Problemas de sistemas de ecuaciones lineales: método de Gauss

La esencia de las matemáticas no es hacer las cosas simples complicadas,
sino hacer las cosas complicadas simples.
S. Gudder.

1. Una determinada compañía de teatro presenta una obra en una ciudad, dando sólo tres representaciones. Se sabe que el número de espectadores que asiste a la segunda representación se incrementó en un 12 % respecto a la primera, que a la tercera asistieron 336 espectadores menos que a la segunda y que el número de espectadores de la primera superó en 36 espectadores el de la tercera. Calcular el número de espectadores que asistieron a cada representación.

2. Los habitantes de una ciudad tienen los ojos de color azul, o de color negro o de color marrón. El número de los que tienen ojos azules, aumentado en 5, es igual a la sexta parte del número de los que tienen los ojos negros o marrones. El número de los que tienen ojos negros, disminuido en 75, es igual a la mitad de los que tienen los ojos azules o marrones. Finalmente, el número de los que tienen ojos marrones, aumentado en 50, es igual al número de los que tienen los ojos azules o negros. ¿Cuántos habitantes tiene la ciudad?

3. Tres amigas, Elena, Carmen y Cristina entran en una tienda de deportes en la que sólo hay tres tipos de artículos. Elena se compra 2 pares de zapatillas, 1 sudadera y 1 pantalón. Carmen se compra 1 par de zapatillas, 2 sudaderas y 2 pantalones, y Cristina se compra 2 pares de zapatillas y 3 pantalones. Elena se ha gastado en total 70 euros, Carmen 80 euros y Cristina 70 euros. ¿Cuánto vale cada artículo?

4. Un grupo de 30 alumnos de 2° de bachillerato realiza una votación a fin de determinar el destino de la excursión fin de curso, entre los siguientes lugares: Baleares, Canarias y París. El número de los que prefieren Baleares triplica al número de los que prefieren París. El 40% de los que prefieren Canarias coincide con la quinta parte de la suma de los que prefieren los otros dos lugares. Halla el número de votos que obtuvo cada destino.

5. Hallar las edades de un padre y de sus dos hijos sabiendo que actualmente las tres suman 88 años; que dentro de 10 años, la suma de las edades que tendrán el padre y el hijo menor excederá en 2 años al triple de la edad que tendrá el hijo mayor y que hace 12 años, la suma de las edades que tenía el padre y el hijo mayor era doce veces la edad que tenía el hijo pequeño.

6. Las edades de tres vecinos suman 54 años y son proporcionales a 2, 3 y 4. Halla la edad de cada uno de ellos.

7. En una clase se celebran elecciones para delegado. Se presentan dos candidatos: X e Y. El 5% del total de votos emitidos es nulo. Cuatro veces el número de votos obtenido por Y menos tres veces el número de votos obtenidos por X excede al número de votos nulos en una unidad. Si dividimos el número de votos obtenidos por X entre el número de los obtenidos por Y se obtiene de cociente 1 y de resto 7. ¿Cuántos votos obtuvo cada candidato?

8. Una determinada Universidad tiene 1000 profesores entre Catedráticos, Titulares y Asociados. Si 50 Titulares pasaran a ser Catedráticos, el número de Titulares restantes sería doble que el número de Catedráticos que resultarían del traspaso más el número de Asociados. En cambio, si 100 Titulares pasaran a ser Catedráticos, entonces el número de Titulares restantes sería igual que la suma del número de Catedráticos resultantes del traspaso y el número de Asociados. Halla el número inicial de profesores de cada categoría.

9. Los 30 alumnos de un grupo de 4º de ESO cursan tres asignaturas optativas distintas: Francés, Cultura Clásica y Energías alternativas. Si dos alumnos de Francés se hubiesen matriculado de Cultura Clásica, entonces estas dos asignaturas tendría el mismo número de alumnos. Si dos alumnos de Cultura Clásica se hubiesen matriculado en Energías Alternativas, entonces Energías Alternativas tendría doble número de alumnos que Cultura Clásica. Halla el número de alumnos matriculado en cada asignatura.

10. (*) Tres amigos, A, B y C deciden hacer un fondo común con el dinero que tienen para hacer una compra de golosinas. La razón entre la suma y la diferencia de las cantidades de dinero que tienen A y B es 11/5. Dividiendo la cantidad de dinero que tiene A entre la cantidad de dinero que tiene B se obtiene de cociente 2 y de resto la cantidad de dinero que tiene C. Halla la cantidad de dinero que tiene cada uno sabiendo, además, que el doble de la suma de las que tienen B y C excede en 2 euros a la que tiene A.

