Trigonometría

Matemáticas I

1. Calcula, razonadamente, todas las razones trigonométricas (seno y coseno) del ángulo α (***sin calcularlo previamente con la calculadora***), sabiendo que $\operatorname{tg}\alpha = 0,49$.

2. Sabiendo que $\operatorname{sen} 50^{\circ} \simeq 0,77$ y que $\cos 50^{\circ} \simeq 0,64$ (dar todos los resultados con decimales redondeados, o en forma de fracción), halla, ***razonadamente***, las razones trigonométricas fundamentales (seno y coseno) de:

a) 130º b) 230º

3. Completa las siguientes identidades:

a) $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) =$

b) $\operatorname{sen}(2\alpha) =$

c) $\cos(2\alpha) =$

d) $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) =$

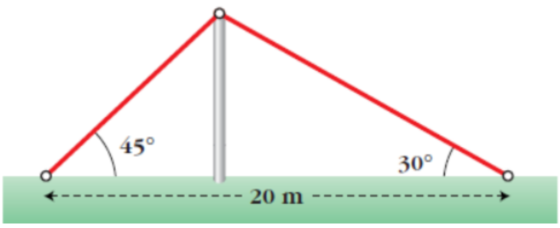
4. Calcula la longitud de las diagonales de un rombo sabiendo que sus ángulos son 60º y 120º, y que sus lados miden 6 cm.

5. Una estatua de 2,5 m está colocada sobre un pedestal. Desde un punto del suelo se ve el pedestal bajo un ángulo de 15º y la estatua bajo un ángulo de 40º. Calcula la altura del pedestal.

6. Las bases de un trapecio isósceles miden 8 cm y 14 cm, y los lados iguales, 5 cm. Calcula la medida de sus ángulos.

7. Una estatua de 2,5 m está colocada sobre un pedestal. Desde un punto del suelo se ve el pedestal bajo un ángulo de 15º y la estatua bajo un ángulo de 40º. Calcula la altura del pedestal.

8. Hemos colocado un cable sobre un mástil que lo sujeta como muestra la figura.
¿Cuánto miden el mástil y el cable? Calcula la altura de la torre con los datos que aparecen en el dibujo.



9. Demuestra las siguientes igualdades trigonométricas:

a) $\dfrac{\operatorname{sen} x + \operatorname{cotg} x}{\operatorname{tg} x + \operatorname{cosec} x} = \cos x$ b) $\operatorname{sen} x \operatorname{sen}(x - y) + \cos x \cos(x - y) = \cos y$

10. Demuestra las siguientes igualdades:

1) $\dfrac{1-\cos^2 x}{\operatorname{sen}(2x)}=\dfrac{\operatorname{tg} x}{2}$

2) $\operatorname{sen}(2\alpha)=\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$

3) $\dfrac{2\operatorname{sen} x}{\operatorname{tg}(2x)}=\cos x-\operatorname{sen} x\operatorname{tg} x$

4) $\dfrac{2\operatorname{sen} x-\operatorname{sen}(2x)}{2\operatorname{sen} x+\operatorname{sen}(2x)}=\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$

5) $\dfrac{\operatorname{sen}(2\beta)}{\operatorname{sen}\beta}-\dfrac{\cos(2\beta)}{\cos\beta}=\sec\beta$

6) $\left(\dfrac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\operatorname{sen} x}-2\operatorname{sen}^2\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)\cos^2\left(\dfrac{x}{2}\right)=\cos^2\left(\dfrac{x}{2}\right)$

11. Demuestra la siguiente identidad:

$$\operatorname{sen} x\operatorname{sen}(x-y)+\cos x\cos(x-y)=\cos y$$

12. Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas:

1) $5\operatorname{sen} x=2$

2) $7\cos x=-1$

3) $5\operatorname{tg} x=12$

4) $2\operatorname{tg} x=2$

5) $\operatorname{sen}(2x)=1$

6) $\cos x+\cos(2x)=0$

13. Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas:

1) $2\cos^2 x+\cos x-1=0$

2) $2\operatorname{sen}^2 x-1=0$

3) $\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{tg} x=0$

4) $2\operatorname{sen}^2 x+3\cos x=3$

5) $4\cos(2x)+3\cos x=1$

6) $\operatorname{tg}(2x)+2\cos x=0$

7) $\sqrt{2}\cos\dfrac{x}{2}-\cos x=1$

8) $2\operatorname{sen} x\cos^2 x-6\operatorname{sen}^3 x=0$

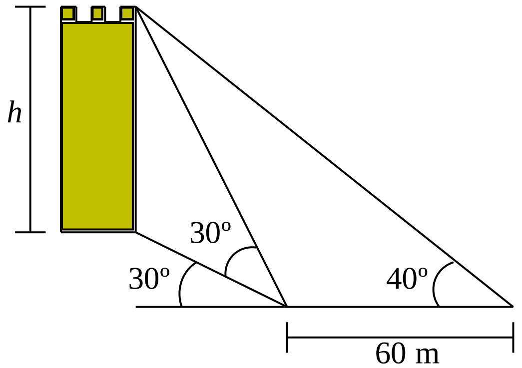
14. Resuelve los siguientes triángulos:

a) Datos: $c=5,\ A=30^{\circ}$ y $B=20^{\circ}$

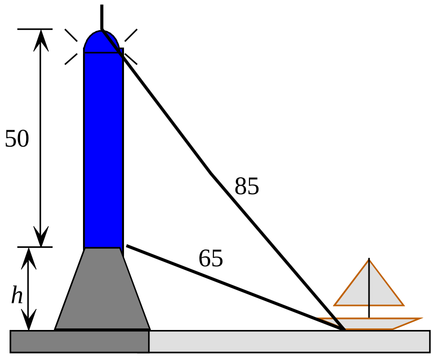
b) Datos: $a=3, b=4$ y $C=120^{\circ}$

15. Un barco B pide socorro y se reciben sus señales en dos estaciones de radio, A y C, que distan entre sí 50 km. Desde las estaciones se miden los siguientes ángulos: $BAC=46^{\circ}$ y $BCA=53^{\circ}$. ¿A qué distancia de cada estación se encuentra el barco?

