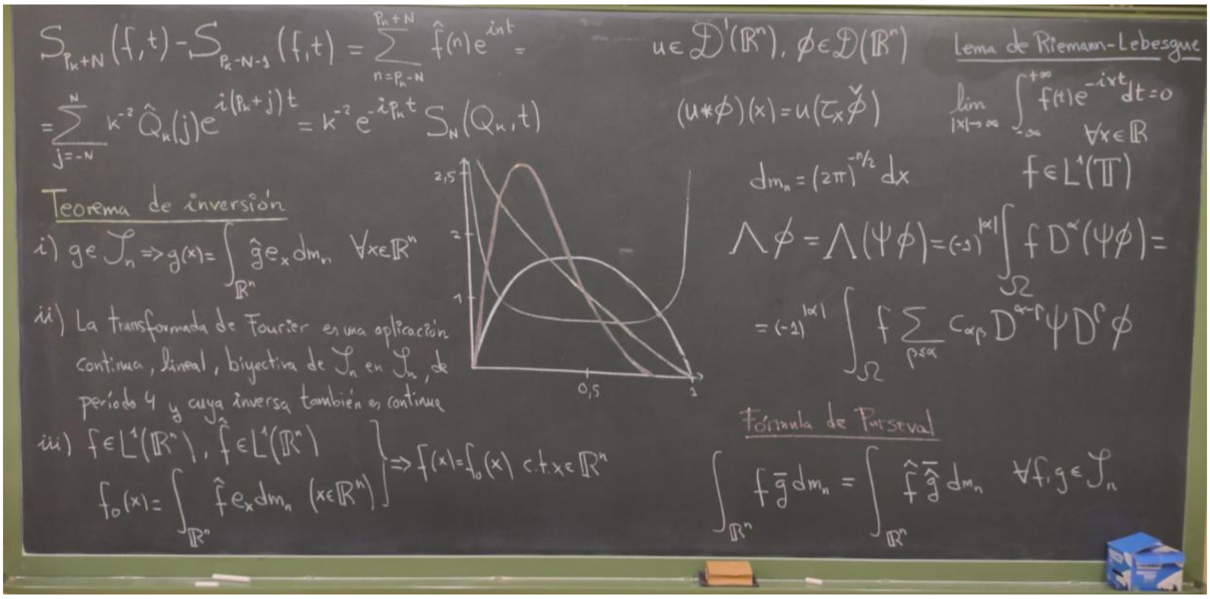
# MATEMÁTICAS II

## *2º de Bachillerato de Ciencias y Tecnología*




**Antonio Cipriano Santiago Zaragoza**

**Departamento de Matemáticas**
**I.E.S. Ramón Giraldo**

**Versión 23/4/2025**

# Índice general

## ÁLGEBRA

## UNIDAD 1:
## MATRICES



## UNIDAD 2:
## DETERMINANTES



## UNIDAD 3:
## DISCUSIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

# GEOMETRÍA

## UNIDAD 4: ESPACIO AFÍN

# UNIDAD 5:
# ESPACIO AFÍN EUCLÍDEO



# ANÁLISIS MATEMÁTICO

# UNIDAD 6:
# LÍMITES

# UNIDAD 7: CONTINUIDAD



# UNIDAD 8: DERIVADAS Y APLICACIONES

## UNIDAD 9:
## PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES DERIVABLES



## UNIDAD 10:
## PRIMITIVAS E INTEGRALES INDEFINIDAS



## UNIDAD 11:
## INTEGRAL DEFINIDA Y APLICACIONES



# PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

## UNIDAD 12:
## PROBABILIDAD

# UNIDAD 13:
# DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD

# Unidad 1:
# MATRICES

## 1. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

**Ecuaciones lineales**

Una ecuación lineal de incógnitas $x_1, x_2, ..., x_n$ es una igualdad de la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$$

donde los números reales $a_1, ..., a_n$ se denominan coeficientes, y el número real $b$, término independiente.

**Sistemas de ecuaciones**

Un sistema lineal de $m$ ecuaciones con $n$ incógnitas, es un conjunto de ecuaciones lineales de la forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad [1]$$

donde los $a_{ij} \in \mathbb{R}$ son los coeficientes, $b_k \in \mathbb{R}$ los términos independientes y $x_p \in \mathbb{R}$ son las incógnitas (números reales que hay que calcular, si existen).

Una solución de [1] es una $n-$upla $(x_1, x_2, ..., x_n)$ de números reales que hacen que las ecuaciones de [1] se transformen en identidades. Resolver un sistema de ecuaciones lineales, es hallar todas las soluciones.

Diremos que dos sistemas de ecuaciones lineales con las mismas incógnitas son equivalentes, cuando tienen las mismas soluciones.

## 2. MÉTODO DE GAUSS

**Método de Gauss**

Un sistema tiene forma escalonada cuando cada una de las ecuaciones posee una incógnita menos que la anterior.

Un sistema de ecuaciones se resuelve por el método de Gauss cuando sus soluciones mediante la reducción del sistema dado a otro sistema equivalente a él que sea escalonado. El desarrollo del método lo veremos en la unidad siguiente.

## 3. CLASIFICACIÓN DE LOS SISTEMAS

Los sistemas los podemos clasificar, atendiendo al número de soluciones que tengan, como sigue:

$$\text{Sistema no homogéneo}\begin{cases}\text{COMPATIBLE (tiene solución)}\begin{cases}\text{DETERMINADO (solución única)}\\ \text{INDETERMINADO (infinitas soluciones)}\end{cases}\\ \text{INCOMPATIBLE (no tiene solución)}\end{cases}$$

$$\text{Sistema homogéneo}\begin{cases}\text{COMPATIBLE (tiene solución)}\begin{cases}\text{DETERMINADO (solución única; la trivial)}\\ \text{INDETERMINADO (infinitas soluciones)}\end{cases}\end{cases}$$

# 4. MATRICES

**Definición:**

Una matriz de dimensión (u orden) $m \times n$ es un conjunto de $mn$ números reales distribuidos en una tabla de $m$ filas y $n$ columnas (se acostumbra a encerrarlos entre paréntesis).

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

También se suele representar en la forma, $A = \left(a_{ij}\right),\ i = 1,\ldots,m,\ j = 1,\ldots,n$ en la que el elemento $a_{ij}$ se encuentra en la intersección de la fila *i* con la columna *j*.

**Definición:**

Diremos que dos matrices son iguales si tienen la misma dimensión y los elementos que están en la misma posición son iguales.

## *Ejercicios:*

**1.** *En un IES hay 107 alumnos en 3ºESO, y 110 alumnas. En 4ºESO hay 84 alumnos y 95 alumnas. En 1ºBACH. hay 69 alumnos y 68 alumnas, y en 2ºBACH. hay 46 alumnos y 48 alumnas.*

*a) Representa mediante una matriz, los datos anteriores. Dicha matriz la representaremos por A.*

*b) Explica el significado de los elementos* $a_{22}$, $a_{31}$ y $a_{42}$.

*c) Asigna subíndices a las entradas con valor superior a 60 e inferior a 100.*

*d) ¿Cuántos alumn@s cursan 2ºBACH.?*

**2.** *Si el IES anterior es un centro comarcal en el que se reúnen estudiantes procedentes de tres pueblos* $P_1$, $P_2$ y $P_3$, *atendiendo a su procedencia y sexo, obtenemos la siguiente matriz* $2\times 3$*:*

$$B = \begin{array}{c} \\ H \\ M \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} P_1 & P_2 & P_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 90 & 182 & 34 \\ 91 & 182 & 41 \end{pmatrix} \end{array}$$

a) *¿Cuántos alumnos preceden del pueblo 1?*

b) *¿Qué significado tiene el elemento* $b_{23}$ *?*

*Y si consideramos la actividad profesional principal de los padres de esos alumnos y su lugar de origen, tenemos la matriz* $3\times3$*:*

$$C = \begin{array}{l} \\ \text{Funcionario} \\ \text{Agricultor} \\ \text{Manufacturero} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} P_1 & P_2 & P_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 22 & 105 & 11 \\ 114 & 115 & 12 \\ 45 & 151 & 52 \end{pmatrix} \end{array}$$

c) *Explica el significado de los términos* $c_{12}$, $c_{31}$ y $c_{23}$.

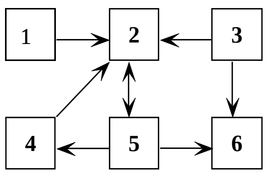
d) *Asigna subíndices a los elementos de la matriz de valor inferior a 50.*

e) *¿Qué valor numérico corresponde a las entradas de la matriz* $c_{13}$, $c_{22}$ y $c_{32}$

**3.** *En la matriz siguiente se representan los gramos de vitaminas* $A$, $B$ y $C$ *de dos alimentos 1 y 2. ¿Qué alimento tiene más vitamina B? ¿Y C? ¿Qué alimento tiene mayor cantidad de vitaminas?*

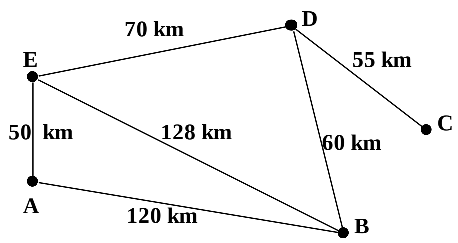
$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 15 & 6 & 2 \\ 0 & 18 & 9 \end{pmatrix} \end{array}$$

**4.** *El gráfico siguiente nos muestra las relaciones que se establecen en un grupo de seis personas. Construye una matriz que indique las relaciones anteriores, indicando con 1 la existencia de relación entre dos personas y con 0 la no existencia de relación.*




*(Indicación: por convenio pondremos 0 en la diagonal principal (en los elementos* $a_{11}$, $a_{22}$, $a_{33}$, $a_{44}$, $a_{55}$ y $a_{66}$*), ya que las relaciones las consideramos con otros y no con uno mismo)*

**5.** *El grafo[1] adjunto representa los caminos que comunican diversas localidades, con sus respectivas distancias. Halla la matriz de las distancias más cortas.*




[1] Un <u>grafo</u> es un conjunto, no vacío, de objetos llamados vértices y otra colección de pares de vértices, llamados aristas (que pueden ser orientados o no). Usualmente, un grafo se representa mediante una serie de puntos (los vértices) conectados por líneas (las aristas).

# 5. TIPOS DE MATRICES

**Definición:**

Se llama *matriz traspuesta* de $A$ a la matriz que resulta de intercambiar ordenadamente las filas por las columnas. Se representa por $A^t$ o por $A^T$.

**Definición:**

Una *matriz* es *nula* si todos sus elementos son cero.

**Definición:**

Una *matriz* es *cuadrada* si tiene igual número de filas que de columnas.

