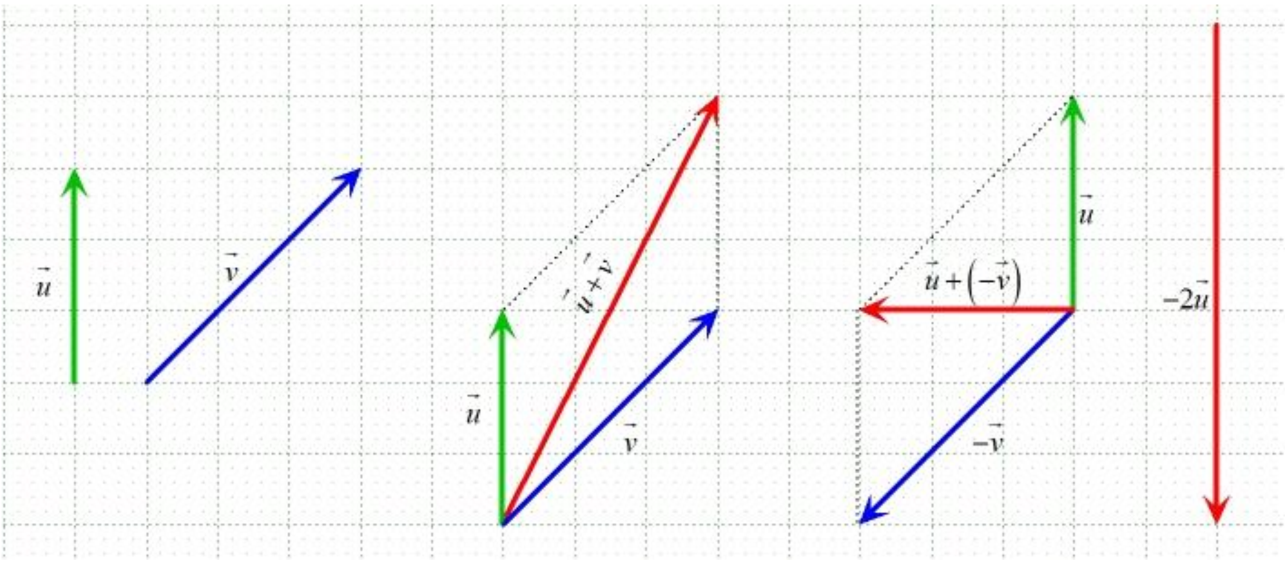
10. Del paralelogramo $ABCD$ se conocen los vértices $B(1,0)$, $D(2,4)$ y los lados

$$BC\equiv\begin{cases} x=\lambda \\ y=-1+\lambda \end{cases} \text{ y } CD\equiv\frac{x-3}{-1}=y-3.$$

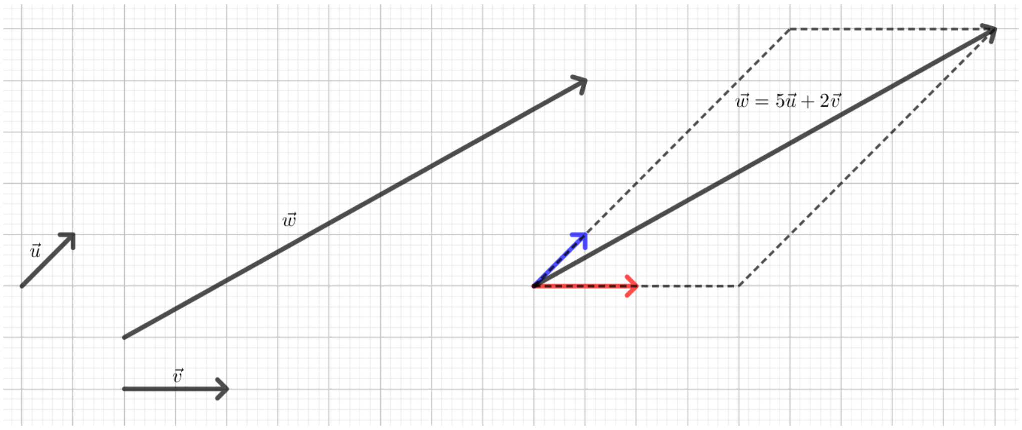
Determina los elementos que faltan.

SOLUCIONES

1. Calcula, vectorialmente, $\vec{u}+\vec{v}$, $\vec{u}-\vec{v}$ y $-2\vec{u}$ con los vectores del dibujo:



2. Expresa el vector $\vec{w}$ como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$**:**



3. Determina la ecuación de la recta paralela a $r \equiv -2x - y + 2 = 0$ que pasa por el punto $P(-1,2)$.

Un vector director de la recta r es $\overrightarrow{d_r} = (1,-2)$ y como las rectas son paralelas tienen que tener la misma pendiente:

$$m_r = \frac{-2}{1} = -2 = m_s$$

Si tenemos la pendiente y un punto de la recta, la ecuación que hay que calcular es la punto-pendiente:

$$s \equiv y - 2 = -2(x+1)$$

4. Halla la ecuación de la recta que es perpendicular a $r \equiv \frac{x}{2} = \frac{y+3}{-1}$ y que pasa por el punto $P(-1,2)$.