11. Disponemos de tres lingotes de distintas aleaciones de tres metales A, B y C. El primer lingote contiene 20 g del metal A, 20 g del B y 60 del C. El segundo contiene 10 g de A, 40 g de B y 50 g de C. El tercero contiene 20 g de A, 40 g de B y 40 g de C. Queremos elaborar, a partir de estos lingotes, uno nuevo que contenga 15 g de A, 35 g de B y 50 g de C. ¿Cuántos gramos hay que coger de cada uno de los tres lingotes?

12. En una reunión hay 22 personas, entre hombres, mujeres y niños. El doble del número de mujeres más el triple del número de niños, es igual al doble del número de hombres. Si, además, se sabe que el número de hombres es el doble del de mujeres, ¿cuántos hombres, mujeres y niños hay?

13. Por un rotulador, un cuaderno y una carpeta se pagan 3,56 euros. Se sabe que el precio del cuaderno es la mitad del precio del rotulador y que, el precio de la carpeta es igual al precio del cuaderno más el 20 % del precio del rotulador. Calcula los precios que marcaba cada una de las cosas, sabiendo que sobre esos precios se ha hecho el 10 % de descuento.

14. En una residencia de estudiantes se compran semanalmente 110 helados de distintos sabores: vainilla, chocolate y nata. El presupuesto destinado para esta compra es de 540 euros y el precio de cada helado es de 4 euros el de vainilla, 5 euros el de chocolate y 6 euros el de nata. Conocidos los gustos de los estudiantes, se sabe que entre helados de chocolate y de nata se han de comprar el 20 % más que de vainilla.

a) Plantea un sistema de ecuaciones lineales para calcular cuántos helados de cada sabor se compran a la semana.

b) Resuelve, mediante el método de Gauss, el sistema planteado en el apartado anterior.

15. Una compañía fabricó tres tipos de muebles: sillas, mecedoras y sofás. Para la fabricación de cada uno de estos tipos necesitó la utilización de ciertas unidades de madera, plástico y aluminio tal y como se indica en la tabla siguiente. La compañía tenía en existencia 400 unidades de madera, 600 unidades de plástico y 1 500 unidades de aluminio. Si la compañía utilizó todas sus existencias, ¿cuántas sillas, mecedoras y sofás fabricó?

16. En una tienda, un cliente se ha gastado 150 euros en la compra de 12 artículos, entre discos, libros y carpetas. Cada disco le ha costado 20 euros, cada libro 15 euros, y cada carpeta 5 euros. Se sabe que entre discos y carpetas hay el triple que de libros.

a) Formula el sistema de ecuaciones asociado al enunciado anterior.

b) Determina cuántos artículos ha comprado de cada tipo.

17. Dos kilos de naranjas, más un kilo de plátanos, más dos kilos de mangos, valen 16,75 euros. Dos kilos de naranjas, más dos kilos de plátanos, más 3 de mangos, valen 25 euros. Tres kilos de naranjas, más un kilo de plátanos, más dos kilos de mangos, valen 17,75 euros. ¿Cuánto vale 1 kilo de naranjas? ¿Cuánto vale 1 kilo de plátanos? ¿Cuánto vale 1 kilo de mangos?

18. Un estado compra 540 000 barriles de petróleo a tres suministradores diferentes que lo venden a 27, 28 y 32 dólares el barril, respectivamente. La factura total asciende a 16 346 000 dólares. Si del primer suministrador recibe el 30 % del total de petróleo comprado, ¿cuál es la cantidad comprada a cada suministrador?

19. De un número de tres cifras se sabe que la suma de estas es 13. Si se intercambian las cifras de las unidades y las centenas, el número disminuye en 198; y, si se intercambian las de la unidades y decenas, el número aumenta en 36. Encuentra el número.

20. Si la altura de Luis aumentase el triple de la diferencia entre la altura de Eusebio y de Pablo, Luis sería igual de alto que Pablo. Las alturas de los tres suman 515 cm. Ocho veces la altura de Eusebio es lo mismo que nueve veces la de Luis. Halla las tres alturas.

21. La suma de las tres cifras de un número es 6; y, si se intercambian la primera y la segunda, el número aumenta en 90 unidades. Finalmente, si se intercambian la segunda y la tercera, el número aumenta en 9 unidades. Calcula dicho número.