16. Calcula la altura de la torre con los datos que aparecen en el dibujo.

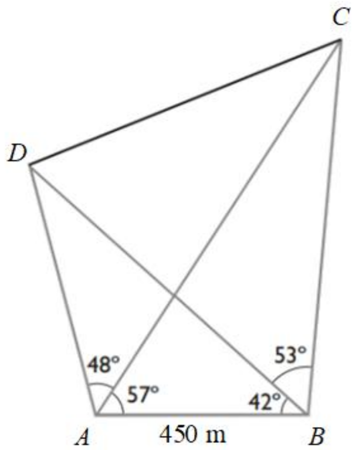


17. El faro de la figura aparece sobre un promontorio de altura desconocida sobre el mar. La altura del faro es de 50 m, y la distancia al barco desde los extremos inferior y superior del faro es de 65 m y 85 m respectivamente. Halla la altura de promontorio.

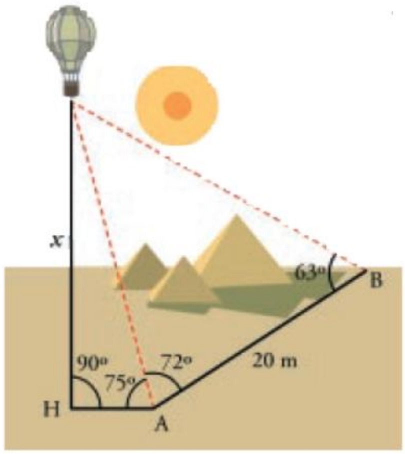


18. Se quiere medir la anchura de un río. Para ello se observa un árbol que está en la otra orilla. Se mide el ángulo de elevación desde esta orilla a la parte más alta del árbol y se obtiene 47°. Alejándose 5 m del río, se vuelve a medir el ángulo de elevación y se obtiene 39°. Calcula la anchura del río.

19. Halla la distancia que hay entre dos barcos *C* y *D*, sabiendo que hemos medido la distancia que hay entre *A* y *B* y hemos obtenido 450 m, y que con el teodolito hemos obtenido que $CAD = 48^o$, $BAD = 57^o$, $ABC = 42^o$ y $CBD = 53^o$.



20. Para hallar la altura de un globo, realizamos las mediciones indicadas en la figura. ¿Cuánto dista el globo del punto A? ¿Cuánto del punto B? ¿A qué altura está el globo?



Chuletario de fórmulas que hay que saberse:

$\operatorname{sen}\left(90^{\circ}-\alpha\right)=\cos\alpha$ $\cos\left(90^{\circ}-\alpha\right)=\operatorname{sen}\alpha$	$\operatorname{sen}\left(180^{\circ}-\alpha\right)=\operatorname{sen}\alpha$ $\cos\left(180^{\circ}-\alpha\right)=-\cos\alpha$	$\operatorname{sen}\left(180^{\circ}+\alpha\right)=-\operatorname{sen}\alpha$ $\cos\left(180^{\circ}+\alpha\right)=-\cos\alpha$
$\operatorname{sen}\left(-\alpha\right)=\operatorname{sen}\left(360^{\circ}-\alpha\right)=-\operatorname{sen}\alpha$ $\cos\left(-\alpha\right)=\cos\left(360^{\circ}-\alpha\right)=\cos\alpha$		
$\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha=1\Rightarrow\begin{cases}1+\operatorname{cotg}^2\alpha=\operatorname{cosec}^2\alpha\\1+\operatorname{tg}^2\alpha=\sec^2\alpha\end{cases}$		
$\operatorname{sen}\left(\alpha\pm\beta\right)=\operatorname{sen}\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\operatorname{sen}\beta$ $\cos\left(\alpha\pm\beta\right)=\cos\alpha\cos\beta\mp\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$	$\operatorname{tg}\left(\alpha\pm\beta\right)=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta}{1\mp\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$	
$\operatorname{sen}\left(2\alpha\right)=2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$ $\cos\left(2\alpha\right)=\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha$	$\operatorname{tg}\left(2\alpha\right)=\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$	
$\operatorname{sen}\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}$ $\cos\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)=\pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}$	$\operatorname{tg}\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$	

SOLUCIONES

1. Calcula las razones trigonométricas fundamentales del ángulo α (sin calcularlo previamente con la calculadora), sabiendo que $\operatorname{tg}\alpha = 0,49$.

Aplicamos la definición de tangente y la relación fundamental de la trigonometría:

$$\operatorname{tg}\alpha = 0,49 \to \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = 0,49 \to \operatorname{sen}\alpha = 0,49\cos\alpha$$

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Sustituimos en la segunda ecuación y resolvemos:

$$(0,49\cos\alpha)^2 + \cos^2\alpha = 1 \to 0,24\cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \to 1,24\cos^2\alpha = 1 \to \cos^2\alpha = \frac{1}{1,24} = 0,8$$

$$\to \boxed{\cos\alpha = 0,89}$$

Calculamos ahora el seno:

$$\operatorname{sen}\alpha = 0,49\cos\alpha = 0,49\cdot 0,89 = 0,44 \to \boxed{\operatorname{sen}\alpha = 0,44}$$

2. Calcula:

a) $\operatorname{sen}130^\circ = \operatorname{sen}50^\circ = 0,77$
$\cos130^\circ = -\cos50^\circ = -0,64$

b) $\operatorname{sen}230^\circ = -\operatorname{sen}50^\circ = -0,77$
$\cos230^\circ = -\cos50^\circ = -0,64$

3. Completa:

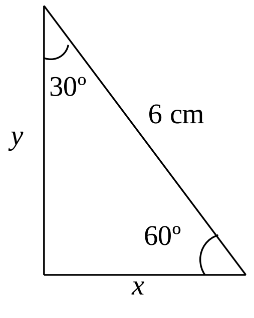
$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$$

$$\operatorname{sen}(2\alpha) = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

