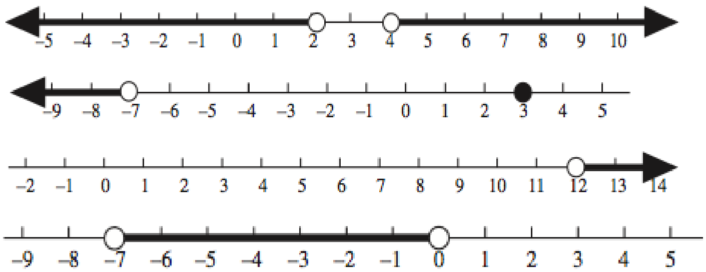
Números Reales: $\mathbb{R}$

Matemáticas I

1. Halla *el menor conjunto numérico* al que pertenecen los siguientes números:

$$3 \qquad 4{,}23 \qquad \sqrt{13} \qquad 1{,}0\overset{\frown}{3} \qquad -\frac{12}{3} \qquad \sqrt{64} \qquad \frac{1}{\pi} \qquad -3\sqrt{7} \qquad -\frac{1{,}3}{0{,}5} \qquad \sqrt[3]{125}$$

2. Expresa mediante un intervalo, semirrecta, recta o conjunto numérico los siguientes conjuntos:



3. Resuelve la siguiente inecuación: $|x+3|>2$

4. Si $a<0$ y $b>0$, ¿qué relación de desigualdad existe entre $\frac{1}{a}$ y $\frac{1}{b}$?

5. Expresa mediante un solo radical: $\sqrt[3]{\sqrt[4]{2}}$

6. Escribe en forma potencia: $\sqrt[3]{a\sqrt{a\sqrt{a}}}$

7. Calcula: $\sqrt[6]{8}+\sqrt[4]{4}-7\sqrt{72}$

8. ¿El número $\sqrt{21+\sqrt{13+\sqrt{9}}}$ es entero? Justifica la respuesta.

9. Racionaliza y calcula: $\dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}+\dfrac{7\sqrt{3}}{\sqrt{2}}-\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}}$

10. Efectúa y simplifica:

a) $\left(2+\sqrt{3}\right)^2-\left(2+\sqrt{3}\right)\cdot\left(2-\sqrt{3}\right)$ b) $\left(3+\sqrt{5}\right)\cdot\left(3-\sqrt{5}\right)+\left(2-4\sqrt{5}\right)\cdot\left(2+4\sqrt{5}\right)$

11. Calcula, aplicando la definición de logaritmo:

a) $\log_2 1024$ b) $\log_3 \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ c) $\log_2 \dfrac{1}{64}$ d) $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{2}$

12. Aplica las propiedades de los logaritmos y calcula, sabiendo que $x\neq 1$:

$$\frac{\log_{10}\frac{1}{x}+\log_{10}\sqrt{x}}{\log_{10}x^3}$$

13. Sabiendo que $\frac{\pi}{4}=\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+...$, calcula, usando dicha expresión:

a) Una aproximación por defecto y otra por exceso a las milésimas (de $\frac{\pi}{4}$)

b) Calcula el error absoluto y el error relativo de la aproximación por defecto.

14. Estudia la monotonía de la siguiente sucesión: $a_n=\frac{8n}{1-2n}$

15. Justifica, razonadamente, si las siguientes sucesiones están acotadas o no:

a) $a_n=3-\frac{5}{n}$ b) $a_n=5+4\cos(n)$

16. Estudia, justificadamente, la convergencia de cada una de las siguientes sucesiones:

a) $a_n=\frac{1}{n}$ c) $a_n=-2^n$

b) $a_n=n^2-1$ d) $a_n=(-1)^n\cdot n$

SOLUCIONES

Ejercicio 1:

3	4.23	$\sqrt{13}$	$1,0\widehat{3}$	$-\frac{12}{3}$	$\sqrt{64}$	$\frac{1}{\pi}$	$-3\sqrt{7}$	$-\frac{1,3}{0,5}$	$\sqrt[3]{125}$
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
$\mathbb{N}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{I}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{N}$	$\mathbb{I}$	$\mathbb{I}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{N}$

Ejercicio 2:

a) $(-\infty, 2) \cup (4, +\infty)$ c) $(12, +\infty)$

b) $(-\infty, -7) \cup \{3\}$ d) $(-7, 0)$

Ejercicio 3:

Para resolver la inecuación $|x+3| > 2,$ tenemos que resolver primero la inecuación $|x+3| \le 2$:

$$|x+3| \le 2 \Leftrightarrow -2 \le x+3 \le 2 \Rightarrow \begin{cases} -2 \le x+3 \Rightarrow -5 \le x \\ x+3 \le 2 \Rightarrow x \le -1 \end{cases} \Rightarrow x \in [-5, -1]$$