*Diagonal principal*: Los elementos $a_{ii}$ de una matriz cuadrada forman la diagonal principal.

**Definición:**

Una matriz cuadrada es simétrica cuando $a_{ij} = a_{ji}$, esto es, cuando $A = A^T$.

**Definición:**

Una *matriz* **cuadrada** es:

- *triangular superior* cuando todos los elementos por debajo de la diagonal principal son cero.
- *triangular inferior* cuando todos los elementos por encima de la diagonal principal son cero.

**Definición:**

Una *matriz diagonal* es una matriz cuadrada en la que todos los elementos que no estén en la diagonal principal son cero.

**Definición:**

La *matriz identidad* es una matriz diagonal en la que los elementos de la diagonal principal son unos.

# 6. OPERACIONES CON MATRICES

**Suma:**

Sobre la dimensión: **tienen que ser de igual dimensión**

$$\left.\begin{array}{l} A=\left(a_{ij}\right) \\ B=\left(b_{ij}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{A+B=\left(a_{ij}\right)+\left(b_{ij}\right)=\left(a_{ij}+b_{ij}\right)}$$

Propiedades:

- Asociativa: $A+\left(B+C\right)=\left(A+B\right)+C$
- Conmutativa: $A+B=B+A$
- Elemento neutro: $A+O=A$

- Elemento opuesto: $A+(-A)=O$

## Ejercicios:

**6.** *Dadas las matrices*

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 6 & -3 & 1 \end{pmatrix},\; B=\begin{pmatrix} 5 & 1 & 8 \\ 7 & 9 & 4 \end{pmatrix} \text{ y } C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

*halla:*

*a)* $A+B+C$ *c)* $A+(-B)+(-C)$

*b)* $B+(-C)$ *d)* $A^t+B^t+(-C)^t$

**7.** *Efectúa la siguiente operación:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

**8.** *Calcula* $a,\ b,\ c$ y $d$ *para que se cumpla:*

$$\begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & 7 \\ -2 & 3d \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 5 & a+b \\ c+d & 4 \end{pmatrix}$$

**9.** *Comprueba con un ejemplo que la traspuesta de una suma de dos matrices es igual a la suma de las dos matrices traspuestas:* $(A+B)^t=A^t+B^t$.

### Producto de un número real por una matriz:

Se multiplica dicho número por todos los elementos de la matriz.

$$\left.\begin{array}{l} A=(a_{ij}) \\ \alpha\in\mathbb{R} \end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{\alpha A=\alpha(a_{ij})=(\alpha a_{ij})}$$

Propiedades:

- $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$
- $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$
- $(\alpha\beta)A=\alpha(\beta A)$
- $1A=A$

Por cumplir estas ocho propiedades, el conjunto $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})=\{\text{matrices de orden } n\times m\}$ tiene estructura algebraica de espacio vectorial real:

$$\boxed{(\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R}),+,\cdot_{\mathbb{R}}) \text{ es un espacio vectorial real}}$$

### Producto de matrices:

**Sobre la dimensión**: *número de filas del segundo factor = número de columnas del primer factor*

Para multiplicar dos matrices hay que efectuar el producto de cada fila de la primera matriz por todas las columnas de la segunda.

*Sobre la dimensión de la matriz producto:* $A_{\boxed{n}\times m} \cdot B_{m\times \boxed{p}} \Rightarrow (AB)_{n\times p}$

Propiedades:

**Que no cumple:**

- Conmutativa: $AB \neq BA$
- Divisores de cero: $AB = 0 \not\Rightarrow A = 0$ o $B = 0$
- Cancelativa: $AB = CB \not\Rightarrow A = C$ (para $B \neq 0$)

**Que cumple:**

- Asociativa: $A(BC) = (AB)C$
- Distributiva: $A(B+C) = AB + AC$
- Elemento neutro: $A_{m\times n} \cdot I_n = A_{m\times n}$ e $I_m \cdot A_{m\times n} = A_{m\times n}$

**Potencia de una matriz cuadrada:**

Si $A$ es una matriz cuadrada, se define:

$$A^n = A \cdot A \cdot \overset{n)}{\ldots} \cdot A \quad \text{con } n \in \mathbb{N}$$

y

$$A^0 = I$$

## *Ejercicios:*

**10.** *Realiza las siguientes operaciones:*

*a)* $2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

*b)* $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

**11.** *Dadas las matrices:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

*calcula:*

*a)* $\frac{1}{2}A + B$

*b)* $3A + 5B - 6C$

*c)* $2A - \frac{1}{2}B - \frac{1}{3}C$

**12.** *Calcula todos los productos posibles entre las matrices:*

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\-2&5&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-7&1\\0&4\\2&1\\3&0\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}2&3&-1&0\\0&7&1&4\\0&-2&-1&0\end{pmatrix}$$

**13.** *Dadas las matrices A y B:*

$$A=\begin{pmatrix}-1&0&2\\-1&-1&0\\1&2&0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}3&5&0\\-2&2&1\\0&4&0\end{pmatrix}$$

*halla:*

*a)* $(A\cdot B)\cdot B$

*b)* $A\cdot(B\cdot A)$

**14.** *Para las matrices:*

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&2\\4&0&-3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0&3&4\\-1&-2&3\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}2&3&0&1\\-5&1&4&-2\\1&0&0&-3\end{pmatrix}\ \text{y}\ D=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$$

*realiza las siguientes operaciones, cuando sea posible, y en caso de no poder realizarlas, justifícalo de forma razonada:*

*a)* $A+B$ *b)* $3A-4B$ *c)* $AB$

*d)* $AD$ *e)* $BC$ *f)* $CD$

*g)* $A^tC$ *h)* $D^tA^t$ *i)* $B^tA$

*j)* $D^tD$ *k)* $DD^t$

**15.** *Con las matrices* $A=\begin{pmatrix}2&4\\6&-3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5&1\\9&8\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}-1&0\\2&7\end{pmatrix}$, *calcula:*

*a)* $AB$ *b)* $BA$ *c)* $C^2$ *d)* $C^3$ *e)* $A^tC^2$

*f) ¿Conmutan las matrices* $A$ *y* $B$*? Razona tu respuesta.*

**16.** *Calcula* $A^2, A^3$ *y* $A^4$ *siendo* $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$.

**17.** *Dadas las matrices*

$$A=\begin{pmatrix}5&-2\\0&1\\-4&7\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1&2\\-3&5\\4&-2\end{pmatrix}$$

*a) Calcular la matriz* $5A^t-3B^t$.

*b) Hallar* $AB^t$.

**18.** *Sea* $k$ *un número natural y la matriz:*

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

*Calcula* $A^k$ *para* $k\in\mathbb{N}$.

**19.** *Considera la matriz* $A=\begin{pmatrix}0&1\\p&q\end{pmatrix}$ *y halla los valores de* $p$ y $q$ *que hacen que se verifique la siguiente igualdad:* $A^2=A$.

**20.** *Sea la matriz* $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$. *Calcula* $A^n$ *para* $n\in\mathbb{N}$ .

**21.** *Efectúa las siguientes operaciones con matrices:*

a) $\begin{pmatrix}2&3&-1\\0&-1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\3&-1\\-1&-2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\-1&0\end{pmatrix}^2$

c) $\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}^2-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&3\\-1&4\end{pmatrix}$

b) $2\begin{pmatrix}2&3\\-1&4\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&2\\-1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\1&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&0\\1&3\end{pmatrix}^2$

d) $\left[\begin{pmatrix}1&0\\-1&0\end{pmatrix}-\frac{3}{5}\begin{pmatrix}2&3\\-1&4\end{pmatrix}\right]^2$

## ***Ejercicio resuelto:***

Dada $A=\begin{pmatrix}1&1/8&1/8\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, calcula $A^{2024}$.

Calculamos distintas potencias de $A$:

$$A^2=AA=\begin{pmatrix}1&1/8&1/8\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1/8&1/8\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1/4&1/4\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$A^3=AA^2=\begin{pmatrix}1&1/8&1/8\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1/4&1/4\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3/8&3/8\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$A^4=AA^3=\begin{pmatrix}1&1/8&1/8\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3/8&3/8\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&4/8&4/8\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Por inducción, $A^n=\begin{pmatrix}1&n/8&n/8\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ y, por tanto, $A^{2024}=\begin{pmatrix}1&2024/8&2024/8\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&253&253\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

## ***Ejercicios de selectividad***

Junio de 2011, propuesta A, 3b)

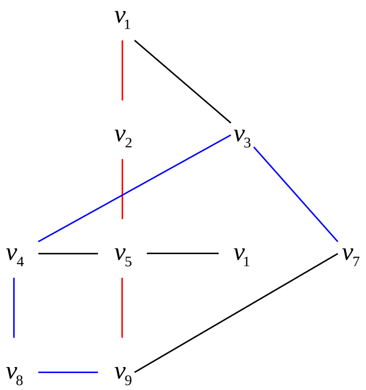
Julio de 2018, propuesta B, 3a

Julio de 2020, 1b) Junio de 2022, 1a)

# 7. GRAFOS

Un **grafo** es un conjunto, no vacío, de objetos llamados vértices y otra colección de pares de vértices, llamados aristas o lados (que pueden ser orientados o no). Usualmente, un grafo se representa mediante una serie de puntos (los vértices) conectados por líneas (las aristas).

Un camino de longitud $n$ es una sucesión de lados $e_1e_2...e_n$ junto con una sucesión de vértices $v_1v_2...v_nv_{n+1}$, de forma que $e_i$ es el lado que une $v_i$ con $v_{i+1}$. Un camino se puede especificar simplemente con la sucesión de vértiices: $v_1v_2...v_nv_{n+1}$




$v_1v_2v_5v_9$ es un camino de longitud 3 que une $v_1$ con $v_9$

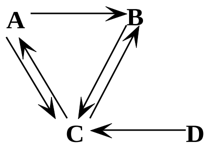
$v_3v_4v_8v_9$ es un camino de longitud 3 que une $v_3$ con $v_7$

$v_9v_8v_4v_3v_7$ es un camino de longitud 4 que une $v_9$ con $v_7$

$v_1v_3v_9v_8v_4v_3v_7$ es un camino de longitud 6 que une $v_1$ con $v_7$

## *Ejemplo (Grafo dirigido):*

Ángel, Beatriz, Celia y Diego son cuatro radioaficionados que pueden comunicarse según se indica en el siguiente grafo:




A: Ángel
B: Beatriz
C: Celia
D: Diego

La matriz que representa las comunicaciones entre ellos (*matriz de adyacencia*) es:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ M = \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Cada elemento de esta matriz representa el número de formas que tienen de comunicarse directamente dos de éstos radioaficionados. Así, $a_{12}$ significa que Ángel puede comunicarse directamente con Beatriz.