4. A la vista del dibujo, se tiene:



$$\operatorname{sen}60^\circ = \frac{y}{6} \Rightarrow y = 6\operatorname{sen}60^\circ = 3\sqrt{3}\text{ cm}$$

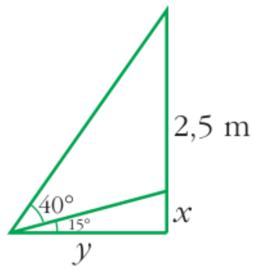
$$\cos60^\circ = \frac{x}{6} \Rightarrow x = 6\cos60^\circ = 3\text{ cm}$$

De donde:

$$D = 2\cdot 3\sqrt{3} = 6\sqrt{3}\text{ cm}$$

$$d = 2\cdot 3 = 6\text{ cm}$$

5. Solución.

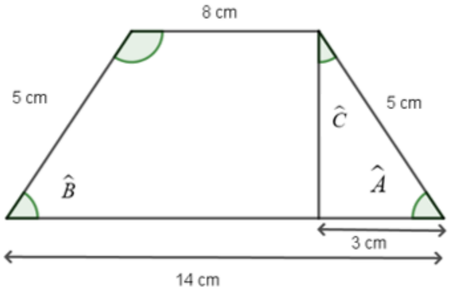


Es un problema de doble tangente:

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{tg}15^\circ = \dfrac{x}{y} \Rightarrow y = \dfrac{x}{\operatorname{tg}15^\circ} \\ \operatorname{tg}55^\circ = \dfrac{2,5+x}{y} \Rightarrow y = \dfrac{2,5+x}{\operatorname{tg}55^\circ} \Rightarrow \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x}{\operatorname{tg}15^\circ} = \frac{2,5+x}{\operatorname{tg}55^\circ}$$

$$\Rightarrow x\operatorname{tg}55^\circ = 2,5\operatorname{tg}55^\circ + x\operatorname{tg}15^\circ \Rightarrow x = \frac{2,5\operatorname{tg}15^\circ}{\operatorname{tg}55^\circ - \operatorname{tg}15^\circ} = 0,58\text{ m (el pedestal)}$$

6. Hacemos un dibujo con los datos y las incógnitas:



Se tiene que

$$\cos A = \frac{3}{5} \Rightarrow A = \arccos\frac{3}{5} = 53^\circ 7'48,37''$$

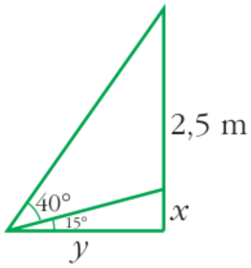
y, por tanto:

$$C = 90^\circ - A = 90^\circ - 53^\circ 7'48,37'' = 36^\circ 52'11,63''$$

de donde:

$$B = 90^\circ + C = 90^\circ + 36^\circ 52'11,36'' = 126^\circ 52'11,36''$$

7. Solución



Es un problema de doble tangente:

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{tg} 15^\circ = \dfrac{x}{y} \Rightarrow y = \dfrac{x}{\operatorname{tg} 15^\circ} \\ \operatorname{tg} 55^\circ = \dfrac{2,5+x}{y} \Rightarrow y = \dfrac{2,5+x}{\operatorname{tg} 55^\circ} \Rightarrow \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x}{\operatorname{tg} 15^\circ} = \frac{2,5+x}{\operatorname{tg} 55^\circ}$$

$$\Rightarrow x \operatorname{tg} 55^\circ = 2,5 \operatorname{tg} 55^\circ + x \operatorname{tg} 15^\circ \Rightarrow x = \frac{2,5 \operatorname{tg} 15^\circ}{\operatorname{tg} 55^\circ - \operatorname{tg} 15^\circ} = 0,58 \text{ m (el pedestal)}$$

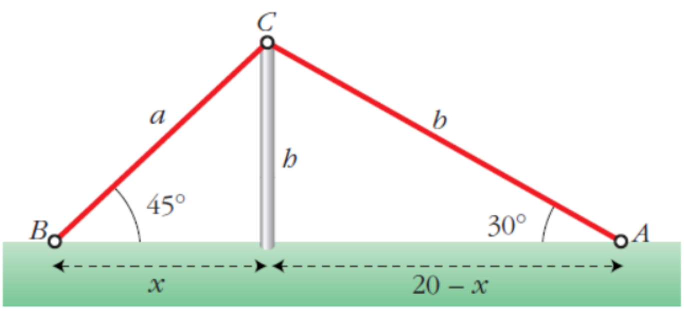
8. Solución:

Por una parte:

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{tg} 45^\circ = \dfrac{h}{x} \Rightarrow x = \dfrac{h}{\operatorname{tg} 45^\circ} = \dfrac{h}{1} = h \\ \operatorname{tg} 30^\circ = \dfrac{h}{20-x} \Rightarrow (20-x)\operatorname{tg} 30^\circ = h \end{array}\right\} \Rightarrow (20-h)\operatorname{tg} 30^\circ = h \Rightarrow h = \frac{20 \operatorname{tg} 30^\circ}{1+\operatorname{tg} 30^\circ} = 7,32 \text{ m (mástil)}$$

Y, por otra:

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{sen} 45^\circ = \dfrac{h}{a} \Rightarrow a = \dfrac{h}{\operatorname{sen} 45^\circ} = \dfrac{7,32}{\operatorname{sen} 45^\circ} = 10,35 \text{ m} \\ \operatorname{sen} 30^\circ = \dfrac{h}{b} \Rightarrow b = \dfrac{h}{\operatorname{sen} 30^\circ} = \dfrac{7,32}{\operatorname{sen} 30^\circ} = 14,64 \text{ m} \end{array}\right\} \Rightarrow a + b = 24,99 \text{ m (cable)}$$



