Números Complejos: $\mathbb{C}$

Matemáticas I

1. Calcula, realizando las operaciones en forma binómica:

a) $2i(3-4i)-(3+2i)(5-2i)$

b) $\dfrac{2-i}{5i}-\dfrac{1+i}{3-4i}$

c) $\dfrac{-10i^{7}(2-3i)}{2i^{-8}}$

2. a) Expresa en forma binómica el número complejo z = 2_{45° y represéntalo gráficamente.

b) Obtén el opuesto y el conjugado de z en forma polar y binómica y represéntalos.

3. Determina el valor de x, para que el cociente $\dfrac{3-2xi}{1-i}$ sea un número imaginario puro.

4. Dados los complejos: $z_1 = 2_{45^\circ}$ y $z_2 = 3_{15^\circ}$, calcula en forma polar:

a) $z_1 \cdot z_2$ b) $\dfrac{z_1}{z_2}$

5. Calcula la sexta potencia del número complejo $z=-2+2\sqrt{3}i$.

6. Calcula $\sqrt[3]{-27i}$.

7. Una de las raíces octavas de un número complejo, *z*, es $1+i$. Halla dicho número complejo *z*.

8. Expresa en forma polar y binómica el número complejo $8\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\,\mathrm{sen}\dfrac{\pi}{2}\right)$.

9. Calcula, aplicando la fórmula de De Moivre, z^2, donde $z=8\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\,\mathrm{sen}\dfrac{\pi}{2}\right)$.

10. Resuelve las siguientes ecuaciones, y expresa las soluciones en forma binómica:

a) $z^2+3z+7=0$

b) $z^4+1=0$

Indicaciones:

1. *Trabaja de forma exacta siempre que puedas. Cuando tengas que dar el resultado en forma decimal, hazlo aproximando a las centésimas por redondeo.*
2. *Expresa de forma correcta y clara todas las expresiones y operaciones.*
3. *Haz uso de la interpretación geométrica.*
4. *Realiza los ejercicios con bolígrafo, de forma clara y ordenada.*

SOLUCIONES

Ejercicio 1

a)

$$2i(3-4i)-(3+2i)(5-2i)=6i+8-(15-6i+10i+4)=(6i+8)-(19+4i)=$$
$$=6i+8-15+6i-10i-4=\boxed{-11+2i}$$

b)

$$\frac{2-i}{5i}-\frac{1+i}{3-4i}=\frac{-5-10i}{25}-\frac{-1+7i}{25}=\frac{-5-10i+1-7i}{25}=\frac{-4-17i}{25}=\boxed{-\frac{4}{25}-\frac{17}{25}i}$$

$$\frac{2-i}{5i}=\frac{(2-i)(-5i)}{5i(-5i)}=\frac{-5-10i}{25}$$

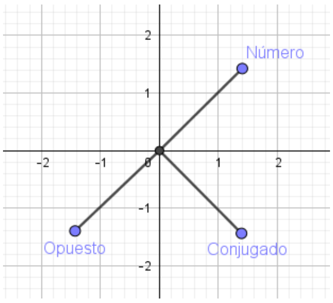
$$\frac{1+i}{3-4i}=\frac{(1+i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)}=\frac{3+4i+3i-4}{9+12i-12i+16}=\frac{-1+7i}{25}$$

c)

$$\frac{-10i^7(2-3i)}{2i^{-8}}=\frac{-10i^3(2-3i)}{2\cdot\frac{1}{i^8}}=\frac{-10(-i)(2-3i)}{2\cdot\frac{1}{i^0}}=\frac{10i(2-3i)}{2}=5i(2-3i)=\boxed{15+10i}$$

Ejercicio 2

a) $z=2_{45^\circ}=2(\cos 45^\circ+i\,\mathrm{sen}\,45^\circ)=2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=\boxed{\sqrt{2}+\sqrt{2}i=1,41+1,41i}$



b)

Opuesto en forma polar: $\boxed{-z=2_{45^\circ+180^\circ}=2_{225^\circ}}$

Opuesto en forma binómica: $\boxed{-z=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i=-1,41-1,41i}$

Conjugado en forma polar: $\boxed{\bar{z}=2_{360^\circ-45^\circ}=2_{315^\circ}}$

Ejercicio 3

$$\frac{3-2xi}{1-i}=\frac{(3-2xi)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{3+3i-2xi+2x}{1+i-i+1}=\frac{(3+2x)+(3-2x)i}{2}=\frac{3+2x}{2}+\frac{3-2x}{2}i$$

Para que sea imaginario puro, la parte real tiene que ser cero, luego: $\frac{3+2x}{2}=0\Rightarrow x=-\frac{3}{2}$

Ejercicio 4

a) $z_1 \cdot z_2 = 2_{45^\circ} \cdot 3_{15^\circ} = (2\cdot 3)_{45^\circ+15^\circ} = \boxed{6_{60^\circ}}$

b) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{2_{45^\circ}}{3_{15^\circ}} = \left(\dfrac{2}{3}\right)_{45^\circ-15^\circ} = \boxed{\left(\dfrac{2}{3}\right)_{30^\circ}}$