La pendiente de la recta r es $m_r = -\frac{1}{2}$. Y como la relación entre las pendientes de dos rectas perpendiculares es que su producto sea – 1:

$$m_r \cdot m_s = -1 \rightarrow m_s = 2$$

Volvemos a calcular la ecuación de la recta punto-pendiente:

$$s \equiv y - 2 = 2(x+1)$$

5. Dados $A(-2,3)$ y $B(1,-2)$, halla el punto medio del segmento $\overline{AB}$ y el simétrico de A respecto de B.

Calculamos en primer lugar el punto medio:

$$M = \left(\frac{-2+1}{2}, \frac{3-2}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Calculamos ahora el simétrico de A respecto de B:

$$A' = \left(2\cdot 1 - (-2), 2\cdot(-2) - 3\right) = (4,-7)$$

6. Determina todas las ecuaciones de la recta que pasa por los puntos $A(7,3)$ y $B(2,2)$.

Como punto tomamos A y como vector director $\overrightarrow{AB} = (-5,-1)$:

Ecuación vectorial: $(x,y) = (7,3) + \lambda(-5,-1)$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = 7 - 5\lambda \\ y = 3 - \lambda \end{cases}$

Ecuación continua: $\frac{x-7}{-5} = \frac{y-3}{-1}$

Ecuación punto-pendiente: $\frac{-1}{-5}(x-7) = y - 3 \rightarrow \frac{1}{5}(x-7) = y-3$

Ecuación general: $-x + 7 = -5y + 15 \rightarrow -x + 5y - 8 = 0$

Ecuación explícita: $y = \frac{8+x}{5} \rightarrow y = \frac{x}{5} + \frac{8}{5}$

7. Calcula el ángulo que forman las rectas $r \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{3}$ y $s \equiv \begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = -3 + \lambda \end{cases}$, estudiando previamente su posición relativa.

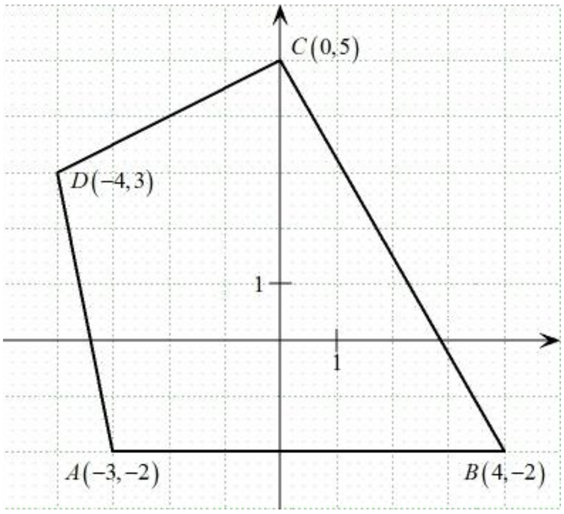
El ángulo que forman las rectas r y s viene dado por: $\alpha = \arccos\left|\frac{\overrightarrow{d_r} \cdot \overrightarrow{d_s}}{\left|\overrightarrow{d_r}\right| \left|\overrightarrow{d_s}\right|}\right|$

Un vector director de r es $\overrightarrow{d_r} = (3,3)$ y un vector director de s es $\overrightarrow{d_s} = (-2,1)$:

$$\alpha = \arccos\left|\frac{\overrightarrow{d_r} \cdot \overrightarrow{d_s}}{\left|\overrightarrow{d_r}\right| \left|\overrightarrow{d_s}\right|}\right| = \arccos\left|\frac{-3}{\sqrt{18}\cdot\sqrt{5}}\right| = \arccos\frac{3}{\sqrt{90}} = 71^{\circ}\,33'\,54{,}18''$$