9. Demuestra:

a) $\dfrac{\operatorname{sen} x + \operatorname{cotg} x}{\operatorname{tg} x + \operatorname{cosec} x} = \cos x$

$$\frac{\operatorname{sen} x+\operatorname{cotg} x}{\operatorname{tg} x+\operatorname{cosec} x}=\frac{\operatorname{sen} x+\dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}}{\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}+\dfrac{1}{\operatorname{sen} x}}=\frac{\dfrac{\operatorname{sen}^2 x+\cos x}{\operatorname{sen} x}}{\dfrac{\operatorname{sen}^2 x+\cos x}{\operatorname{sen} x\cos x}}=\frac{\cancel{\left(\operatorname{sen}^2 x+\cos x\right)}\,\cancel{\operatorname{sen} x}\,\cos x}{\cancel{\left(\operatorname{sen}^2 x+\cos x\right)}\,\cancel{\operatorname{sen} x}}=\cos x$$

b) $\operatorname{sen} x\operatorname{sen}(x-y)+\cos x\cos(x-y)=\cos y$

$$\operatorname{sen} x\operatorname{sen}(x-y)+\cos x\cos(x-y)=\operatorname{sen} x(\operatorname{sen} x\cos y-\cos x\operatorname{sen} y)+\cos x(\cos x\cos y+\operatorname{sen} x\operatorname{sen} y)=$$
$$\operatorname{sen}^2 x\cos y-\operatorname{sen} x\cos x\operatorname{sen} y+\cos^2 x\cos y+\operatorname{sen} x\cos x\operatorname{sen} y=\cos y\left(\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x\right)=\cos y$$

10. Solución:

1) $\dfrac{1-\cos^2 x}{\operatorname{sen}(2x)}=\dfrac{\operatorname{tg} x}{2}$

$$\frac{1-\cos^2 x}{\operatorname{sen}(2x)}=\frac{\operatorname{sen}^2 x}{2\operatorname{sen} x\cos x}=\frac{\operatorname{sen} x}{2\cos x}=\frac{\operatorname{tg} x}{2}$$

2) $\operatorname{sen}(2\alpha)=\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$

Aplicamos la fórmula del seno del ángulo doble, en el miembro de la izquierda:

$$\operatorname{sen}(2\alpha)=2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\underset{(1)}{=}\frac{2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha}=2\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}\cos^2\alpha=2\operatorname{tg}\alpha\cos^2\alpha\underset{(2)}{=}2\operatorname{tg}^2\alpha\frac{1}{\dfrac{1}{\cos^2\alpha}}=$$
$$=2\operatorname{tg}^2\alpha\frac{1}{\sec^2\alpha}\underset{(3)}{=}\frac{2\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$$

donde en (1) hemos multiplicado y dividido por $\cos\alpha$, en (2) hemos tenido en cuenta que $\cos^2\alpha=\dfrac{1}{\dfrac{1}{\cos^2\alpha}}$ y, por último, en (3) se ha aplicado la identidad $\sec^2\alpha=1+\operatorname{tg}^2\alpha$.

3) Vamos a desarrollar el miembro de la izquierda, usando la fórmula de la tangente del ángulo doble:

$$\frac{2\operatorname{sen} x}{\operatorname{tg}(2x)}=\frac{2\operatorname{sen} x}{\dfrac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}}=\frac{\cancel{2}\operatorname{sen} x\left(1-\operatorname{tg}^2 x\right)}{\cancel{2}\operatorname{tg} x}=\frac{\operatorname{sen} x-\operatorname{sen} x\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg} x}=\frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} x}-\frac{\operatorname{sen} x\operatorname{tg}^{\cancel{2}} x}{\cancel{\operatorname{tg} x}}=$$
$$=\frac{\operatorname{sen} x}{\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}-\operatorname{sen} x\operatorname{tg} x=\frac{\cancel{\operatorname{sen} x}\cos x}{\cancel{\operatorname{sen} x}}-\operatorname{sen} x\operatorname{tg} x=\cos x-\operatorname{sen} x\operatorname{tg} x$$

4) $\dfrac{2\operatorname{sen} x-\operatorname{sen}(2x)}{2\operatorname{sen} x+\operatorname{sen}(2x)}=\dfrac{2\operatorname{sen} x-2\operatorname{sen} x\cos x}{2\operatorname{sen} x+2\operatorname{sen} x\cos x}=\dfrac{2\operatorname{sen} x(1-\cos x)}{2\operatorname{sen} x(1+\cos x)}=\dfrac{1-\cos x}{1+\operatorname{sen} x}$

5) Usamos las fórmulas del ángulo doble del seno y del coseno:

$$\frac{\operatorname{sen}(2\beta)}{\operatorname{sen}\beta}-\frac{\cos(2\beta)}{\cos\beta}=\frac{2\cancel{\operatorname{sen}\beta}\cos\beta}{\cancel{\operatorname{sen}\beta}}-\frac{\cos^2\beta-\operatorname{sen}^2\beta}{\cos\beta}=2\cos\beta-\left(\frac{\cos^2\beta}{\cos\beta}-\frac{\operatorname{sen}^2\beta}{\cos\beta}\right)=$$
$$=2\cos\beta-\cos\beta+\frac{\operatorname{sen}^2\beta}{\cos\beta}=\frac{2\cos^2\beta-\cos^2\beta+\operatorname{sen}^2\beta}{\cos\beta}=\frac{\cos^2\beta+\operatorname{sen}^2\beta}{\cos\beta}=\frac{1}{\cos\beta}=\sec\beta$$