22. Un almacén distribuye cierto producto que fabrican tres marcas distintas: A, B y C. La marca A lo envasa en cajas de 250 g y su precio es de 1 euro; la marca B lo envasa en cajas de 500 g a un precio de 180 céntimos de euro; y, la marca C, lo hace en cajas de 1 kg a un precio de 330 céntimos. El almacén vende a un cliente 2,5 kg de este producto por un importe de 8,9 euros. Sabiendo que el lote iba envasado en 5 cajas, calcula cuántos envases de cada tipo se han comprado.

SOLUCIONES

Problema 1:

$x =$ nº de espectadores de la 1ª representación

$y =$ nº de espectadores de la 2ª representación

$z =$ nº de espectadores de la 3ª representación

$$\begin{cases} y = x + 0.12x \\ z = y - 336 \\ x = z + 36 \end{cases} \rightarrow (x, y, z) = (2\ 500, 2\ 800, 2\ 464)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1{,}12 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -336 \\ 1 & 0 & -1 & 36 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 36 \\ 0 & -1 & 1 & -336 \\ 1{,}12 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{-1{,}12F_1 + F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 36 \\ 0 & -1 & 1 & -336 \\ 0 & -1 & 1{,}12 & -40{,}32 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\xrightarrow{-F_2 + F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 36 \\ 0 & -1 & 1 & -336 \\ 0 & 0 & 0{,}12 & 295{,}68 \end{array}\right) \begin{array}{c} [1] \\ [2] \\ [3] \end{array}$$

De [3]: $z = \dfrac{295{,}68}{0{,}12} = 2464$

Sustituimos en [2]: $y = \dfrac{-336 - 2464}{-1} = 2800$

Sustituimos en [1]: $x = 36 + 2464 = 2500$

A la primera representación asistieron 2 500 personas, a la segunda 2 800, y a la tercera 2 464.

Problema 2:

$x =$ nº de habitantes con los ojos azules

$y =$ nº de habitantes con los ojos negros

$z =$ nº de habitantes con los ojos marrones

$$\begin{cases} x + 5 = \dfrac{1}{6}(y + z) \\ y - 75 = \dfrac{1}{2}(x + z) \\ z + 50 = x + y \end{cases} \rightarrow (x, y, z) = (120, 340, 410)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -1 & -1 & -30 \\ -1 & 2 & -1 & 150 \\ 1 & 1 & -1 & 50 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1 + 6F_2]{F_2 + F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -1 & -1 & -30 \\ 0 & 11 & -7 & 870 \\ 0 & 3 & -2 & 200 \end{array}\right) \xrightarrow{-3F_2 + 11F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -1 & -1 & -30 \\ 0 & 11 & -7 & 870 \\ 0 & 0 & -1 & -410 \end{array}\right) \begin{array}{c} [1] \\ [2] \\ [3] \end{array}$$

De [3]: $z = \dfrac{-410}{-1} = 410$

Sustituimos en [2]: $y = \dfrac{870 + 7 \cdot 410}{11} = 340$

Sustituimos en [1]: $x = \dfrac{-30 + 340 + 410}{6} = 120$

Hay 120 habitantes con los ojos azules, 340 con los ojos negros y 410 con los ojos de color marrón.

Problema 3:

$x =$ precio del par de zapatillas

$y =$ precio de una sudadera

$z =$ precio de un pantalón

$$\begin{cases} 2x+y+z=70 \\ x+2y+2z=80 \\ 2x+3z=70 \end{cases} \rightarrow (x,y,z)=(20,\ 20,\ 10)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 70 \\ 1 & 2 & 2 & 80 \\ 2 & 0 & 3 & 70 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1+F_3]{F_1-2F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 70 \\ 0 & -3 & -3 & -90 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2-3F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 70 \\ 0 & -3 & -3 & -90 \\ 0 & 0 & -9 & -90 \end{array}\right) \begin{array}{c} [1] \\ [2] \\ [3] \end{array}$$

De [3]: $z=\dfrac{-90}{-9}=10$

Sustituimos en [2]: $y=\dfrac{-90+3\cdot 10}{-3}=20$

Sustituimos en [1]: $x=\dfrac{70-20-10}{2}=20$

Por tanto, un par de zapatillas cuesta 20€, una sudadera 20 € y un pantalón 10 €.