Calculamos $M^2$:

$$M^2 = M \cdot M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Cada elemento de dicha matriz indica el número de formas posibles que tienen de comunicarse dos de estos radioaficionados <u>a través de un intermediario</u>. Así, por ejemplo, el número 2 que aparece en el elemento $a_{33}$ indica que Celia puede comunicarse con ella misma, por medio de un intermediario, de dos formas distintas: una a través de Ángel y la otra a través de Beatriz.

Del mismo modo, si calculamos $M^3$, obtendremos el número de formas que tienen de relacionarse dos radioaficionados <u>mediante dos intermediarios</u>.

$$M^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

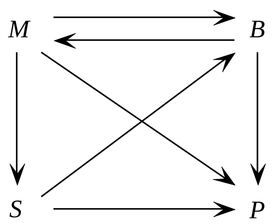
Además, si sumamos estas tres matrices, $\left(M, M^2, M^3\right)$, obtendremos las formas que, en total, tienen de comunicarse todos los radioaficionados entre sí, bien directamente o bien a través de intermediarios:

$$M + M^2 + M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

**En general**, dado un grafo de *n* vértices y dada *M*, su matriz de adyacencia, las sucesivas potencias de $M$ $\left(M, M^2, M^3, ...\right)$ muestran el número de formas en que dos vértices del grafo pueden relacionarse (a través de 0, 1, 2, …, $n - 2$ intermediarios), y su suma $M + M^2 + .... + M^{n-1}$, el número total de formas que todos los vértices tienen de relacionarse entre sí.

## ***<u>Ejemplo (Grafo dirigido):</u>***

Las relaciones por avión entre cuatro ciudades vienen dadas por el siguiente grafo:




La matriz de adyacencia es:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} M & S & P & B \end{array} \\ \begin{array}{r} M \\ A = S \\ P \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Vamos a calcular $A^2$:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$A^2$ indica cuántos vuelos hay que comuniquen dos ciudades con una escala intermedia. Por ejemplo, el elemento $a_{43} = 2$ indica que hay 2 vuelos ente B y P con una escala: B – M – P y B – S – P.

Calculamos ahora $A^3$:

$$A^3 = AA^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$A^3$ indica cuántos vuelos hay que comuniquen dos ciudades con dos escalas intermedias. Por ejemplo, el elemento $x_{33} = 2$ (donde $A^3 = (x_{ij})$) indica que hay dos vuelos que comunican P y P con dos escalas intermedias: P – B – S – P y P – B – M – P.

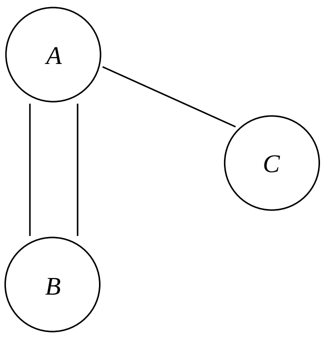
Por último,

$$A + A^2 + A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

y esta matriz indica si existe o no relación entre dos ciudades cualesquiera. En este caso, como todos los elementos que no están en la diagonal principal son no nulos, eso quiere decir que hay conexión entre dos ciudades cualesquiera.

## ***Ejemplo (Grafo no dirigido):***

El grafo siguiente muestra las conexiones por carretera entre las poblaciones $A$, $B$ y $C$. Halla la matriz $G$ asociada al grafo y calcula $G + G^2$. ¿Cuántas formas posibles existen de ir de $A$ a $C$ haciendo como máximo una escala (es decir, recorriendo un camino de dos aristas o menos)?




Calculamos la matriz de adyacencia asociada al grafo:

$$G = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Calculamos $G^2$ y $G+G^2$:

$$G^2 = GG = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$G+G^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Para ver cuántas formas posibles hay en total para ir de *A* a *C* haciendo como máximo una escala, hay que mirar el elemento $(1,3)$ o el $(3,1)$ de la matriz $G+G^2$, esto es, hay una única forma.

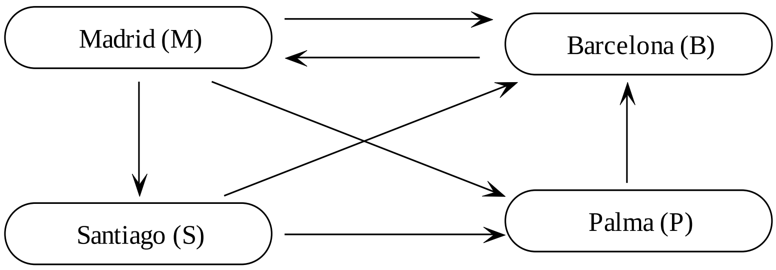
***Ejemplo:***

Una compañía aéra realiza vuelos entre cuatro ciudades, tal y como se indica en el grafo adjunto. Halla la matriz de incidencia y responde a las siguientes cuestiones:

a) Calcula $A^2$. ¿Cuántos vuelos hay con una escala entre Barcelona y Palma?

b) Determina $A^3$. ¿Cuántos vuelos hay entre Madrid y las otras ciudades con dos escalas intermedias?

c) Halla $A+A^2+A^3$. ¿Cómo interpretas este resultado?




La matriz de incidencia es:

$$A = \begin{array}{c} \\ M \\ S \\ P \\ B \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} M & S & P & B \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

a) Calculamos $A^2$:

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Esta matriz nos dice cuántos vuelos hay entre dos ciudades con una escala intermedia. Por tanto, entre Barcelona y Palma no hay ningún vuelo con una escala intermedia.

b) Calculamos $A^3$:

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Esta matriz nos indica el número de vuelos entre dos ciudades con dos escalas intermedias. Así, entre Madrid y Santiago hay dos vuelos con dos escalas intermedias, e igualmente, entre Madrid y Santiago, y entre Madrid y Barcelona.

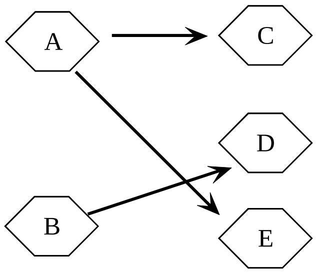
c) Calculamos $A + A^2 + A^3$:

$$A + A^2 + A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Esta matriz nos dice si hay o no comunicaciónentre dos ciudades cualesquiera, y como todos los elementos que no están en la diagonal principal son distintos de cero, esto nos indica que hay comunicación entre dos ciudades cualesquiera.

## ***Ejemplo:***

Se considera un grupo de cinco personas, $A$ y $B$, que han contraído una enfermedad contagiosa. Estas personas entran, a su vez, en contacto directo con otras tres personas $C$, $D$ y $E$, según se muestra en el siguiente grafo.




a) Calcular la matriz de incidencia y explicar el significado de sus elementos.

b) Supongamos que hay un tercer grupo de cuatro personas, $F$, $G$, $H$ e $I$, que también tienen contacto con las personas del segundo grupo. La información de estas relaciones se da en la siguiente matriz:

$$T = \begin{array}{c} \\ C \\ D \\ E \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} F & G & H & I \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Calcular la matriz $MT$ y explicar su significado, donde $M$ es la matriz de incidencia del primer grupo con el segundo.

a) Calculamos $M$ :

$$M = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} C & D & E \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

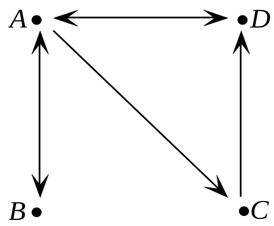
b) Calculamos $MT$:

$$MT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Esta matriz nos dice que las personas del tercer grupo, $F$, $H$ e $I$, que mantienen contacto indirecto con la enfermedad a través de tres personas, mientras que $G$ solo tiene un contacto indirecto.

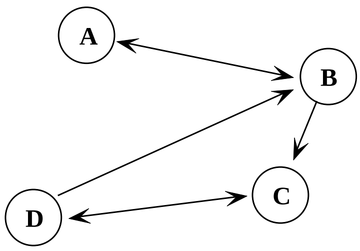
## ***Ejercicios:***

**22.** *Dado el grafo de la figura:*



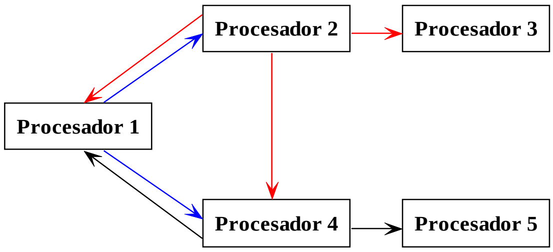

*Calcula su matriz de adyacencia R. Calcula $R^2$. ¿Qué representan los elementos de esta matriz respecto del grafo?*

**23.** *Hallar la matriz $(M)$ de las conexiones señaladas en el grafo adjunto, entre cuatro pueblos A, B, C y D:*



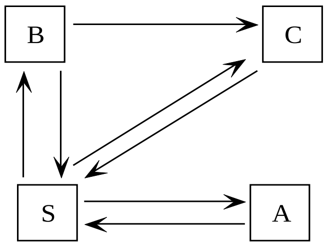

a) *Calcular además $M^2$ (la matriz que indica el número de itinerarios de dos etapas para ir de un pueblo a otro).*
b) *Calcular $M^3$ (la matriz que indica el número de itinerarios de tres etapas para ir de un pueblo a otro).*
c) *¿Qué indica la matriz $M + M^2 + M^3$?*

**24.** *Una red de cinco procesadores puede relacionarse según el siguiente esquema:*




*Construye una matriz que indique las relaciones entre los procesadores, indicando con 1 la existencia de relación entre dos procesadores y con 0 la no existencia de relación (matriz de adyacencia). ¿Es posible una comunicación total entre todos los procesadores?*

**25.** *Un grupo de cuatro compañeros de clase, Berto (B), Carlos (C), Ana (A) y Sonia (S), se siguen en Instagram según se muestra en el grafo adjunto:*




a) *Calcula la matriz de adyacencia,* $M$ .

b) *Calcula* $M^2$ *e interpreta sus elementos.*

c) *¿Qué representa la matriz* $M + M^2 + M^3$ *?*

# 8. MÉTODO DE GAUSS

Consiste en transformar el sistema original en un sistema triangular, mediante las transformaciones elementales de Gauss:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} a_{11}x & + & a_{12}y & + & a_{13}z & = & a_{14} \\ a_{21}x & + & a_{22}y & + & a_{23}z & = & a_{24} \\ a_{31}x & + & a_{32}y & + & a_{33}z & = & a_{34} \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{de Gauss}]{\text{transformaciones}}$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{rcrcrcr} b_{11}x & + & b_{12}y & + & b_{13}z & = & b_{14} \\ & & b_{22}y & + & b_{23}z & = & b_{24} \\ & & & & b_{33}z & = & b_{34} \end{array}\right\}$$

**Transformaciones elementales de Gauss**:

- Multiplicar una fila por un número distinto de cero $(F_i \to \alpha F_i)$
- Sumar a una fila un múltiplo de otra ( $F_j \to F_j + pF_i$ )
- Intercambiar filas ( $F_i \leftrightarrow F_j$ )

Hay una variante del método de Gauss que se conoce con el nombre de **método de Gauss-Jordan**, y que consiste en diagonalizar la matriz, es decir, hacer unos en la diagonal principal y ceros en los demás.