6) $$\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\operatorname{sen} x}-2\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)=\left(\frac{\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}}{\operatorname{sen} x}-(1-\cos x)\right)\frac{1+\cos x}{2}=$$

$$=\left(\frac{\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}}{\sqrt{1-\cos^2 x}}-(1-\cos x)\right)\frac{1+\cos x}{2}=\left(\sqrt{\frac{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}{1-\cos^2 x}}-(1-\cos x)\right)\frac{1+\cos x}{2}=$$

$$=\left(\sqrt{\frac{(1-\cos x)}{(1+\cos x)(1-\cos^2 x)}}-(1-\cos x)\right)\frac{1+\cos x}{2}=$$

$$=\left(\sqrt{\frac{\cancel{(1-\cos x)}}{(1+\cos x)(1+\cos x)\,\cancel{(1-\cos x)}}}-(1-\cos x)\right)\frac{1+\cos x}{2}=$$

$$=\left(\sqrt{\frac{1}{(1+\cos x)^2}}-(1-\cos x)\right)\frac{1+\cos x}{2}=\left[\frac{1}{1+\cos x}-(1-\cos x)\right]\frac{1+\cos x}{2}=$$

$$=\left(\frac{1-(1-\cos x)(1+\cos x)}{1+\cos x}\right)\frac{1+\cos x}{2}=\left(\frac{1-(1-\cos^2 x)}{1+\cos x}\right)\frac{1+\cos x}{2}=\left(\frac{\cos^2 x}{\cancel{1+\cos x}}\right)\frac{\cancel{1+\cos x}}{2}=$$

$$=\frac{\cos^2 x}{2}$$

11. Solución

$$\operatorname{sen} x\operatorname{sen}(x-y)+\cos x\cos(x-y)=\operatorname{sen} x(\operatorname{sen} x\cos y-\cos x\operatorname{sen} y)+\cos x(\cos x\cos y+\operatorname{sen} x\operatorname{sen} y)=$$

$$\operatorname{sen}^2 x\cos y-\operatorname{sen} x\cos x\operatorname{sen} y+\cos^2 x\cos y+\operatorname{sen} x\cos x\operatorname{sen} y=\cos y\left(\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x\right)=\cos y$$

12. Solución:

1) $$5\operatorname{sen} x=2\Rightarrow \operatorname{sen} x=\frac{2}{5}\Rightarrow\begin{cases}x_1=23^\circ 34'41,44''\\ x_2=180^\circ-23^\circ 34'41,44''=156^\circ 25'18,56''\end{cases}$$

2) $$7\cos x=-1\Rightarrow \cos x=-\frac{1}{7}\Rightarrow\begin{cases}x_1=\arccos\left(-\frac{1}{7}\right)=98^\circ 12'47,56''\\ x_2=180^\circ+98^\circ 12'47,56'=261^\circ 47'12,44''\end{cases}$$

3) $$5\operatorname{tg} x=12\Rightarrow \operatorname{tg} x=\frac{12}{5}\Rightarrow\begin{cases}x_1=\operatorname{arctg}\frac{12}{5}=67^\circ 22'48,49''\\ x_2=247^\circ 22'48,49''\end{cases}$$

4) $$2\operatorname{tg} x=2\Rightarrow \operatorname{tg} x=1\Rightarrow\begin{cases}x_1=\operatorname{arctg}1=45^\circ\\ x_2=225^\circ\end{cases}$$

5) $\operatorname{sen}(2x)=1 \Rightarrow 2x=90^{\circ} \Rightarrow x=45^{\circ}$ y $x=135^{\circ}$

6) $\cos x+\cos(2x)=0 \Rightarrow \cos x+2\operatorname{sen} x\cos x=0 \Rightarrow \cos x(1+2\operatorname{sen} x)=0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x=0 \Rightarrow x_1=\arccos 0=90^{\circ} \text{ y } x_2=270^{\circ} \\ 1+2\operatorname{sen} x=0 \Rightarrow \operatorname{sen} x=-\dfrac{1}{2} \Rightarrow x_3=\operatorname{arcsen}\left(-\dfrac{1}{2}\right)=210^{\circ} \text{ y } x_4=330^{\circ} \end{cases}$$

13. Solución:

1) Es una ecuación de segundo grado en $\cos x$:

$$\cos x=\frac{-1\pm\sqrt{1-4\cdot 2\cdot(-1)}}{4}=\begin{cases} \dfrac{1}{2} \Rightarrow \cos x=\dfrac{1}{2} \Rightarrow x_1=60^{\circ} \text{ y } x_2=300^{\circ} \\ -1 \Rightarrow \cos x=-1 \Rightarrow x_3=180^{\circ} \end{cases}$$

Las tres soluciones obtenidas son válidas.

2) $2\operatorname{sen}^2 x-1=0 \Rightarrow \operatorname{sen}^2 x=\dfrac{1}{2} \Rightarrow \operatorname{sen} x=\pm\sqrt{\dfrac{1}{2}}=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Si $\operatorname{sen} x=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x_1=45^{\circ}$ y $x_2=180^{\circ}-45^{\circ}=135^{\circ}$

Si $\operatorname{sen} x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x_3=-45^{\circ}=315^{\circ}$ y $x_4=180^{\circ}+45^{\circ}=225^{\circ}$

Las cuatro soluciones son válidas.

3) $\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{tg} x=0 \Rightarrow \operatorname{tg} x(\operatorname{tg} x-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x=0 \Rightarrow x_1=\operatorname{arctg} 0=0^{\circ} \text{ y } x_2=180^{\circ} \\ 1-\operatorname{tg} x=0 \Rightarrow \operatorname{tg} x=1 \Rightarrow x_3=\operatorname{arctg} 1=45^{\circ} \text{ y } x_4=225^{\circ} \end{cases}$

Las cuatro soluciones obtenidas son válidas.

4) $2\operatorname{sen}^2 x+3\cos x=3 \Rightarrow \left[\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x=1\right]\ 2\left(1-\cos^2 x\right)+3\cos x=3 \Rightarrow -2\cos^2 x+3\cos x+1=0$

que es una ecuación de segundo grado en $\cos x$:

$$\cos x=\frac{3\pm\sqrt{9-4\cdot 2\cdot 1}}{2\cdot 2}=\begin{cases} 1 \Rightarrow \cos x=1 \Rightarrow x_1=\arccos 1=0^{\circ} \\ \dfrac{1}{2} \Rightarrow \cos x=\dfrac{1}{2} \Rightarrow x_2=\arccos\dfrac{1}{2}=60^{\circ} \text{ y } x_3=-60^{\circ}=300^{\circ} \end{cases}$$

Las tres son soluciones de la ecuación original.