Ejercicio 5

Expresamos z en forma polar:

$$\left.\begin{array}{l} |z| = \sqrt{(-2)^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4+4\cdot 3} = 4 \\ \alpha = 180^\circ + \operatorname{arctg}\dfrac{2\sqrt{3}}{-2} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ \end{array}\right\} z = 4_{120^\circ}$$

Calculamos $z^6 = \left(-2+2\sqrt{3}\right)^6 = \left(4_{120^\circ}\right)^6 = 4^6{}_{120^\circ\cdot 6} = \boxed{4096_{360^\circ} = 4096_{0^\circ} = 4096}$

Ejercicio 6

$$\sqrt[3]{-27i} = \sqrt[3]{27_{270^\circ}} = \boxed{\begin{cases} \sqrt[3]{27}_{\beta_0} = 3_{90^\circ} \\ \sqrt[3]{27}_{\beta_1} = 3_{210^\circ} \\ \sqrt[3]{27}_{\beta_2} = 3_{330^\circ} \end{cases}} \text{ ya que } \begin{cases} \beta_0 = \dfrac{270^\circ + 360^\circ\cdot 0}{3} = 90^\circ \\ \beta_1 = \dfrac{270^\circ + 360^\circ\cdot 1}{3} = 210^\circ \\ \beta_2 = \dfrac{270^\circ + 360^\circ\cdot 2}{3} = 330^\circ \end{cases}$$

Ejercicio 7

Sea $z = r_\alpha$ y expresemos $1+i$ en forma polar:

$$z_1 = 1+i \Rightarrow \begin{cases} |z_1| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \\ \alpha_1 = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{1} = 45^\circ \end{cases} \Rightarrow z_1 = \sqrt{2}_{45^\circ}$$

Como $\sqrt[8]{z} = \sqrt[8]{r} \Rightarrow \sqrt[8]{r} = \sqrt{2} \Rightarrow r = \left(\sqrt{2}\right)^8 = \sqrt{256} = 16$, $45^\circ = \dfrac{\alpha + 360^\circ\cdot 0}{8} \Rightarrow \alpha = 45^\circ\cdot 8 = 360^\circ = 0^\circ$ se tiene que el número pedido es $\boxed{z = 16_{0^\circ} = 16}$

Ejercicio 8

$z = 8\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\,\mathrm{sen}\,\dfrac{\pi}{2}\right)$

Forma polar: $z = 8_{\frac{\pi}{2}} = 8_{90^\circ}$

Forma binómica: $z = 8\cos 90^\circ + i\left(8\,\mathrm{sen}\,90^\circ\right) = 8i$

Ejercicio 9

Como $z = 8\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\,\mathrm{sen}\,\dfrac{\pi}{2}\right) = 8_{90^\circ}$ se tiene que

$$z^2 = 8^2\left(\cos(2\cdot 90^\circ) + i\,\mathrm{sen}(2\cdot 90^\circ)\right) = 64\left(\cos 180^\circ + i\,\mathrm{sen}\,180^\circ\right) = \boxed{-64}$$

Ejercicio 10

a) $z^2+3z+7=0$

$$z^2+3z+7=0 \Rightarrow z=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot 1\cdot 7}}{2\cdot 1}=\frac{-3\pm\sqrt{-19}}{2}=\frac{-3\pm\sqrt{19}\cdot i}{2}=\boxed{\begin{cases}\dfrac{-3}{2}+\dfrac{\sqrt{19}}{2}i\\ \dfrac{-3}{2}-\dfrac{\sqrt{19}}{2}i\end{cases}}$$

b) $z^4+1=0 \Rightarrow z^4=-1 \Rightarrow z=\sqrt[4]{-1}$

Calculamos las raíces cuartas de $-1=1_{180^\circ}$:

Módulo: $\sqrt[4]{1}=1$

Argumentos:

$$\beta_0=\frac{180^\text{o}+360\cdot 0}{4}=45^\text{o}$$

$$\beta_1=\frac{180^\text{o}+360\cdot 1}{4}=135^\text{o}$$

$$\beta_2=\frac{180^\text{o}+360\cdot 2}{4}=225^\text{o}$$

$$\beta_3=\frac{180^\text{o}+360\cdot 3}{4}=315^\text{o}$$

Por tanto, las soluciones de la ecuación son: $\begin{cases} z_1=1_{45^\text{o}}=\cos 45^\text{o}+i\,\text{sen}\,45^\text{o}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\\ z_2=1_{135^\text{o}}=\cos 135^\text{o}+i\,\text{sen}\,135^\text{o}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\\ z_3=1_{225^\text{o}}=\cos 225^\text{o}+i\,\text{sen}\,225^\text{o}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\\ z_4=1_{315^\text{o}}=\cos 315^\text{o}+i\,\text{sen}\,315^\text{o}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i \end{cases}$