## *Ejercicios de selectividad*

Reserva 1 de 211, 3)

Reserva 2 de 2012, propuesta B, 3)

Reserva 2 de 2013, propuesta B, 3)

Junio de 2015, propuesta B, 3)

Junio de 2021, 2b)

Julio de 2021, 2b)

Julio de 2022, 1b)

Julio de 2023, 1b)

# 9. INVERSA DE UNA MATRIZ

**Inversa:**

***Sobre la dimensión***: la matriz (y como consecuencia su inversa) tienen que ser cuadradas

Una matriz cuadrada $A$ es invertible (o tiene inversa), si existe una matriz, que se representa por $A^{-1}$, y que verifica:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

La matriz inversa, caso de existir, es única.

Demostración:
Supongamos que $B_1$ y $B_2$ son inversas de la matriz $A$. Entonces:

$$B_1 = I \cdot B_1 = \left(B_2 \cdot B\right) \cdot B_1 = B_2 \cdot \left(B \cdot B_1\right) = B_2 \cdot I = B_2$$

**Métodos para calcular la inversa:**

- Método directo para calcular $A^{-1}$:
  Resolviendo el sistema de ecuaciones lineales que resulta.

- Método de Gauss-Jordan

$$(A \mid I) \xrightarrow{\text{transformaciones de Gauss}} \left(I \mid A^{-1}\right)$$

## *Ejemplo:*

Calculamos la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$:

a) Método directo:

Sea $A^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$. Entonces:

$$AA^{-1} = I \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x+2z & y+2t \\ 2x+z & 2y+t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+2z=1 \\ y+2t=0 \\ 2x+z=0 \\ 2y+t=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} x+2z=1 \\ 2x+z=0 \end{cases} \Rightarrow (x,z) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \\ \begin{cases} y+2t=0 \\ 2y+t=1 \end{cases} \Rightarrow (y,t) = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right) \end{cases} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

b) Método de Gauss-Jordan:

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{-2F_1+F_2}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & -3 & -2 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{F_2:(-3)}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2/3 & -1/3\end{array}\right)\xrightarrow{-2F_2+F_1}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & -1/3 & 2/3\\ 0 & 1 & 2/3 & -1/3\end{array}\right)$$

$$\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

***Ejercicios:***

**26.** *Calcula, si existe, la inversa de:*

*a)* $A=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ *b)* $B=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -4 & 6\end{pmatrix}$ *c)* $C=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

**27.** *Encuentra* $x$ e $y$ *tales que* $A\cdot B=0$*, siendo:*

$$A=\begin{pmatrix}2 & -3 & -5\\ -1 & 4 & 5\\ 1 & -3 & -4\end{pmatrix}\ y\ B=\begin{pmatrix}-1 & x & y\\ 1 & -3 & -5\\ -1 & x & y\end{pmatrix}$$

**28.** *Halla la inversa de* $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & -1\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$ *y la inversa de* $B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

**29.** *Utilizando los métodos vistos en clase, calcula las matrices inversas de:*

$$A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 5 & 2\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

*y comprueba que* $AA^{-1}=I$ y $B^{-1}B=I$.
*Comprueba además que:*

*a)* $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

*b)* $\left(A^{-1}\right)^{-1}=A$

*c)* $(3A)^{-1}=\frac{1}{3}A^{-1}$

**30.** *Dadas las matrices* $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 2 & 2\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$*:*

*a) Calcula, si es posible,* $C+AB$.

*b) ¿Son iguales* $C^{-1}+(AB)^{-1}$ *y* $(C+AB)^{-1}$ *?*

**31.** *Calcula, utilizando el método de Gauss-Jordan, las inversas de las matrices:*

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\\3&2&1\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&2&1\\1&0&1\end{pmatrix}$$

*y comprueba que* $A^{-1}A=I$ y $BB^{-1}=I$

**Propiedades de la inversa** que es bueno conocer:

(1) $\left(A^{-1}\right)^{-1}=A$

Demostración:
Se tiene que $\left(A^{-1}\right)^{-1}\cdot A^{-1}=I$ y, por otro lado, $AA^{-1}=I$, por lo que $A$ y $\left(A^{-1}\right)^{-1}$ son inversas de $A$, pero por la unicidad en la matriz inversa, se tiene que $\left(A^{-1}\right)^{-1}=A$.

(2) $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

Demostración:
Se tiene que

$$\left(B^{-1}A^{-1}\right)AB=B^{-1}\left(A^{-1}A\right)B=B^{-1}\cdot I\cdot B=B^{-1}B=I$$

y, por otro lado,

$$(AB)\left(B^{-1}A^{-1}\right)=A\left(BB^{-1}\right)A^{-1}=A\cdot I\cdot A^{-1}=AA^{-1}=I$$

Como consecuencia, $B^{-1}A^{-1}$ es la inversa de $AB$, esto es $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

(3) $(kA)^{-1}=k^{-1}A^{-1}\quad\forall k\in\mathbb{R}-\{0\}$

Demostración:
Por una lado $\left(k^{-1}A^{-1}\right)(kA)=\left(k^{-1}k\right)\left(A^{-1}A\right)=1\cdot I=I$, y por otro

$$(kA)\left(k^{-1}A^{-1}\right)=\left(kk^{-1}\right)AA^{-1}=1\cdot I=I$$

luego, $(kA)^{-1}=k^{-1}A^{-1}\quad\forall k\in\mathbb{R}-\{0\}$.

***Ejercicios de selectividad***

Septiembre de 2017, propuesta B, 3a)
Junio de 2019, propuesta B, 3a)
Septiembre de 2020, 1a)
Julio de 2021, 1a)
Junio de 2024, 7a)

# 10. ECUACIONES Y SISTEMAS MATRICIALES

**Definición:**

Una *ecuación matricial lineal* es una ecuación en la que la incógnita es una matriz y la ecuación es lineal, esto es, una ecuación de la forma:

$$AX=B\quad \text{o}\quad XA=B$$

**Resolución de ecuaciones matriciales:**

Todas las ecuaciones matriciales lineales, se pueden transformar en una del tipo

$$AX = B \quad \text{o} \quad XA = B$$

siguiendo los mismos pasos que para resolver ecuaciones polinómicas de primer grado. La única diferencia es que no hay una división de matrices, por lo que para despejar $X$, hay que usar la inversa:

$$AX = B \qquad\qquad XA = B$$
$$A^{-1}AX = A^{-1}B \qquad\qquad XAA^{-1} = BA^{-1}$$
$$X = A^{-1}B \qquad\qquad X = BA^{-1}$$

## ***Ejemplo:***

Resolvemos la siguiente ecuación matricial $AX + B = C$, donce

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Despejamos $X$:

$$AX + B = C \Rightarrow AX = C - B \Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}(C-B) \Rightarrow X = A^{-1}(C-B)$$

Calculamos $A^{-1}$:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculamos $C - B$:

$$C - B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$$

Calculamos $X$:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 6 & -14 \end{pmatrix}$$

## ***Ejercicios:***

***32.*** *Si* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ *y* $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, *resuelve las ecuaciones:*

*a)* $A^2 + 3X = A$
*b)* $AX = B$

***33.*** *Obtén la matriz* $X$ *en las siguientes ecuaciones matriciales:*

*a)* $AX + B = C$
*b)* $XA = 2B + C$
*c)* $AX + A = B$
*d)* $A + 2XB = C$
*e)* $A - BX = C$
*f)* $AX = BX + C$
*g)* $XA - B = X$
*h)* $X + 3A^{-1} = A + B$
*i)* $AX - A = I - AX$
*j)* $AX + A^{-1}X = I$
*k)* $X - A^2X = B$
*l)* $XA + A^t = XB$
*m)* $XA + XA^t = C$
*n)* $AXB = C$

***34.*** *Resuelve la ecuación matricial* $2X - AB = A^2$, *donde:*

$$A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 0\end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -2\end{pmatrix}$$

**35.** *Sean las matrices:* $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 3 & 1\end{pmatrix}$ *y* $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -5\end{pmatrix}$

*(a) Calcular las matrices C y D, sabiendo que AC = BD = I, siendo I la matriz identidad de orden dos.*
*(b) Discutir y resolver el sistema dado por:*

$$\left(C^{-1}-D^{-1}\right)\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$$

*siendo* $C^{-1}$ y $D^{-1}$ *las matrices inversas de las matrices C y D indicadas en el apartado anterior.*

**36.** *Encuentra una matriz* $X$ *que verifique* $X-B^2=AB$ *siendo*

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix}$$

**37.** *Siendo*

$$A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 0 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\ y\ D=\begin{pmatrix}9 & 3\\ 8 & 13\end{pmatrix}$$

*resuelve la ecuación matricial* $AB+CX=D$.

## Ejercicio resuelto:

Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}3/5 & x & 0\\ y & -3/5 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, halla $x$ e $y$ para su matriz inervsa, $A^{-1}$, coincida con su traspuesta, $A^T$, En tal caso, halla $A^TA^2-2A$.

a) Imponemos que $A^{-1}=A^T$:

$$A^{-1}=A^T \Rightarrow AA^{-1}=AA^T \Rightarrow I=AA^T \text{ (siempre que exista } A^{-1}\text{)}$$

Calculamos $AA^T$, e igualamos a $I$:

$$AA^T=\begin{pmatrix}3/5 & x & 0\\ y & -3/5 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3/5 & y & 0\\ x & -3/5 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x^2+\frac{9}{25} & \frac{3}{5}y-\frac{3}{5}x & 0\\ \frac{3}{5}y-\frac{3}{5}x & y^2+\frac{9}{25} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=I\Rightarrow$$

$$\begin{cases} x^2+\dfrac{9}{25}=1 \Rightarrow x=\pm\dfrac{4}{5} \\ \dfrac{3}{5}y-\dfrac{3}{5}x=0 \Rightarrow y-x=0 \Rightarrow y=x=\pm\dfrac{4}{5} \end{cases} \Rightarrow (x,y)=\begin{cases} \left(\dfrac{4}{5},\dfrac{4}{5}\right) \\ \left(-\dfrac{4}{5},-\dfrac{4}{5}\right) \end{cases}$$

(aunque no se han puesto explicitamente, las otras ecuaciones de la igualdad también se verifican).

b) Calculamos $A^T A^2 - 2A$:

$$A^T A^2 - 2A \underset{(1)}{=} A^{-1}AA - 2A = A - 2A = -A$$

donde en (1) hemos tenido en cuenta que $A^{-1} = A^T$.