Como consecuencia, la solución de la inecuación que nos piden es:

$$x \in \mathbb{R} - [-5, -1] = (-\infty, -5) \cup (-1, +\infty)$$

Ejercicio 4:

Supongamos que $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$. Entonces, reduciendo a común denominador

$$\frac{b}{ab} > \frac{a}{ab}$$

(cambia el sentido de la desigualdad ya que $a < 0$) y, por tanto, $b > a$

Ejercicio 5:

Aplicando la definición y las propiedades de las potencias:

$$\sqrt[3]{\sqrt[4]{2}} = \sqrt[3]{2^{1/4}} = \left(2^{1/4}\right)^{1/3} = 2^{1/12} = \sqrt[12]{2}$$

También se podría haber resuelto aplicando la correspondiente propiedad de los radicales:

$$\sqrt[3]{\sqrt[4]{2}} = \sqrt[3\cdot 4]{2} = \sqrt[12]{2}$$

Ejercicio 6:

$$\sqrt[3]{a\sqrt{a\sqrt{a}}} = \sqrt[3]{a\sqrt{a\cdot a^{1/2}}} = \sqrt[3]{a\sqrt{a^{3/2}}} = \sqrt[3]{a\cdot\left(a^{3/2}\right)^{1/2}} = \sqrt[3]{a\cdot a^{3/4}} = \sqrt[3]{a^{7/4}} = \left(a^{7/4}\right)^{1/3} = a^{7/12}$$

Ejercicio 7:

$$\sqrt[6]{8} + \sqrt[4]{4} - 7\sqrt{72} = \sqrt[6]{2^3} + \sqrt[4]{2^2} - 7\sqrt{2^3\cdot 3^2} = \sqrt{2} + \sqrt{2} - 7\cdot 3\cdot 2\cdot\sqrt{2} = -40\sqrt{2}$$

Ejercicio 8:

$$\sqrt{21+\sqrt{13+\sqrt{9}}} = \sqrt{21+\sqrt{13+3}} = \sqrt{21+\sqrt{16}} = \sqrt{21+4} = \sqrt{25} = 5 \in \mathbb{Z}$$

Ejercicio 9:

$$\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}+\frac{7\sqrt{3}}{\sqrt{2}}-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}}=2\sqrt{3}+2\sqrt{2}-3-\sqrt{6}+\frac{7\sqrt{6}}{2}+2\cdot\sqrt[6]{2}=\frac{2\left(2\sqrt{3}+2\sqrt{2}-3-\sqrt{6}\right)}{2}+\frac{7\sqrt{6}}{2}+\frac{4\cdot\sqrt[6]{2}}{2}=$$

$$=\frac{4\sqrt{3}+4\sqrt{2}-6-2\sqrt{6}+7\sqrt{6}+4\cdot\sqrt[6]{2}}{2}=\boxed{\frac{4\sqrt{3}+4\sqrt{2}+5\sqrt{6}+4\cdot\sqrt[6]{2}-6}{2}}=2\sqrt{3}+2\sqrt{2}+\frac{5}{2}\sqrt{6}+2\cdot\sqrt[6]{2}-3$$

$$\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{\left(2-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}=\frac{2\sqrt{3}+2\sqrt{2}-3-\sqrt{6}}{\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}=2\sqrt{3}+2\sqrt{2}-3-\sqrt{6}$$

$$\frac{7\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{7\sqrt{3}\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}\right)^2}=\frac{7\sqrt{6}}{2}$$

$$\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}}=\frac{2\sqrt{2}\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{2^2}}=\frac{2\sqrt{2}\sqrt[3]{2^2}}{2}=2^{1/2}\cdot 2^{2/3}=2^{7/6}=\sqrt[6]{2^7}=2\cdot\sqrt[6]{2}$$

Ejercicio 10:

a) $\left(2+\sqrt{3}\right)^2-\left(2+\sqrt{3}\right)\cdot\left(2-\sqrt{3}\right)=2^2+\left(\sqrt{3}\right)^2+2\cdot 2\cdot\sqrt{3}-\left(2^2-\left(\sqrt{3}\right)^2\right)=4+3+4\sqrt{3}-\left(4-3\right)=$
$=6+4\sqrt{3}$

b) $\left(3+\sqrt{5}\right)\cdot\left(3-\sqrt{5}\right)+\left(2-4\sqrt{5}\right)\cdot\left(2+4\sqrt{5}\right)=3^2\left(\sqrt{5}\right)^2+2^2-\left(4\sqrt{5}\right)^2=9-5+4-16\cdot 5=-72$

