Ecuaciones, inecuaciones y sistemas

Matemáticas I

1. Resuelve las siguientes ecuaciones, ***comprobando si los valores obtenidos son solución o no***, cuando sea necesario:

a) $\dfrac{(2x-1)(2x+1)}{3}+\dfrac{(x-2)^2}{4}=\dfrac{3x+4}{6}+\dfrac{x^2}{3}$

b) $x^6+7x^3-8=0$

c) $\sqrt{x}+x=\sqrt{3x+x^2}$

d) $\dfrac{5}{x+2}+\dfrac{x}{x+3}=\dfrac{3}{2}$

e) $\left(\dfrac{1}{16}\right)^{-x+3}=32^{3x-2}$

f) $\ln(3x-1)=\ln 2+\ln(4x-6)$

g) $\log_{10} 2+\log_{10}(11-x^2)=2\log_{10}(5-x)$

2. Un ciclista y un coche parten uno al encuentro del otro desde dos ciudades separadas por 180 km. Sabiendo que el ciclista avanza cuatro veces más despacio que el coche y que tardan 1 h 48 min en encontrarse, ¿cuál es la velocidad de cada uno?

3. Los dos catetos de un triángulo rectángulo difieren en 5 unidades y la hipotenusa mide 25 cm. Calcula los catetos.

4. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones **por el método de Gauss**:

$$\begin{cases} x+y-2z=-5 \\ 2x-y+z=2 \\ 3x+2y+z=5 \end{cases}$$

5. Los 30 alumnos de un grupo de 4º de ESO cursan tres asignaturas optativas distintas: francés, cultura clásica y robótica. Si dos alumnos de francés se hubiesen matriculado de cultura clásica, entonces estas dos asignaturas tendrían el mismo número de alumnos. Si dos alumnos de cultura clásica se hubiesen matriculado en robótica, entonces robótica tendría doble número de alumnos que cultura clásica. Halla el número de alumnos matriculado en cada asignatura. ***[Hay que plantear un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas y resolverlo por el método de Gauss]***

6. Resuelve el siguiente sistema no lineal:

$$\begin{cases} x^2+xy+y^2=21 \\ x+y=1 \end{cases}$$

SOLUCIONES

1. Resuelve las siguientes ecuaciones, ***comprobando si los valores obtenidos son solución o no***, cuando sea necesario:

a) $\dfrac{(2x-1)(2x+1)}{3}+\dfrac{(x-2)^2}{4}=\dfrac{3x+4}{6}+\dfrac{x^2}{3}$

$$\frac{4x^2-1}{3}+\frac{x^2+4-4x}{4}=\frac{3x+4}{6}+\frac{x^2}{3}$$
$$\frac{4(4x^2-1)}{12}+\frac{3(x^2+4-4x)}{12}=\frac{2(3x+4)}{12}+\frac{4x^2}{12}$$
$$4(4x^2-1)+3(x^2+4-4x)=2(3x+4)+4x^2$$
$$16x^2-4+3x^2+12-12x=6x+8+4x^2$$
$$15x^2-18x=0$$
$$x(15x-18)=0$$
$$\begin{cases}\boxed{x=0}\\ 15x-18=0\Rightarrow \boxed{x=\dfrac{18}{15}=\dfrac{6}{5}}\end{cases}$$

b) $x^6+7x^3-8=0$

Hacemos el cambio de variable $x^3=z$:
$$z^2+7z-8=0$$
$$z=\begin{cases}-8\\1\end{cases}\Rightarrow x=\begin{cases}\sqrt[3]{-8}\\ \sqrt[3]{1}\end{cases}$$

Calculamos $\sqrt[3]{-8}$:

Módulo: $\sqrt[3]{8}=2$

Argumento: 180º

Argumentos de las raíces: $\begin{cases}\beta_0=\dfrac{180^\circ+360^\circ\cdot 0}{3}=60^\circ\\ \beta_1=\dfrac{180^\circ+360^\circ\cdot 1}{3}=180^\circ\\ \beta_2=\dfrac{180^\circ+360^\circ\cdot 0}{3}=300^\circ\end{cases}$

Por tanto, $\boxed{\sqrt[3]{-8}=\begin{cases}2_{60^\circ}\\ 2_{180^\circ}=-2\\ 2_{300^\circ}\end{cases}}$

Calculamos $\sqrt[3]{1}$:

Módulo: $\sqrt[3]{1}=1$

Argumento: 0º

$$\text{Argumentos de las raíces: } \begin{cases} \beta_0 = \dfrac{0^{\text{o}} + 360^{\text{o}} \cdot 0}{3} = 0^{\text{o}} \\ \beta_1 = \dfrac{0^{\text{o}} + 360^{\text{o}} \cdot 1}{3} = 120^{\text{o}} \\ \beta_2 = \dfrac{0^{\text{o}} + 360^{\text{o}} \cdot 0}{3} = 240^{\text{o}} \end{cases}$$

Por tanto, $\boxed{\sqrt[3]{1} = \begin{cases} 1_{0^{\text{o}}} = 1 \\ 1_{120^{\text{o}}} \\ 2_{240^{\text{o}}} \end{cases}}$

c) $\sqrt{x} + x = \sqrt{3x + x^2}$

$$\sqrt{x} = \sqrt{3x + x^2} - x$$
$$\left(\sqrt{x} - x\right)^2 = \left(\sqrt{3x + x^2}\right)^2$$
$$x + x^2 + 2\sqrt{x} = 3x + x^2$$
$$2\sqrt{x} = 3x + x^2 - x - x^2$$
$$2\sqrt{x} = 2x$$
$$\left(2\sqrt{x}\right)^2 = (2x)^2$$
$$4x = 4x^2$$
$$x^2 - x = 0 \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = 0 \\ x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \end{cases} \text{(las dos son solución)}}$$

d) $\dfrac{5}{x+2} + \dfrac{x}{x+3} = \dfrac{3}{2}$

$$\frac{5 \cdot 2(x+3)}{2(x+2)(x+3)} + \frac{2x(x+2)}{2(x+3)(x+2)} = \frac{3(x+2)(x+3)}{2(x+2)(x+3)}$$
$$10(x+3) + 2x(x+2) = 3(x+2)(x+3)$$
$$10x + 30 + 2x^2 + 4x = (3x+6)(x+3)$$
$$10x + 30 + 2x^2 + 4x = 3x^2 + 15x + 18$$
$$-x^2 - x + 12 = 0$$
$$\boxed{x = \begin{cases} 3 \\ -4 \end{cases}} \text{ (las dos son solución)}$$

e) $\left(\dfrac{1}{16}\right)^{-x+3} = 32^{3x-2}$

$$\left(\frac{1}{2^4}\right)^{-x+3}=\left(2^5\right)^{3x-2}\Rightarrow\left(2^{-4}\right)^{-x+3}=\left(2^5\right)^{3x-2}\Rightarrow 2^{-4(-x+3)}=2^{5(3x-2)}\Rightarrow -4(-x+3)=5(3x-2)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x-12=15x-10\Rightarrow 4x-15x=-10+12\Rightarrow \boxed{x=-\frac{2}{11}}$$

f) $\ln(3x-1)=\ln 2+\ln(4x-6)$

$$\ln(3x-1)=\ln\left[2(4x-6)\right]\to 3x-1=2(4x-6)\to 8x-12-3x+1=0\to$$

$$\to 5x-11=0\to \boxed{x=\frac{11}{5}}$$

Comprobación:

$x=\frac{11}{5}\to\ln\left(3\cdot\frac{11}{5}-1\right)=\ln 2+\ln\left(4\cdot\frac{11}{5}-6\right)\to\ln\frac{28}{5}=\ln 2+\ln\frac{14}{5}\to x=\frac{11}{5}$ es solución

g) $\log_e 2+\log_e\left(11-x^2\right)=2\log_e(5-x)$

$$\log_e\left[2\cdot\left(11-x^2\right)\right]=\log_e(5-x)^2\Rightarrow 2\cdot\left(11-x^2\right)=(5-x)^2\Rightarrow 22-2x^2=25+x^2-10x\Rightarrow$$

$3x^2-10x+3=0\Rightarrow \boxed{x=\begin{cases}\frac{1}{3}\\ 3\end{cases}}$ (Las dos son soluciones)

2. Un ciclista y un coche parten uno al encuentro del otro desde dos ciudades separadas por 180 km. Sabiendo que el ciclista avanza cuatro veces más despacio que el coche y que tardan 1 h 48 min en encontrarse, ¿cuál es la velocidad de cada uno?