**Definición:**

Un *sistema lineal de ecuaciones matriciales* es un sistema lineal en el que las incógnitas con matrices.

**Resolución de sistemas lineales de ecuaciones matriciales:**

Para resolver un sistema matricial (lineal), se aplican los métodos conocidos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales (reducción, sustitución o igualación).

***Ejemplo:***

Vamos a resolver el siguiente sistema matricial:

$$\begin{cases} 2X+Y=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 6 \\ -3 & 11 & 6 \end{pmatrix} \\ 3X-Y=\begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -12 & -12 & 9 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Llamamos $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 6 \\ -3 & 11 & 6 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -12 & -12 & 9 \end{pmatrix}$.

El sistema que tenemos que resolver es:

$$\underbrace{\begin{cases} 2X+Y=A \\ 3X-Y=B \end{cases}}_{\text{sumamos}} \Rightarrow 5X=A+B \Rightarrow X=\frac{1}{5}(A+B)$$

Calculamos $X$:

$$X=\frac{1}{5}\left[\begin{pmatrix} 0 & 2 & 6 \\ -3 & 11 & 6 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -12 & -12 & 9 \end{pmatrix}\right]=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & 0 & 10 \\ -15 & -1 & 15 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & -\dfrac{1}{5} & 3 \end{pmatrix}$$

De la primera ecuación:

$$Y=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 6 \\ -3 & 11 & 6 \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & -\dfrac{1}{5} & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 3 & \dfrac{57}{5} & 0 \end{pmatrix}$$

Solución: $(X,Y)=\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & -\dfrac{1}{5} & 3 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 3 & \dfrac{57}{5} & 0 \end{pmatrix}\right)$

## ***Ejercicio:***

***38.*** *Calcula $X$ e $Y$ en los siguientes sistemas de ecuaciones matriciales:*

*a)* $\begin{cases} 2X-3Y=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ X-Y=\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \end{cases}$ *c)* $\begin{cases} X+2Y=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \\ 2X-Y=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \end{cases}$ *)*

*b)* $\begin{cases} 2X+3Y=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 7 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\ X-2Y=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{cases}$

## ***Ejercicio resuelto:***

Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, halla dos matrices $B$ y $C$ tales que satisfagan las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} B+C^{-1}=A \\ B-C^{-1}=A^{T} \end{cases}$$

Resolvemos este sistema de ecuaciones matriciales, aplicando el método de reducción:

$$\begin{cases} B+C^{-1}=A \\ B-C^{-1}=A^{T} \end{cases}$$

$$2B=A+A^{T}\Rightarrow B=\frac{1}{2}\left(A+A^{T}\right)$$

de donde $B=\frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right]=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$.

Despejamos $C^{-1}$ de la primera ecuación, $C^{-1}=A-B$, y tenemos en cuenta que $\left(C^{-1}\right)^{-1}=C$, luego $C=\left(A-B\right)^{-1}$.

Calculamos $A-B$:

$$A-B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

y calculamos $\left(A-B\right)^{-1}$:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\xrightarrow[2F_2]{-2F_1}\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)\xrightarrow{F_1\leftrightarrow F_2}\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow C=\left(A-B\right)^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

***Ejercicios de selectividad***

Septiembre de 2017, propuesta B, 3b)

Julio de 2018, propuesta B, 3b)

Julio de 2019, propuesta B, 3b)

Junio de 2019, probuesta B, 3b)

Modelo de 2020, 2a y b)

Septiembre de 2020, 1b)

Junio de 2021, 1b)

Julio de 2021, 1b)

Julio de 2022, 7a)

# 11. RANGO DE UNA MATRIZ

**Definición:**

Diremos que una *fila o columna* (de una matriz) es *linealmente independiente* si no se puede expresar como combinación lineal de las otras.

**Definición:**

El rango de una matriz $A$ es el número de filas (o de columnas) linealmente independientes que tiene la matriz. Se representa por $rg(A)$ o por $rango(A)$.

**Método de Gauss para el cálculo del rango:**

Se calcula, ***aplicando el método de Gauss***, haciendo cero el mayor número de filas (o de columnas). En este caso, el rango es el número de filas (o de columnas) no nulas.

***EJEMPLOS:***

Calculamos el rango de las siguientes matrices:

a) $A=\begin{pmatrix} 8 & 1 & 4 \\ 5 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$A=\begin{pmatrix} 8 & 1 & 4 \\ 5 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[-5F_3+F12]{-8F_3+F_1} \begin{pmatrix} 0 & -7 & 4 \\ 0 & -7 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2+F_1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow rango(A)=2$ (número de filas distintas de cero)

b) $B=\begin{pmatrix} 6 & -1 & 3 \\ -6 & 8 & 0 \\ 2 & 5 & -5 \end{pmatrix}$

$B=\begin{pmatrix} 6 & -1 & 3 \\ -6 & 8 & 0 \\ 2 & 5 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_1 \leftrightarrow C_2} \begin{pmatrix} -1 & 6 & 3 \\ 8 & -6 & 0 \\ 5 & 2 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[5F_1+F_3]{8F_1+F_2} \begin{pmatrix} -1 & 6 & 3 \\ 0 & 42 & 24 \\ 0 & 32 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{-32F_2+42F_3}$

$\rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 6 & 3 \\ 0 & 42 & 24 \\ 0 & 0 & -348 \end{pmatrix} \Rightarrow rango(B)=3$ ya que tiene tres filas distintas de cero.

c) $C=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 7 \\ -2 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

$$C=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 7 \\ -2 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_1+F_3]{2F_1+F_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 8 & 9 & 19 \\ 0 & 8 & 8 & 11 \end{pmatrix} \xrightarrow{-F_2+F_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 8 & 9 & 19 \\ 0 & 0 & -1 & -8 \end{pmatrix} \Rightarrow rango(C)=3$$

## ***Ejercicios:***

***39.*** *Calcula, por el método de Gauss, el rango de las siguientes matrices:*

*a)* $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

*b)* $B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 10 & -8 \end{pmatrix}$

*c)* $C=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

*d)* $D=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$

*e)* $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 8 & 7 & 9 & 4 \end{pmatrix}$

*f)* $F=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 11 \\ 1 & -1 & 6 & 29 \end{pmatrix}$

*g)* $G=\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 5 & 5 \end{pmatrix}$

*h)* $H=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

## ***Ejercicio de selectividad***

*Junio de 2023, 8a).*

# Unidad 2: DETERMINANTES

## 1. DETERMINANTES

### Determinante de una matriz cuadrada

A cada matriz cuadrada se le puede asociar un número real, llamado determinante de la matriz, que se obtiene a partir de los elementos de la misma. Si la matriz es *A*, se simboliza por $\det(A)$ o $|A|$.

El determinante de una matriz es importante, porque entre otras cosas, permite saber si una matriz es inversible o no, sin tener que "calcular" la inversa.

### Determinante de una matriz de orden dos

**Definición:**

Definimos el determinante de la matriz $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ por:

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

***Ejercicios:***

***40.*** *Calcula el determinante de las siguientes matrices:*

a) $A=\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$ b) $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$ c) $C=\begin{pmatrix} 11 & 3 \\ -7 & -2 \end{pmatrix}$

***41.*** *Indica para que valores de* $x$ *son regulares las siguientes matrices:*

a) $A=\begin{pmatrix} x & 12 \\ -3 & -x \end{pmatrix}$ b) $B=\begin{pmatrix} x-1 & -3 \\ -x-1 & x+1 \end{pmatrix}$

***42.*** *Resuelve las siguientes ecuaciones:*

a) $\begin{vmatrix} 5+x & x \\ -3 & 2x \end{vmatrix} = 15$ b) $\begin{vmatrix} 9 & -5 \\ x+1 & 3x \end{vmatrix} = 69$

### Determinante de una matriz de orden 3

**Definición:**

Si $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, se define el <u>menor complementario del elemento</u> $a_{ij}$, y se escribe $M_{ij}$, como el determinante de la matriz de orden dos, que resulta de suprimir la fila *i* y la columna *j* de la matriz *A*.

**Definición:**

Se llama <u>adjunto del elemento</u> $a_{ij}$, al número $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

**Definición:**

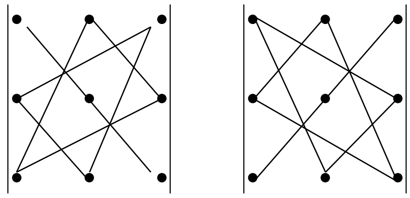
El *<u>determinante de una matriz de orden 3</u>* es la suma de los productos de los elementos de cualquier fila o columna por sus adjuntos correspondientes.

**Regla de Sarrus:**

Efectuando el desarrollo correspondiente se obtiene la **<u>regla de Sarrus</u>**,

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21}$$

que esquematizaremos como sigue:



Productos con signo +  Productos con signo −

## *Ejercicios:*

**43.** *Calcula los determinantes de las siguientes matrices:*

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ -3 & 3 & -6 \end{pmatrix}$  c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -3 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -4 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$  d) $D = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 4 & -8 & 3 \\ 7 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

**44.** *Indica cuáles de las matrices de la actividad anterior son regulares y cuáles no lo son.*

**45.** *Resuelve las siguientes ecuaciones:*

a) $\begin{vmatrix} 1 & x & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -6 & x \end{vmatrix} = 24$  b) $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2x & x & 1 \\ 4 & -3 & x \end{vmatrix} = -47$

**46.** *Calcula todos los adjuntos de las siguientes matrices:*

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$  b) $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 6 \\ 4 & 0 & 2 \\ 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}$

**47.** *Calcula los determinantes por la regla de Sarrus:*

a) $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 0 & -5 \\ 3 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} -4 & 5 & -2 \\ 7 & 9 & 0 \\ 4 & 1 & 6 \end{vmatrix}$

**48.** *Calcula desarrollando por una fila o una columna, los determinantes:*

a) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 7 \\ -2 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 9 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 6 & 7 & 8 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 3 & 6 & 7 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 8 \\ 4 & 0 & 12 \end{vmatrix}$

## ***Ejercicio de selectividad***

Junio de 2021, 1a).

## Determinante de una matriz de orden 4

**Definición:**

El cálculo del determinante de matrices cuadradas de orden 4 o superior se realiza siguiendo el mismo procedimiento (que nosotros usaremos como definición), es decir, se elige una fila o columna cualquiera y se realiza la suma de los productos de cada elemento de la fila o columna por su adjunto:

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} + a_{41}A_{41}$$

(determinante de una matriz $A=\left(a_{ij}\right)$ de orden 4, que se ha desarrollado por la primera columna).