8. Calcula el área del cuadrilátero de la figura, hallando:

a) La recta que pasa por B y por D (que es la que divide al cuadrilátero en dos triángulos de igual base)
b) La distancia de B a D (que es la base de los triángulos)
c) La distancia de A a la recta calculada en el apartado a. (que es la altura del triángulo inferior)
d) La distancia de C a la recta calculada en el apartado a. (que es la altura del triángulo superior)



a) Como punto tomamos el punto B y como vector director $\overrightarrow{AB}=(-8,5)$. La ecuación general de la recta pedida es:

$$\frac{x-4}{-8}=\frac{y+2}{5}\rightarrow 5x-20=-8y-16\rightarrow r\equiv 5x+8y-4=0$$

b) El módulo del vector $\overrightarrow{BD}=(-8,5)$ es $\left|\overrightarrow{BD}\right|=\sqrt{89}$ u (la u es de unidades lineales)

c) La distancia de A a la recta r viene dada por:

$$d(A,r)=\frac{\left|5\cdot(-3)+8\cdot(-2)-4\right|}{\sqrt{5^2+8^2}}=\frac{35\sqrt{89}}{89}\simeq 3,71 \text{ u}$$

d) La distancia de C a la recta r viene dada por:

$$d(C,r)=\frac{\left|5\cdot 0+8\cdot 5-4\right|}{\sqrt{5^2+8^2}}=\frac{36\sqrt{89}}{\sqrt{89}}\simeq 3,82 \text{ u}$$

e) El área del cuadrilátero se obtiene como sigue:

$$\acute{A}rea=A_{\text{triángulo inferior}}+A_{\text{triángulo superior}}=\frac{\sqrt{89}\cdot\frac{35\sqrt{89}}{89}}{2}+\frac{\sqrt{89}\cdot\frac{36\sqrt{89}}{89}}{2}=\frac{31}{2}=17,50+18=35,5 \text{ u}^2$$

9. Dado el triángulo de vértices $A(4,9)$, $B(11,10)$ y $C(9,4)$.

a) Comprueba, analíticamente, que es un triángulo isósceles.
b) Traza una recta paralela al lado desigual que pase por $P(7,6)$ y determina la ecuación de dicha recta.
c) Cuando se traza la recta del apartado b), se forma un trapecio isósceles. Determina su área.

Indicaciones para calcular el área:

i) El otro punto, que puedes necesitar, para calcular la longitud de la base menor es $Q\left(\frac{41}{5},\frac{48}{5}\right)$.

ii) La fórmula del área (superficie) del trapecio es:

$$S_{\text{trapecio}}=\frac{(B+b)\cdot h}{2} \text{ donde } \begin{cases} B= \text{ base mayor} \\ b= \text{ base menor} \\ h= \text{ altura (distancia entre las bases)} \end{cases}$$

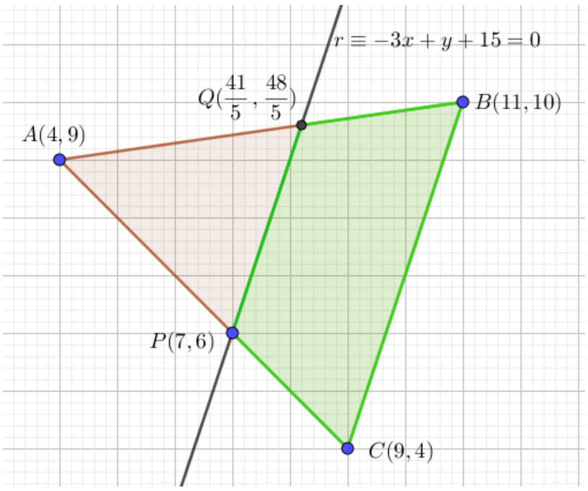
a) Para ver que es un triángulo isósceles, tenemos que ver que tiene dos lados iguales, luego calculamos las longitudes de los vectores correspondientes, o lo que es lo mismo, la distancia entre los vértices:

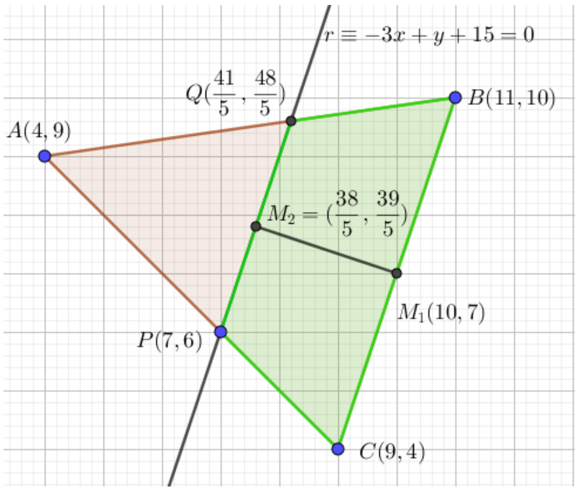
$\boxed{d(A,B)=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{7^2+1^2}=\sqrt{50}\text{ u}}$, ya que $\overrightarrow{AB}=(11,10)-(4,9)=(7,1)$

$\boxed{d(A,C)=\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{5^2+(-5)^2}=\sqrt{50}\text{ u}}$, ya que $\overrightarrow{AC}=(9,4)-(4,9)=(5,-5)$

$\boxed{d(B,C)=\left|\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{(-2)^2+(-6)^2}=\sqrt{40}\text{ u}}$, ya que $\overrightarrow{BC}=(9,4)-(11,10)=(-2,-6)$