Problema 4:

$x =$ número de votos de Baleares

$y =$ número de votos de Canarias

$z =$ número de votos de París

$$\begin{cases} x+y+z=30 \\ x=3z \\ 0.4y=\dfrac{1}{5}(x+z) \end{cases} \rightarrow (x,y,z)=(15,10,5)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 30 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[-2F_1+F_3]{-F_1+F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 30 \\ 0 & -1 & -4 & -30 \\ 0 & -6 & 0 & -60 \end{array}\right) \begin{array}{c} [1] \\ [2] \\ [3] \end{array}$$

De [3]: $y=\dfrac{-60}{-6}=10$

Sustituimos en [2]: $z=\dfrac{-30+10}{-4}=5$

Sustituimos en [1]: $x=30-10-5=15$

Por tanto, Baleares obtuvo 15 votos, Canarias 10 y París 5 votos.

Problema 5:

$x =$ edad actual del padre

$y =$ edad del hijo mayor

$z =$ edad del hijo menor

$$\begin{cases} x+y+z=88 \\ (x+10)+(z+10)=3(y+10)+2 \to (x,y,z)=(53,19,16) \\ (x-12)+(y-12)=12(z-12) \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 88 \\ 1 & -3 & 1 & 12 \\ 1 & 1 & -12 & -120 \end{array}\right) \xrightarrow[-F_1+F_3]{-F_1+F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 88 \\ 0 & -4 & 0 & -76 \\ 0 & 0 & -13 & -208 \end{array}\right)\begin{array}{c} [1] \\ [2] \\ [3] \end{array}$$

De [3]: $z=\dfrac{-208}{-13}=16$

De [2]: $y=\dfrac{-76}{-4}=19$

Sustituimos en [1]: $x=88-19-16=53$

Así, el padre tiene 53 años, el hijo mayor 19 y el hijo menor 16 años.

Problema 6:

Sean *x*, *y*, *z* las edades de los vecinos:

$$\begin{cases} x+y+z=54 \\ \dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z}{4} \to \begin{cases} 3x=2y \\ 4x=2z \end{cases} \end{cases} \to (x,y,z)=(12,18,24)$$

Las edades de los tres vecinos son: 12, 18 y 24 años respectivamente.

Problema 7:

$x=$ nº de votos que obtuvo el candidato X

$y=$ nº de votos que obtuvo el candidato Y

$z=$ nº de votos nulos

$$\begin{cases} z=\dfrac{5}{100}(x+y+z) \\ 4y-3x=z+1 \\ x=y+7 \end{cases} \to (x,y,z)=(32,25,3)$$

Así, el candidato X ha obtenido 32 votos y el candidato Y obtuvo 25 votos

Problema 8:

$x=$ nº de catedráticos

$y=$ nº de Titulares

$z=$ nº de Asociados

$$\begin{cases} x+y+z=1000 \\ y-50=2(x+50)+z \to (x,y,z)=(50,600,350) \\ y-100=x+100+z \end{cases}$$

Por tanto, hay 50 Catedráticos, 600 profesores Titulares y 350 profesores Asociados.

Problema 9:

$x =$ nº de alumnos que cursan Francés

$y =$ nº de alumnos que cursan Cultura Clásica

$z =$ nº de alumnos que cursan Energías Alternativas

$$\begin{cases} x+y+z=30 \\ x-2=y+2 \\ 2(y-2)=z+2 \end{cases} \rightarrow (x,y,z)=(12,8,10)$$

Por tanto, hay 12 alumnos que cursan Francés, 8 que cursan Cultura Clásica y 10 que cursan Energías Alternativas.

Problema 10:

$x =$ dinero que pone A

$y =$ dinero que pone B

$z =$ dinero que pone C

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y}=\dfrac{11}{5} \\ x=2y+z \\ 2(y+z)=x+2 \end{cases} \rightarrow (x,y,z)=(8,3,2)$$

Por tanto, A pone 8 €, B pone 3 € y C pone 2 €.