### ***Ejemplo:***

Calculamos el determinante de $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\det A = \det\begin{pmatrix} 1 & -1 & \boxed{2} & 3 \\ 2 & 1 & \boxed{0} & 1 \\ 3 & -1 & \boxed{1} & 2 \\ 2 & -1 & \boxed{0} & 1 \end{pmatrix} = 2\cdot A_{13} + 0\cdot A_{23} + 1\cdot A_{33} + 0\cdot A_{43} = 2\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\cdot 2 + 1\cdot\left(-10\right) = -6$$

**49.** *Calcula desarrollando por una fila o una columna, los determinantes de las siguientes matrices:*

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 2 & 1\\ 3 & 2 & -1 & -3\\ 2 & -1 & 1 & 2\end{pmatrix} \text{ y } B=\begin{pmatrix}0 & 2 & -1 & 2\\ -2 & 1 & 2 & 1\\ 1 & -1 & 3 & 2\\ -1 & 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

# 2. PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

**1.** Si una matriz tiene una fila o una columna de ceros, el determinante es cero.

***Ejemplos:***

a) $\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\end{vmatrix}=1\cdot 0-0\cdot 2=0$

b) $\begin{vmatrix}1 & 0 & -2\\ -1 & 0 & 2\\ 1 & 0 & -3\end{vmatrix}=1\cdot 0\cdot(-3)+0\cdot(-1)\cdot(-2)+2\cdot 0\cdot 1-\left[1\cdot 0\cdot(-2)+0\cdot 2\cdot 1+(-1)\cdot 0\cdot(-3)\right]=0$

**2.** Si se intercambian dos filas o dos columnas, cambia el signo del determinante.

***Ejemplos:***

a) $\begin{vmatrix}1 & -2\\ 2 & 3\end{vmatrix}=1\cdot 3-2\cdot(-2)=7$

Intercambiamos la primera y la segunda filas:

$\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & -2\end{vmatrix}=2\cdot(-2)-1\cdot 3=-7$

b) $\begin{vmatrix}3 & 0 & -1\\ 1 & 4 & 2\\ -2 & 0 & 1\end{vmatrix}=12-8=4$

Intercambiamos la primera y la tercera columnas:

$\begin{vmatrix}-1 & 0 & 3\\ 2 & 4 & 1\\ 1 & 0 & -2\end{vmatrix}=8-12=-4$

**3.** El determinante de una matriz con dos filas o columnas iguales es cero.

***Ejemplos:***

a) $\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{vmatrix}=2-2=0$ (tiene dos columnas iguales)

b) $\begin{vmatrix}-1 & 2 & 0\\ 2 & 4 & 1\\ -1 & 2 & 0\end{vmatrix}=-2+2=0$ (tiene dos filas iguales)

**4.** Si multiplicamos una fila o columna por un número real, el valor del determinante queda multiplicado por dicho número.

***Ejemplos:***

a) $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \xrightarrow{\text{multiplicamos la primera fila por 3}} \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3$

b) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \xrightarrow{\text{multiplicamos la tercera columna por } -2} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -4 = -2 \cdot 2$

**5.** Un determinante, con una fila o columna formada por la suma de dos números, puede descomponerse en suma de otros dos determinantes que tienen las mismas filas o columnas restantes y, en lugar de aquella, otra formada por los primeros y segundos sumandos, respectivamente.

***Ejemplos:***

a)
$$\begin{vmatrix} 1+2 & 2 \\ -1+3 & 0 \end{vmatrix} = (1+2)\cdot 0 - (-1+3)\cdot 2 = -4$$
$$\begin{vmatrix} 1+2 & 2 \\ -1+3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 2 - 6 = -4$$

b)
$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1+2 & 2-1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3$$
$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1+2 & 2-1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2 = 3$$

**6.** El determinante de una matriz no cambia si a una cualquiera de sus filas o columnas se le suman o restan los elementos de otra paralela a ella, multiplicados por una constante.

***Ejemplos:***

a)
$$\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2$$
$$\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \overset{F_2 \Rightarrow F_1 + F_2}{=\!=\!=\!=} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2$$

b) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 2 = 5$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \underset{F_1+F_3}{\overset{-2F_1+F_2}{=}} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5$$

**7.** Un determinante es cero si alguna de las filas o columnas que lo componen es combinación lineal de otras paralelas a ella.

***Ejemplos:***

a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \\ 3 & -3 & -9 \end{vmatrix} = 0$ ya que $C_3 = 3C_2$

b) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$ ya que $F_3 = F_1 + 2F_2$

**8.** El determinante de un producto de matrices es igual al producto de los determinantes de cada factor:

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

***Ejemplo:***

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 0 \text{ y } |B| = \det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & -2 \end{pmatrix} = -67 \Rightarrow \det(A)\det(B) = 0\cdot(-67) = 0$$

$$|AB| = \det\left[\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & -2 \end{pmatrix}\right] = \det\begin{pmatrix} 9 & 9 & 1 \\ -8 & -12 & -6 \\ -5 & -3 & 2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \det(AB) = 0$$

***Otras propiedades de los determinantes*** que es importante conocer son:

**9.** $\left|A^T\right| = |A|$

**10.** $\left|A^{-1}\right| = \dfrac{1}{|A|}$

Demostración:

$$AA^{-1} = I \Rightarrow \det\left(AA^{-1}\right) = \det I \Rightarrow \det A \cdot \det A^{-1} = 1 \Rightarrow \det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$ C.Q.D.

## ***Ejercicios:***

**50.** *Si* $|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 6$, *calcula, aplicando las propiedades:*

a) $|2A|$ b) $|-5A|$ c) $\begin{vmatrix} a & d & 3g \\ b & e & 3h \\ c & f & 3i \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} g & h & i \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ -d & -e & -f \\ \frac{1}{2}g & \frac{1}{2}h & \frac{1}{2}i \end{vmatrix}$

**51.** *Aplica las propiedades de determinantes para probar que* $\det(A)$ *vale cero, siendo A la matriz:*

*a)* $A = \begin{pmatrix} a & a & a \\ 3 & 6 & 9 \\ 4 & 8 & 12 \end{pmatrix}$ *b)* $A = \begin{pmatrix} a+1 & a+2 & a+3 \\ 3 & 6 & 9 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

## ***Ejercicio resuelto* (Murcia, Junio de 2024)**

Se dice que una matriz $A$ de orden 2 es una matriz de Hadamard si está formada solo por 1's y $-1$'s (unos y menos unos) y cumple que $AA^T = 2I$.

a) Determina cuál de las siguientes matrices es de Hadamard:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

b) Si $A$ es una matriz de Hadamard cualquiera de orden 2, calcula razonadamente su determinante.

c) Justifica que toda matriz $A$ de Hadamard de orden 2 es regular (o invertible) y obtén una expresión de para su inversa en términos de $A^T$.

a) Sea $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Entonces:

$$AA^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2I \Rightarrow A \text{ es una matriz de Hadamard}$$

Sea ahora $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Entonces:

$$AA^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq 2I \Rightarrow A \text{ no es una matriz de Hadamard}$$

b) Sabemos que

$$\det\left(AA^T\right) = \det(2I) \underset{(1)}{\Rightarrow} \det A \cdot \det A^T = 2^2 \det I \underset{(2)}{\Rightarrow} (\det A)^2 = 4 \Rightarrow \det A = \sqrt{4} = 2$$

donde en (1) hemos usado las propiedades 8 y 4, y en (2) hemos usado la propiedad 9.

c) Si es $A$ es una matriz de Hadamard, entonces $AA^T = 2I$ y, por tanto,

$$A^{-1}AA^T = A^{-1}2I$$
$$A^T = 2A^{-1}$$
$$A^{-1} = \frac{1}{2}A^T$$

# 3. MÉTODOS PARA CALCULAR DETERMINANTES

## Método del pivote:

Se basa en la propiedad 6, y consiste en elegir una fila o columna, tomar un elemento (llamado pivote) y hacer ceros los demás elementos de dicha fila o columna. Después, se desarrolla el determinante por esa fila o columna.

## Método de Gauss:

Dado un determinante cualquiera de orden *n*, para hallar su valor por el método de Gauss tendremos que transformarlo en otro determinante de forma triangular.

Ahora bien, hay que tener en cuenta lo siguiente:

- Intercambiar dos filas entre sí implica el cambio de signo del determinante.
- La transformación $F_i \to \alpha F_i + \beta F_j$ multiplica el valor del determinante por $\alpha$, por lo que es recomendable usar solo la transformación $F_i \to F_i + \beta F_j$.

Para anular todos los elementos que quedan por debajo de la diagonal principal, utilizaremos la búsqueda de ceros, y tendremos en cuenta las propiedades de los determinantes.

## *Ejercicios:*

**52.** *Halla los determinantes:*

a) $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \\ 5 & -6 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

**53.** *Demuestra que:*

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & -1 \\ 1 & a & -1 & 1 \\ 1 & -1 & a & 1 \\ -1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a+1)^3 \cdot (a-3)$$

**54.** *Halla en función de $a$ el determinante:*

$$\begin{vmatrix} a+1 & a & a & a \\ a & a+1 & a & a \\ a & a & a+1 & a \\ a & a & a & a+1 \end{vmatrix}$$

**55.** *Resuelve la ecuación*

$$\begin{vmatrix} x & -1 & -1 & 0 \\ -x & x & -1 & 1 \\ 1 & -1 & x & 1 \\ 1 & -1 & 0 & x \end{vmatrix} = 0$$

**56.** *Sea la matriz* $A = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, *con* $a \in \mathbb{R}$. Calcula el determinante de $A$ y de $AA$. ¿Cuál será el determinante del producto de $n$ veces $A$ (con $n > 2$ y entero)? Justifica y razona tu respuesta.

***Ejercicios de selectividad***

Junio de 2014, propuesta A, 3)

Junio de 2016, propuesta B, 3)

Junio de 2022, 1b)

Julio de 2022, 3b)

Julio de 2023, 8a)

Julio de 2024, 7a)

# 4. APLICACIONES DE LOS DETERMINANTES

## (1) *CÁLCULO DE LA MATRIZ INVERSA*

**Definición:**

La *matriz adjunta* de la matriz $A = (a_{ij})$ es la matriz $Adj(A) = (A_{ij})$ que resulta de sustituir el elemento $a_{ij}$ por su adjunto correspondiente, $A_{ij}$.