Así, los lados iguales son AB y AC, y por tanto, el triángulo es isósceles.





b) El lado desigual es BC, luego la recta pedida es:

$$r\equiv\left\{P,\overrightarrow{BC}\right\}\Rightarrow r\equiv\frac{x-7}{-2}=\frac{y-6}{-6}\Rightarrow -6(x-7)=-2(y-6)\Rightarrow \boxed{\begin{cases} r\equiv -3x+y+15=0 \\ \text{o} \\ r\equiv -6x+2y+30=0\end{cases}}$$

c) Calculamos la base mayor:

$\boxed{B_{\text{mayor}}=d(B,C)=\sqrt{40}\text{ u}}$

Calculamos la base menor:

$$\boxed{b_{\text{menor}}}=d(P,Q)=\left|\overrightarrow{PQ}\right|=\sqrt{\left(\frac{14}{5}\right)^2+\left(\frac{2}{5}\right)^2}=\boxed{2\sqrt{2}\text{ u}}, \text{ ya que } \overrightarrow{PQ}=\left(\frac{49}{5},\frac{32}{5}\right)-(7,6)=\left(\frac{14}{5},\frac{2}{5}\right)$$

Calculamos la altura (distancia entre las bases):

$$\boxed{h=d(B,r)}=\frac{\left|-6\cdot 11+2\cdot 10+30\right|}{\sqrt{(-6)^2+2^2}}=\boxed{\frac{4\sqrt{10}}{5}\text{ u}}$$

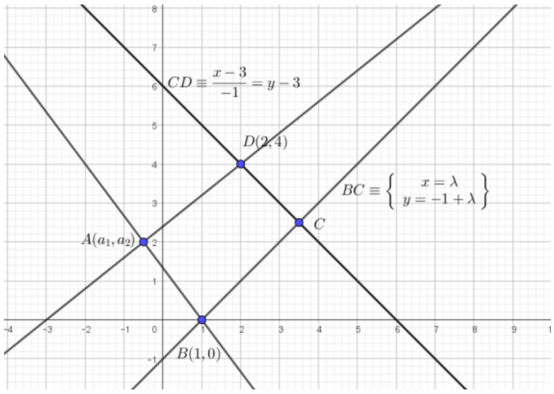
Así, el área pedida es:

$$S=\frac{(\sqrt{40}+2\sqrt{2})\cdot\frac{4\sqrt{10}}{5}}{2}=\boxed{\frac{40+8\sqrt{5}}{5}\text{ u}^2}$$

10. Del paralelogramo $ABCD$ se conocen los vértices $B(1,0)$, $D(2,4)$ y los lados

$$BC \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=-1+\lambda \end{cases} \text{ y } CD \equiv \frac{x-3}{-1}=y-3.$$

Determina los elementos que faltan.



<u>Calculamos *C*</u>: (punto de intersección de *BC* y *CD*)

$$\left.\begin{array}{l} \begin{cases} x=\lambda \\ y=-1+\lambda \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{1}=\frac{y+1}{1} \Rightarrow x-y=1 \\ \frac{x-3}{-1}=y-3 \Rightarrow x+y=6 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x-y=1 \\ x+y=6 \end{array}\right\} \Rightarrow 2x=7 \Rightarrow x=\frac{7}{2} \Rightarrow y=6-\frac{7}{2}=\frac{5}{2}$$

El punto es: $\boxed{C\left(\frac{7}{2},\frac{5}{2}\right)}$.

<u>Calculamos el punto $A(a_1,a_2)$</u>: (simétrico de *C* respecto del punto medio de *DB*)

Punto medio de *DB*: $M\left(\frac{2+1}{2},\frac{4+0}{2}\right)=\left(\frac{3}{2},2\right)$

Simétrico de *C* respecto de *M*:

$$\left(\frac{3}{2},2\right)=\left(\frac{\frac{7}{2}+a_1}{2},\frac{2+a_2}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} \frac{3}{2}=\frac{\frac{7}{2}+a_1}{2} \Rightarrow a_1=-\frac{1}{2} \\ 2=\frac{\frac{5}{2}+a_2}{2} \Rightarrow a_2=\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \boxed{A\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)}$$

<u>Calculamos el lado *AB*</u>:

Punto: $B(1,0)$

Vector director: $\overrightarrow{AB}=(1,0)-\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)=\left(\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right)$

$$\boxed{AB \equiv (x,y)=(1,0)+\lambda\left(\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right)}$$

<u>Calculamos el lado *AD*</u>:

Punto: $D(2,4)$

Vector director: $\overrightarrow{AD} = (2,4) - \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$

$$\boxed{AD \equiv \begin{cases} x = 2 + \frac{5}{2}\lambda \\ y = 4 + \frac{5}{2}\lambda \end{cases}}$$