5) $4\cos(2x)+3\cos x=1 \Rightarrow 4\left(\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x\right)+3\cos x=1 \Rightarrow \left[\operatorname{sen}^2 x=1-\cos^2 x\right]$

$4\left[\cos^2 x-\left(1-\cos^2 x\right)\right]+3\cos x=1 \Rightarrow 4\left[2\cos^2 x-1\right]+3\cos x=1 \Rightarrow 8\cos^2 x-4+3\cos x=1$

$\Rightarrow 8\cos^2 x+3\cos x-5=0$, que es una ecuación de segundo grado en $\cos x$:

$$\cos x=\frac{-3\pm 13}{16}=\begin{cases} \dfrac{5}{8} \Rightarrow \cos x=\dfrac{5}{8} \Rightarrow x_1=\arccos\dfrac{5}{8}=51^{\circ}19'4{,}13'' \text{ y } x_2=-51^{\circ}19'4{,}13'' \\ -1 \Rightarrow \cos x=-1 \Rightarrow x_3=\arccos(-1)=180^{\circ} \end{cases}$$

Las tres soluciones son válidas.

6) $\operatorname{tg}(2x)+2\cos x=0 \Rightarrow \dfrac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}+2\cos x=0 \Rightarrow$ (el 2 se puede simplificar)

$$\frac{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{1-\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}}+\cos x=0 \Rightarrow \frac{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{\frac{\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}}+\cos x=0 \Rightarrow \frac{\operatorname{sen} x\cos x}{\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x}+\cos x=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\operatorname{sen} x\cos x}{\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x}+\frac{\cos x\left(\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x\right)}{\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x}=0 \Rightarrow \operatorname{sen} x\cos x+\cos x\left(\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x\right)=0$$

$$\Rightarrow \left(\text{sacando factor común}\right)\ \cos x\left(\operatorname{sen} x+\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x\right)=0 \Rightarrow \left[\cos^2 x=1-\operatorname{sen}^2 x\right]$$

$$\Rightarrow \cos x\left(\operatorname{sen} x+1-\operatorname{sen}^2 x-\operatorname{sen}^2 x\right)=0 \Rightarrow \begin{cases}\cos x=0\\ 1+\operatorname{sen} x-2\operatorname{sen}^2 x=0 \Rightarrow \operatorname{sen} x=\dfrac{-1\pm 3}{-4}=\begin{cases}-\dfrac{1}{2}\\ 1\end{cases}\end{cases}$$

Si $\cos x=0 \Rightarrow x_1=90^\circ$ y $x_2=270^\circ$

$\operatorname{sen} x=-\frac{1}{2} \Rightarrow x_3=210^\circ$ y $x_4=330^\circ=-30^\circ$

$\operatorname{sen} x=1 \Rightarrow x_5=90^\circ=x_1$

Las cuatro son soluciones válidas.

7) $\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}-\cos x=1 \Rightarrow \sqrt{2}\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}-\cos x=1 \Rightarrow \sqrt{1+\cos x}-\cos x=1 \Rightarrow$

$\sqrt{1+\cos x}=1+\cos x \Rightarrow \left(\text{elevando al cuadrado}\right)\ 1+\cos x=1+\cos^2 x+2\cos x \Rightarrow$

$$\Rightarrow \cos^2 x+\cos x=0 \Rightarrow \cos x\left(\cos x+1\right)=0 \Rightarrow \begin{cases}\cos x=0 \Rightarrow x_1=90^\circ \text{ y } x_2=270^\circ\\ \cos x=-1 \Rightarrow x_3=180^\circ\end{cases}$$

Al comprobar, se obtiene que las únicas soluciones válidas son 90º y 180º.

8) $2\operatorname{sen} x\cos^2 x-6\operatorname{sen}^3 x=0 \Rightarrow 2\operatorname{sen} x\left(\cos^2 x-3\operatorname{sen}^2 x\right)=0 \Rightarrow \left[\cos^2 x=1-\operatorname{sen}^2 x\right]$

$$2\operatorname{sen} x\left(\cos^2 x+\operatorname{sen}^2 x-4\operatorname{sen}^2 x\right)=0 \Rightarrow 2\operatorname{sen} x\left(1-4\operatorname{sen}^2 x\right)=0 \Rightarrow \begin{cases}\operatorname{sen} x=0\\ \operatorname{sen}^2 x=\dfrac{1}{4}\end{cases}$$

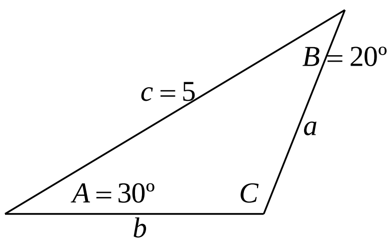
Si $\operatorname{sen} x=0 \Rightarrow x_1=0^\circ$ y $x_2=180^\circ$

$\operatorname{sen}^2 x=\frac{1}{4} \Rightarrow \operatorname{sen} x=\pm\sqrt{\frac{1}{4}}=\pm\frac{1}{2} \Rightarrow x_3=30^\circ,\ x_4=150^\circ,\ x_5=210^\circ$ y $x_6=330^\circ$

Las seis soluciones obtenidas son válidas.

14. Resuelve los siguientes triángulos:

a) Datos: $c=5$, $A=30^\circ$ y $B=20^\circ$



Calculamos el ángulo C:

$$C=180^\circ-\left(30^\circ+20^\circ\right)=130^\circ$$

Calculamos a:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} 30^\circ} = \frac{5}{\operatorname{sen} 130^\circ} \rightarrow a = 5 \cdot \frac{\operatorname{sen} 30^\circ}{\operatorname{sen} 130^\circ} = \boxed{3,26}$$

Calculamos b:

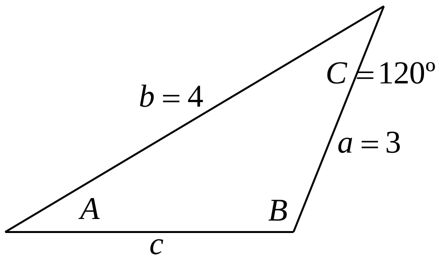
$$\frac{b}{\operatorname{sen} 20^\circ} = \frac{5}{\operatorname{sen} 130^\circ} \rightarrow b = 5 \cdot \frac{\operatorname{sen} 20^\circ}{\operatorname{sen} 130^\circ} = \boxed{2,23}$$

b) Datos: $a = 3, b = 4$ y $C = 120^\circ$

Calculamos c:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C = 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cos 120^\circ = 37$$

$$\boxed{c = \sqrt{37} = 6,08}$$



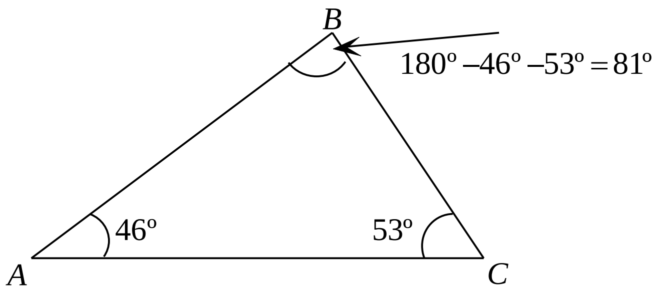
Calculamos A:

$$\frac{3}{\operatorname{sen} A} = \frac{\sqrt{37}}{\operatorname{sen} 120^\circ} \rightarrow \operatorname{sen} A = \frac{3}{\sqrt{37}} \operatorname{sen} 120^\circ \rightarrow \boxed{A = 25^\circ 17' 5,99''}$$

Calculamos B:

$$B = 180^\circ - \left(120^\circ + 25^\circ 17' 5,99''\right) = \boxed{34^\circ 42' 54,01'' = B}$$

15. Un barco B pide socorro y se reciben sus señales en dos estaciones de radio, A y C, que distan entre sí 50 km. Desde las estaciones se miden los siguientes ángulos: BAC = 46º y BCA = 53º. ¿A qué distancia de cada estación se encuentra el barco?



$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B}$$

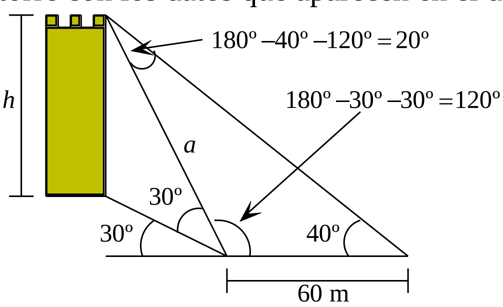
$$a = \frac{b \operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} B} = \frac{50 \cdot \operatorname{sen} 46^\circ}{\operatorname{sen} 81^\circ} = \boxed{36,42 \text{ km}}$$

$$\frac{c}{\operatorname{sen} C} = \frac{b}{\operatorname{sen} B}$$

$$c = \frac{b \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} B} = \frac{50 \cdot \operatorname{sen} 53^\circ}{\operatorname{sen} 81^\circ} = \boxed{40,43 \text{ km}}$$

Por tanto, el barco se encuentra a $\boxed{40,43 \text{ km de A y a 36,42 km de C}}$.

16. Calcula la altura de la torre con los datos que aparecen en el dibujo.

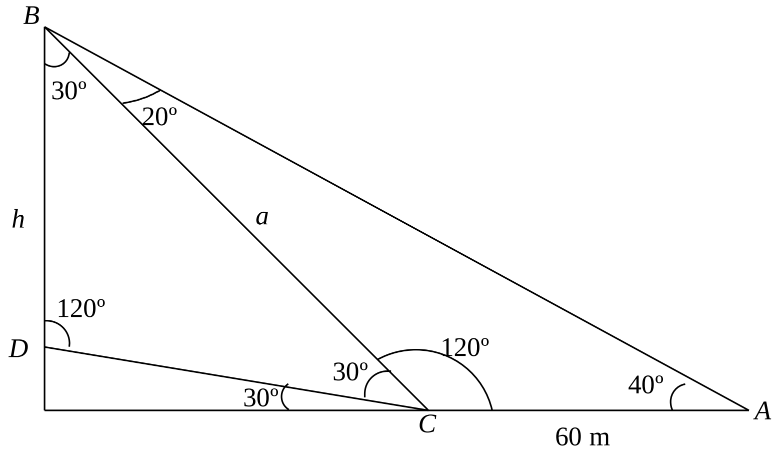


Calculamos a aplicando el teorema de los senos:

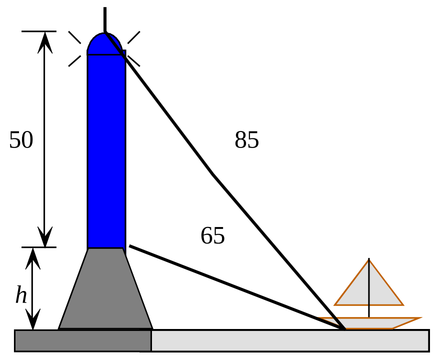
$$\frac{60}{\text{sen }20^\circ}=\frac{a}{\text{sen }40^\circ}\to a=\frac{60\cdot\text{sen }40^\circ}{\text{sen }20^\circ}=112,76\text{ m}$$

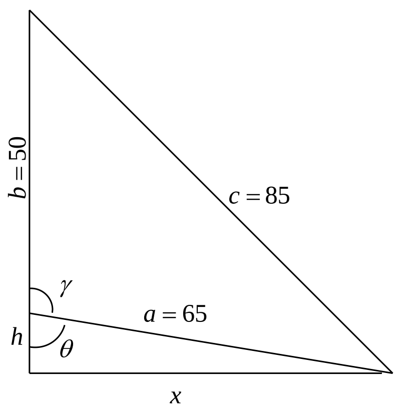
Para calcular h, volvemos a aplicar el teorema de los senos:

$$\frac{112,76}{\text{sen}120^\circ}=\frac{h}{\text{sen }30^\circ}\to h=\frac{112,76\cdot\text{sen }30^\circ}{\text{sen}120^\circ}=\boxed{65{,}10\text{ m}}$$



17. El faro de la figura aparece sobre un promontorio de altura desconocida sobre el mar. La altura del faro es de 50 m, y la distancia al barco desde los extremos inferior y superior del faro es de 65 m y 85 m respectivamente. Halla la altura de promontorio.