**Cálculo de la inversa:**

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\left[\text{Adj}(A)\right]^T$$

***Ejemplo:***

Calculamos la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Calculamos el determinante de $A$: $\det A = -1$
2) Calculamos los menores complementarios:

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \qquad M_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \qquad M_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$M_{21}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=0 \qquad M_{22}=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=1 \qquad M_{23}=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=1$$

$$M_{31}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=1 \qquad M_{32}=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=3 \qquad M_{33}=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=1$$

3) Calculamos los adjuntos de todos los elementos de la matriz:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}M_{11}=-1 \qquad A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=1 \qquad A_{13}=(-1)^{1+3}M_{13}=0$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}M_{21}=0 \qquad A_{22}=(-1)^{2+2}M_{22}=1 \qquad A_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=-1$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}M_{31}=1 \qquad A_{32}=(-1)^{3+2}M_{32}=-3 \qquad A_{33}=(-1)^{3+3}M_{33}=1$$

4) Calculamos la matriz adjunta y su traspuesta:

$$Adj(A)=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & -3 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow\left[Adj(A)\right]^T=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & -3\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

5) La inversa de $A$ es:

$$A^{-1}=\frac{1}{-1}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & -3\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ -1 & -1 & 3\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

## ***Ejercicios:***

**57.** *Consideramos la matriz A:* $A=\begin{pmatrix}1 & a & -1\\ a & 1 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$

*a) ¿Para qué valores de* $a$ *tendrá inversa la matriz?*
*b) Calcúlala para* $a=2$ *y para* $a=3$.

**58.** *Halla las matrices inversas, cuando existan, de las siguientes:*

*a)* $A=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 1 & 3\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 2 & 3\end{pmatrix}$ *b)* $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 3 & 2\\ 1 & -1 & -3\end{pmatrix}$ c) $C=\begin{pmatrix}1 & -4 & 5\\ 1 & 0 & 0\\ 3 & 2 & -1\end{pmatrix}$

## (2) ***CÁLCULO DEL RANGO DE UNA MATRIZ***

**Definición:**

El rango de una matriz es el número de filas o de columnas linealmente independientes.

**Teorema del rango:**

El rango de una matriz coincide con el orden de la mayor submatriz regular, es decir, con el orden de la mayor submatriz cuadrada con determinante no nulo.

Del teorema del rango se deduce que si en una matriz cuadrada $A$

- Intercambiamos dos filas (columnas) o

- Multiplicamos una fila (columna) por un número no nulo o
- Le sumamos a una columna una combinación lineal del resto

la matriz $A$ resultante tiene el mismo rango que $A$.

**Condiciones necesarias y suficientes para que una matriz tenga inversa:**

Una matriz cuadrada $A$ es invertible (es decir, existe $A^{-1}$) $\Leftrightarrow \text{rango}(A) = \text{orden}(A) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow A$ es regular.

## EJEMPLOS:

Calcula el rango de las siguientes matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 4 \\ 5 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$A_1 = (8)$ es una submatriz de $A$ de orden 1 y $|8| \neq 0 \Rightarrow rango(A) \geq 1$

$A_2 = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$ es una submatriz de $A$ de orden 2 y $\begin{vmatrix} 8 & 1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow rango(A) \geq 2$

$A_3 = A = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 4 \\ 5 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ es una submatriz de A de orden 3 y $|A| = 0 \Rightarrow rango(A)$ no puede ser 3

Como consecuencia, $rango(A) = 2$.

b) $B = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 3 \\ -6 & 8 & 0 \\ 2 & 5 & -5 \end{pmatrix}$

$B_1 = (6)$ es una submatriz de $B$ de orden 1 y $|6| \neq 0 \Rightarrow rango(B) \geq 1$

$B_2 = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -6 & 8 \end{pmatrix}$ es una submatriz de $B$ de orden 2 de y $\begin{vmatrix} 6 & -1 \\ -6 & 8 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rango}(B) \geq 2$

$B_3 = B = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 3 \\ -6 & 8 & 0 \\ 2 & 5 & -5 \end{pmatrix}$ es una submatriz de B de orden 3 y $\begin{vmatrix} 6 & -1 & 3 \\ -6 & 8 & 0 \\ 2 & 5 & -5 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow rango(B) = 3$

c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 7 \\ -2 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

$C_1 = (1)$ es una submatriz de $C$ de orden 1 y $|1| \neq 0 \Rightarrow rango(C) \geq 1$

$C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ es una submatriz de $C$ de orden 2 y $|C_2| \neq 0 \Rightarrow rango(C) \geq 2$ (fíjate que hay un montón de submatrices de orden 2 en $C$)

Y también hay 4 submatrices de orden 3 en $C$:

- Quitando la cuarta columna: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 3 \\ -1 & 6 & 5 \end{pmatrix}$
- Quitando la tercera columna: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ -2 & 4 & 5 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$
- Quitando la segunda columna: $\begin{pmatrix} 3 & 7 & -2 \\ 3 & 5 & -1 \\ -1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$
- Quitando la primera columna: $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 4 & 3 & 5 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

Sin embargo en este caso hemos tenido suerte y todos tienen determinante distinto de cero ( $-8$, $-64$, $-53$ y $30$), pero si el primero hubiera tenido determinante cero, habría que haber calculado el segundo, y así hasta encontrar o no, uno con determinante distinto de cero.

Como consecuencia, $rango(C)=3$.

## ***Ejercicios:***

**59.** *Calcula el rango de las siguientes matrices:*

*a)* $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & -6 \\ 3 & -3 & 9 \end{pmatrix}$ *b)* $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 0 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$

*c)* $C=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *d)* $D=\begin{pmatrix} 3 & -7 & 4 \\ -2 & 8 & -1 \end{pmatrix}$

**60.** *Busca el valor de $a$ para que la siguiente matriz tenga rango 2:* $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & -3 & a \end{pmatrix}$

**61.** *Estudia el rango de la matriz A, según los valores del parámetro a:* $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ a+2 & 2 & -1 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$

**62.** *Estudia el rango de las matrices según los valores de a:*

*a)* $M=\begin{pmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & 1 \\ 1 & 1 & a+1 \end{pmatrix}$ *b)* $N=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 4 & a & -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$

**63.** *Estudia el rango de A según los valores del parámetro a. ¿Para qué valores de a es A invertible?*

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & a \\ 5 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & -6 & a+8 \end{pmatrix}$$

## (3) ***RESOLUCIÓN DE S.E.L.: REGLA DE CRAMER***

S.E.L. = Sistema de Ecuaciones Lineales

La **expresión matricial** del sistema de $m-$ ecuaciones y $n-$incógnitas

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

es $AX=B$, donde $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$, $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$.

**Definición:**

$AX=B$ es un sistema de Cramer $\Leftrightarrow$ $A$ es regular

**Regla de Cramer** (válida solo para sistemas de Cramer):

$$|A|\neq 0 \;\Rightarrow\; x_i=\frac{\det\left(c_1|\ldots|b|\ldots|c_n\right)}{|A|}$$

donde el determinante del numerador está formado por las columnas de $A$, sustituyendo la $i-$ ésima columna, por la columna $b$ de términos independientes.

Demostración:

En el determinante de $A$, sustituimos la columna $i-$ésima por la de términos independientes:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \ddots & \cdots & & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & b_i & \cdots & a_{in} \\ \cdots & & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \ddots & \cdots & & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{i1}x_1+\ldots+a_{in}x_n & \cdots & a_{in} \\ \cdots & & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n1}x_1+\ldots+a_{nn}x_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$\underset{(2)}{=}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{11}x_1 & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \ddots & \cdots & & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{i1}x_1 & \cdots & a_{in} \\ \cdots & & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n1}x_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \ldots + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1}x_1 & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \ddots & \cdots & & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in}x_1 & \cdots & a_{in} \\ \cdots & & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}x_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \underset{(3)}{=}$$

$$= x_1\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \ddots & \cdots & & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \ldots + x_i\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \ddots & \cdots & & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \ldots + x_n\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \ddots & \cdots & & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$\underset{(4)}{=} x_i\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \ddots & \cdots & & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = x_i\,|A|$$

de donde se obtiene que $x_i = \dfrac{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \ddots & \cdots & & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & b_i & \cdots & a_{in} \\ \cdots & & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|}$

En (1) hemos sustituido $b_i$ por su valor $a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n$; en (2) hemos usado la propiedad 5 de los determinantes «Un determinante, con una fila o columna formada por una suma de varios números, puede descomponerse en suma de varios determinantes que tienen las mismas filas o columnas restantes y, en lugar de aquella, otra formada por los primeros, segundos… sumandos, respectivamente»; en (3) hemos usado la propiedad 4 de los determinantes «Si multiplicamos una fila o columna por un número real, el valor del determinante queda multiplicado por dicho número»; y en (4) hemos usado la propiedad 3 de los determinantes «El determinante de una matriz con dos filas o columnas iguales es cero».

C.Q.D.

***Curiosidad: cálculo numérico***

| **Método** | Número exacto/aproximado de operaciones que hay que hacer para resolver un sistema de ecuaciones lineales $n\times n$. |
|---|---|
| Gauss | $= n\left(n^2 + n - 1\right)$ (76 operaciones para un S.E.L. $4\times 4$) |
| Cramer | $\simeq n!n^2$ (384 operaciones para un S.E.L. $4\times 4$) |

***<u>Ejemplo:</u>***

En una población se han presentado dos partidos políticos A y B a las elecciones municipales. Si 250 votantes del partido A hubiesen votado el partido B, ambos partidos hubiesen empatado a votos. El número de votos en blanco o nulos es el 1 % de la suma del número de votos obtenidos por ambas candidaturas. Sabiendo que fueron a votar 11 615 electores, halla el número de votos obtenido por cada partido y cuantos son blancos o nulos.

Nombramos las variables y planteamos el sistema:

$$\begin{cases} x = \text{ número de votantes de A} \\ y = \text{ número de votantes de B} \\ z = \text{ número de votos nulos o en blanco} \end{cases} \quad \begin{cases} x-250 = y+250 \\ z = 0.01(x+y) \\ x+y+z = 11615 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x-y=500 \\ -x-y+100z=0 \\ x+y+z=11615 \end{cases}$$

Aplicamos la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix} 500 \\ 0 \\ 11\,615 \end{matrix}} & \begin{matrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 100 \\ 1 \end{matrix} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 100 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-1\,212\,000}{-202} = 6\;000 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} \begin{matrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 500 \\ 0 \\ 11\,615 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ 100 \\ 1 \end{matrix} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 100 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-1\,111\,000}{-202} = 5\,500$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} \begin{matrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{matrix} & \begin{matrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 500 \\ 0 \\ 11\,615 \end{matrix}} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 100 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-23\,230}{-202} = 115 \Longrightarrow (x,y,z) = (6000,5500,115)$$

El candidato *A* obtiene 6000 votos, el *B* 5500, y nulos o en blanco hay 115.