Problema 11:

$$\begin{cases} x = \text{ gramos que hay que coger del primer lingote} \\ y = \text{ gramos que hay que coger del segundo lingote} \\ z = \text{ gramos que hay que coger del tercer lingote} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0,2x + 0,1y + 0,2z = 15 \\ 0,2x + 0,4y + 0,4z = 35 \\ 0,6x + 0,5y + 0,4z = 50 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y + 2z = 150 \\ 2x + 4y + 4z = 350 \\ 6x + 5y + 4z = 500 \end{cases} \Rightarrow (x,y,z)=(25,50,25)$$

Problema 12:

$$\begin{cases} x = \text{ número de hombres} \\ y = \text{ número de mujeres} \\ z = \text{ número de niños} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 22 \\ -2x + 2y + 3z = 0 \\ x = 2y \end{cases} \Rightarrow (x,y,z)=(12,6,4)$$

Problema 13:

$$\begin{cases} x = \text{ precio (sin descuesto) de un rotulador} \\ y = \text{ precio (sin descuesto) de un cuaderno} \\ z = \text{ precio (sin descuesto) de una carpeta} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0,9x+0,9y+0,9z=3,56 \\ y=\dfrac{x}{2} \\ z=y+0,2x \end{cases} \Rightarrow (x,y,z)=(1{,}80\ ,\ 0{,}90\ ,\ 1{,}26)$$

Problema 14:

$$\begin{cases} x = \text{ número de helados de vainilla que se compran semanalmente} \\ y = \text{ número de helados de chocolate que se compran semanalmente} \\ z = \text{ número de helados de nata que se compran semanalmente} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+z=110 \\ 4x+5y+6z=540 \Rightarrow (x,y,z)=(50,20,40) \\ y+z=540 \end{cases}$$

Problema 15:

$$\begin{cases} x = \text{ número de sillas fabricadas} \\ x = \text{ número de mecedoras fabricadas} \\ z = \text{ número de sofás fabricados} \end{cases} \begin{cases} x + y + z = 400 \\ x + y + 2z = 600 \Rightarrow (x,y,z)=(100,100,200) \\ 2x + 3y + 5z = 1500 \end{cases}$$

Problema 16:

$$\begin{cases} x = \text{ número de discos} \\ y = \text{ número de libros} \\ z = \text{ número de carpetas} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=12 \\ 20x+15y+5z=150 \Rightarrow (x,y,z)=(4,3,5) \\ x-3y+z=0 \end{cases}$$

Problema 17:

$$\begin{cases} x = \text{ precio de 1 kg de naranjas} \\ y = \text{ precio de 1 kg de plátanos} \\ z = \text{ precio de 1 kg de mangos} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+y+2z=16,75 \\ 2x+2y+3z=25 \quad \Rightarrow (x,y,z)=(1 \ , \ 1{,}75 \ , 6{,}5) \\ 3x+y+2z=17,75 \end{cases}$$

Problema 18:

$$\begin{cases} x = \text{ número de barriles que compra al primer suministrador} \\ y = \text{ número de barriles que compra al segundo suministrador} \\ z = \text{número de barriles que compra al tercer suministrador} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+z=540\ 000 \\ 27x+28y+32z=16\ 346\ 000 \Rightarrow (x,y,z)=(162\ 000 \ , \ 31\ 000 \ , \ 347\ 000) \\ x=0,3\cdot 540\ 000 \end{cases}$$

Problema 19:

$$\text{Si el número es } xyz \Rightarrow \begin{cases} x = \text{cifra de las centenas} \\ y = \text{cifra de las decenas} \\ z = \text{cifra de las unidades} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+z=13 \\ 100z+10y+x=(100x+10y+z)-198 \Rightarrow (x,y,z)=(7,1,5) \Rightarrow \text{El número es 715} \\ 100x+10z+y=(100x+10y+z)+36 \end{cases}$$

Problema 20:

$$\begin{cases} x = \text{ altura de Luis} \\ y = \text{ altura de Eusebio} \\ z = \text{ altura de Pablo} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+3(y-z)=z \\ x+y+z=515 \\ 8y=9x \end{cases} \Rightarrow (x,y,z)=(160,180,175)$$

Problema 21:

$$\begin{cases} x = \text{ primera cifra} \\ y = \text{ segunda cifra} \\ z = \text{ tercera cifra} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=6 \\ 100y+10x+z=(100x+10y+z)+90 \\ 100x+10z+y=(100x+10y+z)+9 \end{cases} \Rightarrow (x,y,z)=(1,2,3)$$

El número es 123

Problema 22:

$$\begin{cases} x = \text{ número de envases que se han comprado de la marca A} \\ y = \text{ número de envases que se han comprado de la marca B} \\ z = \text{ número de envases que se han comprado de la marca C} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+z=5 \text{ (cajas)} \\ 0,25x+0,5y+z=2,5 \text{ (kilos)} \\ x+1,8y+3,3z=8,9 \text{ (euros)} \end{cases} \Rightarrow (x,y,z)=(2,2,1)$$