Por el teorema del coseno:

$$\cos\gamma=\frac{85^2-65^2-50^2}{-2\cdot 50\cdot 65}=-0,077\to\gamma=94^\circ 25'$$

Como consecuencia:

$$\theta=180^\circ-94^\circ 25'=85^\circ 35'$$

Para calcular h, aplicamos la definición de coseno del ángulo θ:

$$\cos\theta=\frac{h}{a}\to h=a\cos\theta=65\cdot\cos 85^\circ 35'=\boxed{5\text{ m}}$$

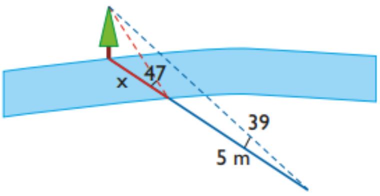
De otra forma:

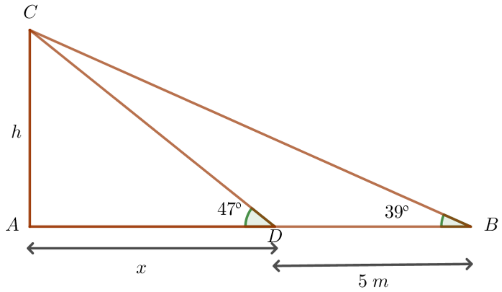
Aplicando el teorema de Pitágoras, dos veces, obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l}85^2=x^2+(50+h)^2\\ 65^2=h^2+x^2\end{array}\right\}\xrightarrow{\cdot(-1)}\begin{array}{r}85^2=x^2+50^2+h^2+2\cdot 50\cdot h\\ -65^2=-h^2-x^2\end{array}\to h=\frac{85^2-50^2-65^2}{2\cdot 50}=\boxed{5\text{ m}}$$

18. Se quiere medir la anchura de un río. Para ello se observa un árbol que está en la otra orilla. Se mide el ángulo de elevación desde esta orilla a la parte más alta del árbol y se obtiene 47°.

Alejándose 5 m del río, se vuelve a medir el ángulo de elevación y se obtiene 39°. Calcula la anchura del río.





$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{tg} 47^o = \dfrac{h}{x} \\ \operatorname{tg} 39^o = \dfrac{h}{5+x} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} h = x \operatorname{tg} 47^o \\ h = (5+x) \operatorname{tg} 39^o \end{array}\right\} \Rightarrow x \operatorname{tg} 47^o = (5+x) \operatorname{tg} 39^o \Rightarrow x = \frac{5 \operatorname{tg} 39^o}{\operatorname{tg} 47^o - \operatorname{tg} 39^o} = 15,42$$

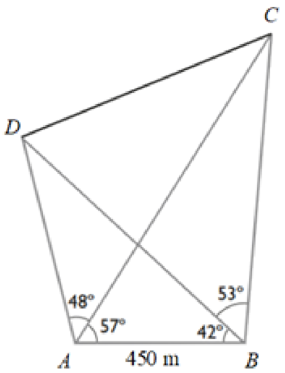
La anchura del río es 15,42 m.

19. Halla la distancia que hay entre dos barcos *C* y *D*, sabiendo que hemos medido la distancia que hay entre *A* y *B* y hemos obtenido 450 m, y que con el teodolito hemos obtenido que $CAD = 48^o$, $BAD = 57^o$, $ABC = 42^o$ y $CBD = 53^o$.

En el triángulo ABC calculamos $\overline{AC}$:

$$ADB = 180^o - (57^o + 42^o + 53^o) = 28^o$$

$$\frac{450}{\operatorname{sen} 28^o} = \frac{\overline{AC}}{\operatorname{sen} 95^o} \Rightarrow \overline{AC} = \frac{450 \operatorname{sen} 95^o}{\operatorname{sen} 28^o} = 954,88 \text{ m}$$



En el triángulo ABD calculamos $\overline{AD}$:

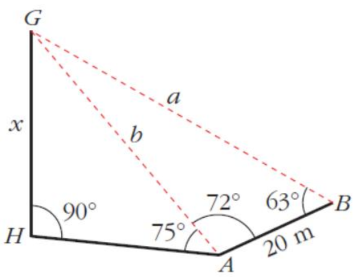
$$ACB = 180^o - (48^o + 57^o + 42^o) = 33^o$$

$$\frac{450}{\operatorname{sen} 33^o} = \frac{\overline{AD}}{\operatorname{sen} 42^o} \Rightarrow \overline{AD} = \frac{450 \operatorname{sen} 42^o}{\operatorname{sen} 33^o} = 552,86 \text{ m}$$

En el triángulo ACD calculamos $\overline{CD}$:

$$\overline{CD}^2 = 954,88^2 + 552,86^2 - 2 \cdot 552,86 \cdot 954,88 \cdot \cos 48^o \Rightarrow \boxed{\overline{CD} = 714,82 \text{ m}}$$

20.



$$\widehat{AGB} = 180^\circ - 72^\circ - 63^\circ = 45^\circ$$

- $\dfrac{b}{sen\ 63^\circ} = \dfrac{20}{sen\ 45^\circ} \rightarrow b = \dfrac{20 \cdot sen\ 63^\circ}{sen\ 45^\circ} = 25{,}2 \text{ m}$
- $\dfrac{a}{sen\ 72^\circ} = \dfrac{20}{sen\ 45^\circ} \rightarrow a = \dfrac{20 \cdot sen\ 72^\circ}{sen\ 45^\circ} = 26{,}9 \text{ m}$
- $sen\ 75^\circ = \dfrac{x}{b} = \dfrac{x}{25{,}2} \rightarrow x = 25{,}2 \cdot sen\ 75^\circ = 24{,}3 \text{ m}$