Ejercicio 11:

a) $\log_2 1024=x\Rightarrow 2^x=1024\Rightarrow 2^x=2^{10}\Rightarrow \boxed{x=10}$

b) $\log_3\dfrac{\sqrt{3}}{3}=x\Rightarrow 3^x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow 3^x=\dfrac{3^{1/2}}{3}\Rightarrow 3^x=3^{-1/2}\Rightarrow \boxed{x=-\dfrac{1}{2}}$

c) $\log_2\dfrac{1}{64}=x\Rightarrow 2^x=\dfrac{1}{64}\Rightarrow 2^x=\dfrac{1}{2^6}\Rightarrow 2^x=2^{-6}\Rightarrow \boxed{x=-6}$

d) $\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{2}=x\Rightarrow\left(2^{-1}\right)^x=\sqrt{2}\Rightarrow 2^{-x}=2^{1/2}\Rightarrow -x=\dfrac{1}{2}\Rightarrow \boxed{x=-\dfrac{1}{2}}$

Ejercicio 12:

$$\frac{\log_{10}\frac{1}{x}+\log_{10}\sqrt{x}}{\log_{10}x^3}=\frac{\log_{10}a-\log_{10}x+\log_{10}x^{1/2}}{3\log_{10}x}=\frac{0-\log_{10}x+\frac{1}{2}\log_{10}x}{3\log_{10}x}=\frac{\left(-1+\frac{1}{2}\right)\cancel{\log_{10}x}}{3\cancel{\log_{10}x}}=-\frac{1}{6}$$

El $\log_{10}x$ multiplica a todo el numerador y a todo el denominador, y además, es distinto de cero (ya que $x\neq 1$) y, por tanto, se puede simplificar.

Ejercicio 13:

$$\frac{\pi}{4}=\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\ldots$$

Usando el valor que da la expresión anterior: $\frac{\pi}{4} \simeq 0,744\ 011\ 5$

a) Aproximación por defecto: 0,744
   Aproximación por exceso: 0,745

b) Error absoluto y error relativo:

$$E_a = \left|V_{real} - V_{aprox.}\right| = \left|\frac{\pi}{4} - 0,744\right| \simeq 0,04139 \qquad E_r = \left|\frac{E_a}{V_{real}}\right| = \left|\frac{\frac{\pi}{4} - 0,744}{\frac{\pi}{4}}\right| \simeq 0,05270$$

Usando el valor que da la calculadora: $\frac{\pi}{4} \simeq 0,785\ 398\ 163$

a) Aproximación por defecto: 0,785
   Aproximación por exceso: 0,786

b) Error absoluto y error relativo:

$$E_a = \left|V_{real} - V_{aprox.}\right| = \left|\frac{\pi}{4} - 0,785\right| \simeq 0,00039 \qquad E_r = \left|\frac{E_a}{V_{real}}\right| = \left|\frac{\frac{\pi}{4} - 0,785}{\frac{\pi}{4}}\right| \simeq 0,00051$$

Ejercicio 14:

$$a_n \text{ es creciente } \Leftrightarrow a_n \le a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \frac{8n}{1-2n} \le \frac{8(n+1)}{1-2(n+1)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{8n\left[1-2(n+1)\right]}{(1-2n)\left[1-2(n+1)\right]} \le \frac{8(n+1)(1-2n)}{(1-2n)\left[1-2(n+1)\right]} \Leftrightarrow 8n\left[1-2(n+1)\right] \le 8(n+1)(1-2n) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8n\left[1-2n-2\right] \le 8\left(n-2n^2+1-2n\right) \Leftrightarrow n-2n^2-2n \le -n-2n^2+1 \Leftrightarrow 0 \le 1 \text{ que es cierta}$$

Por tanto, la sucesión es creciente.

Ejercicio 15:

a) $a_n = 3 - \frac{5}{n}$

   Como $\frac{5}{n} \to 0$, se tiene que, $\left|a_n\right| = \left|3 - \frac{5}{n}\right| \le 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

b) $a_n = 5 + 4\cos(n)$

   Como $\left|\cos n\right| \le 1$, se tiene que, $\left|a_n\right| = \left|5 + 4\cos(n)\right| \le 5 + 4 = 9 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Ejercicio 16:

a) $a_n = \frac{1}{n} \to 0$

b) $a_n = n^2 - 1 \to +\infty$

c) $a_n = -2^n \to -\infty$

d) $a_n = (-1)^n \cdot n$ no converge (es una sucesión alternada)