1ª forma: En este problema, usar dos incógnitas nos puede simplificar el planteamiento, aunque al final lo que vamos a hacer es resolver una ecuación.
Sea $x=$distancia recorrida por el ciclista y $v=$velocidad del ciclista.
Hay que tener en cuenta que 1 h 48 min = 1,8 h (mediante una regla de tres). Así:

$$\left.\begin{array}{l}x=1{,}8v\\180-x=7{,}2v\end{array}\right\}\Rightarrow 180-1{,}8v=7{,}2v\Rightarrow v=20$$

Por tanto, la velocidad del ciclista es de 20 km/h y la velocidad del coche es de $\frac{180-(1{,}8\cdot 20)}{1{,}8}=80$ km/h.

2ª forma: Sea $v=$velocidad del coche. Entonces, como 1 h 48 min = 1,8 h, se tiene que:

$$v+\frac{v}{4}=\frac{180}{1{,}8}$$

$$4v+v=400$$

$$5v=400$$

$$v=80$$

Así, el coche circula a 80 km/h y el ciclista a $\frac{80}{4}=20$ km/h.

3. Los dos catetos de un triángulo rectángulo difieren en 5 unidades y la hipotenusa mide 25 cm. Calcula los catetos.

El triángulo tiene por catetos x y $x-5$, y por hipotenusa 25. Por el teorema de Pitágoras:

$$x^2+(x-5)^2=25\Rightarrow x^2-25x-300=0\Rightarrow x=20$$

Así, un cateto mide 20 cm y el otro 15 cm.

4. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones por el método de Gauss:

$$\begin{cases} x-2y+z=6 \\ 3x+y-z=7 \\ x-y+2z=6 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & -1 & 7 \\ 1 & -1 & 2 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3=-F_1+F_3]{F_2=-3F_1+F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 6 \\ 0 & 7 & -4 & -11 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2\leftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & -4 & -11 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{F_3=-7F_2+F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -11 & -11 \end{array}\right) \begin{array}{c} [1] \\ [2] \\ [3] \end{array}$$

De [3]: $-11z=-11\to z=1$

Sustituimos en [2]: $y+z=0\to y=-1$

Sustituimos en [1]: $x-2y+z=6\to x=6-2\cdot 1-1=3$

Solución: $\boxed{(x,y,x)=(3,-1,1)}$ (Sistema compatible determinado)

5. Los 30 alumnos de un grupo de 4º de ESO cursan tres asignaturas optativas distintas: francés, cultura clásica y robótica. Si dos alumnos de francés se hubiesen matriculado de cultura clásica, entonces estas dos asignaturas tendrían el mismo número de alumnos. Si dos alumnos de cultura clásica se hubiesen matriculado en robótica, entonces robótica tendría doble número de alumnos que cultura clásica. Halla el número de alumnos matriculado en cada asignatura.

Llamamos

$x=$ nº de alumnos que cursan Francés

$y=$ nº de alumnos que cursan Cultura Clásica

$z=$ nº de alumnos que cursan Robótica

$$\begin{cases} x+y+z=30 \\ x-2=y+2 \\ 2(y-2)=z+2 \end{cases} \to \begin{cases} x+y+z=30 \\ x-y=4 \\ 2y-z=6 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 30 \\ 1 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{-F_1+F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 30 \\ 0 & -2 & -1 & -26 \\ 0 & 2 & -1 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2+F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 30 \\ 0 & -2 & -1 & -26 \\ 0 & 0 & -2 & -20 \end{array}\right) \begin{array}{c} [1] \\ [2] \\ [3] \end{array}$$

De [3]: $-2z=-20\Rightarrow z=10$

Sustituimos en [2]: $-2y-z=-26\Rightarrow y=\dfrac{-26+10}{-2}=8$

Sustituimos en [1]: $x+y+z=30\Rightarrow x=30-y-z=30-8-10=12$

Solución: $\boxed{(x,y,x)=(12,8,10)}$

Por tanto, hay 12 alumnos que cursan francés, 8 que cursan cultura clásica y 10 que cursan robótica.

6. Resuelve el siguiente sistema no lineal: $\begin{cases} y - x = 1 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$

Resolvemos el sistema por sustitución:

$$\begin{cases} y - x = 1 \longrightarrow y = 1 + x \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases} \Rightarrow x^2 + (1+x)^2 = 5 \Rightarrow x^2 + 1^2 + x^2 + 2x = 5 \Rightarrow 2x^2 + 2x - 4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases} \Rightarrow y = \begin{cases} 1+1 = 2 \\ 1+(-2) = -1 \end{cases}$$

Soluciones:

$$(x, y) = \begin{cases} (1, 2) \\ (-2, -1) \end{cases}$$