## ***Problemas de sistemas de ecuaciones lineales: Cramer vs Gauss***

***64.*** *En un Instituto se imparten enseñanzas de ESO, Bachillerato y Ciclos Formativos. La suma del número de los alumnos de Bachillerato y del doble de los alumnos de Ciclos Formativos excede en 100 al número de los alumnos de ESO. Si sumamos el 40 % de los matriculados en la ESO con el 30 % de los matriculados en Bachillerato y con el 20 % de los matriculados en Ciclos Formativos se obtiene un número que excede en 45 unidades al 30 % del número total de alumnos. Sabiendo que cursan estos tres tipos de enseñanza un total de 1200 alumnos, halla el número de matriculados en cada tipo de enseñanza.*

***65.*** *La suma de las edades actuales de los tres hijos de un matrimonio es 59 años. Hace cinco años, la edad del menor era un tercio de la suma de las edades que tenían los otros dos. Dentro de cinco años, el doble de la edad del hermano mediano excederá en una unidad a la suma de las edades que tendrán los otros dos. Halla las edades actuales de cada uno de los hijos*

***66.*** *Para poder comprar 5 bolígrafos necesito 2 euros más de los que tengo. En cambio, me sobra un euro de lo que tengo si compro 2 lapiceros. Finalmente, necesito 60 céntimos de euro más de lo que tengo para poder comprar dos bolígrafos y dos lapiceros. Halla el precio de un bolígrafo y el de un lapicero. ¿De cuánto dinero dispongo?*

**Solución:**

$x =$ cantidad de dinero de la que dispongo
$y =$ precio de un boli
$z =$ precio de un lapicero

$$\begin{cases} 5y = x + 2 \\ 2z = x - 1 \\ 2y + 2z = x + 0.60 \end{cases} \rightarrow (x, y, z) = (2,\ 0.8,\ 0.5)$$

Así, dispongo de 2€, un bolígrafo cuesta 80 céntimos y un lapicero cuesta 50 céntimos.

**67.** Se consideran, el número de tres cifras "*xyz*" y el que resulta de éste al permutar las cifras de las unidades y de las centenas. Halla el valor de las cifras "*x*", "*y*" y "*z*" sabiendo que la suma de los dos números es 585, que la división del primero entre el segundo tiene de cociente 1 y de resto 99 y que la suma de la cifra de las centenas y la cifra de las decenas del primer número es 7.

**Solución:**

$$\left.\begin{array}{l} xyz = 100x + 10y + z \\ zyx = 100z + 10y + x \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} (100x + 10y + z) + (100z + 10y + x) = 585 \\ 100x + 10y + z = 100z + 10y + x + 99 \\ x + y = 7 \end{cases} \rightarrow (x, y, z) = (3, 4, 2)$$

Las cifras «*x*», «*y*» y «*z*» toman los valores 3, 4 y 2 respectivamente.

***68.*** *Para la compra de un artículo de precio 10,70 euros se utilizan monedas de 1 euro, de 50 céntimos de euro y de 20 céntimos de euro. El número total de monedas excede en una unidad al triple de monedas de 1 euro. El 30 % de la suma del número de monedas de 1 euro con el doble del número de monedas de 50 céntimos coincide con el número de monedas de 20 céntimos. Halla el número de monedas que se utilizan de cada clase.*

**Solución:**

Nombramos las incógnitas y planteamos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x = \text{ número de monedas de 1 €} \\ y = \text{ número de monedas de 50 cent.} \\ z = \text{ número de monedas de 20 cent.} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 0,5y + 0,2z = 10,70 \\ x + y + z = 3x + 1 \\ 0,3(x + 2y) = z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 100x + 50y + 20z = 1070 \\ -2x + y + z = 1 \\ 3x + 6y - 10z = 0 \end{cases} \rightarrow (x, y, z) = (6, 7, 6)$$

Por tanto, utiliza 6 monedas de 1 €, 7 monedas de 50 cent. Y 6 monedas de 20 cent.

***69.*** **** Un hombre le dice a su esposa: ¿Te has dado cuenta que desde el día de nuestra boda hasta el día del nacimiento de nuestro hijo transcurrieron el mismo número de años que desde el día del nacimiento de nuestro hijo hasta hoy? El día del nacimiento de nuestro hijo la suma de nuestras edades era de 55 años. La mujer le replicó: "Me acuerdo que en ese día del nacimiento de nuestro hijo, tú tenías la edad que yo tengo ahora y además recuerdo que el día de nuestra boda el doble de la edad que tu tenías excedía en 20 años a la edad que yo tengo hoy. Halla las edades actuales de ambos.*

**Solución:**

$$\text{Boda} \xrightarrow{\quad x \quad} \text{Nacimiento hijo} \xrightarrow{\quad x \quad} \text{Hoy}$$

$$2(y-x)=(z+x)+20 \qquad \begin{cases} y = \text{edad marido} \\ z = \text{edad mujer} \end{cases}$$

$$3^{\text{a}}\ \text{ecuación} \qquad \begin{cases} y+z=55\ (1^{\text{a}}\ \text{ecuación}) \\ y=z+x\ (2^{\text{a}}\ \text{ecuación}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y+z=55 \\ y=z+x \\ 2(y-x)=(z+2x)+20 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y+z=55 \\ -x+y-z=0 \\ -4x+2y-z=20 \end{cases} \rightarrow (x,y,z)=(5,35,30)$$

Por tanto, a día de hoy, el marido tiene 30 + 5 = 35 años y la mujer 25 + 5 = 30 años.

## ***Ejercicios de selectividad***

Junio de 2018, propuesta B, 3) Julio de 2020, 1a)

Junio de 2022, 6a) Junio de 2023, 5b)

# Unidad 3:
# DISCUSIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES

## 1. TEOREMA DE ROUCHÉ-FRÖBENIUS

Lleva el nombre del matemático francés **Eugène Rouché** quien lo enunció en 1875 y lo completó en 1880, y del matemático alemán **Ferdinand Georg Fröbenius** quien fue uno de los muchos matemáticos que lo demostraron.

**Teorema de Rouché-Fröbenius**

Un sistema de ecuaciones lineales es compatible si, y solo si, el rango de la matriz de coeficientes *A*, es igual al rango de la matriz ampliada $(A \mid b)$:

$$\text{Sistema compatible} \Leftrightarrow \text{rango}(A) = \text{rango}(A \mid b)$$

Demostración:

Escribimos el sistema en forma vectorial: $C_1x_1 + C_2x_2 + \ldots + C_nx_n = b$

$\Rightarrow$) Si el sistema es compatible determinado, entonces, existe al menos una solución $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$. Esto es, $C_1s_1 + C_2s_2 + \ldots + C_ns_n = b$, es decir, la columna de términos independientes es combinación lineal de las columnas de la matriz de los coeficientes, $A$, y, como consecuencia, $\text{rango}(A) = \text{rango}(A \mid b)$.

$\Leftarrow$) Si $\text{rango}(A) = \text{rango}(A \mid b)$, entonces la columna de términos independientes es combinación lineal de las columnas de la matriz $A$ y, por tanto, $\exists(s_1, \ldots, s_n)$ tal que $b = C_1s_1 + C_2s_2 + \ldots + C_ns_n$, esto es, $(s_1, \ldots, s_n)$ es una solución del sistema y, como consecuencia, el sistema es compatible determinado. C.Q.D.

## 2. DISCUSIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Sea $AX = b$ un sistema de ecuaciones lineales de $m-$ecuaciones y $n-$incógnitas.

**Discusión de sistemas lineales homogéneos:**

$$\begin{array}{c}\text{Sistemas}\\ \text{homogéneos}\\ (b=0)\end{array}\left\{\begin{array}{l}\left.\begin{array}{c} rango(A) = rango(A|b) = n \\ \text{el sistema tiene solución: la trivial}\end{array}\right\} \begin{array}{c}\textit{COMPATIBLE}\\ \textit{DETERMINADO}\end{array} \\ \\ \left.\begin{array}{c} rango(A) = rango(A|b) < n \\ \text{el sistema tiene infinitas soluciones}\end{array}\right\} \begin{array}{c}\textit{COMPATIBLE}\\ \textit{INDETERMINADO}\end{array}\end{array}\right.$$

**Discusión de sistemas lineales no homogéneos[2]:**

$$\text{Sistemas no homogéneos}\begin{cases} \begin{array}{c} rango(A)=rango(A\mid b)=r \\ \text{el sistema tiene solución} \\ \textit{COMPATIBLE} \end{array} \begin{cases} \begin{array}{c} r=n \\ \text{solución única} \\ \textit{DETERMINADO} \end{array} \\ \\ \begin{array}{c} r<n \\ \text{infinitas soluciones} \\ \textit{INDETERMINADO} \end{array} \end{cases} \\ \\ \begin{array}{c} rango(A)\neq rango(A\mid b) \\ \text{el sistema no tiene solución} \\ \textit{INCOMPATIBLE} \end{array} \end{cases}$$

Como consecuencia del teorema de Rouché-Fröbenius se tiene que todo sistema de Cramer es compatible determinado. Sin embargo, *no todo sistema compatible determinado es de Cramer*.

# 3. DISCUSIÓN DE SISTEMAS CON UN PARÁMETRO

Un **parámetro** es un símbolo matemático que puede tomar infinitos valores reales en una ecuación, para cada uno de los cuales se obtendrá una solución diferente, denominada **solución particular**.

**Definición:**

La **discusión de sistemas con un parámetro** consiste en hallar los valores de dicho parámetro, para los que el sistema es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible.

Se pueden ***discutir***:

- Utilizando el método de Gauss.
- Con el teorema de Rouché–Fröbenius, aplicando solo los determinantes.
- Con el teorema de Rouché–Fröbenius primero y aplicando el método de Gauss después.

## *Ejercicios de selectividad*

Julio de 2020, 2a)

Septiembre de 2020, 2a)

Junio de 2021, 2a)

Julio de 2021, 2a)

Julio de 2022, 1a)

Julio de 2023, 1a)

Junio de 2024, 1)

Julio de 2024, 1)

## *Ejercicio:*

***70.*** *Discutir y resolver, cuando sea posible, los siguientes sistemas de ecuaciones lineales dependientes de un parámetro:*

[2] Al consultar la bibliografía, es posible que enuncien el teorema de Rouché-Fröbenius de esta forma.

a) $\begin{cases} 2x + y + z + t = 0 \\ ax - 2y + z + 4t = 0 \\ 3x - y - z + 4t = 0 \\ -2x + 4y - z + 9t = 0 \end{cases}$ con $a \in \mathbb{R}$

b) $\begin{cases} 3x - ay + 3z = 4 \\ ax + y - z = 2 \\ x - y + z = 1 \\ ax + 4y - z = 5 \end{cases}$ con $a \in \mathbb{R}$

***71.*** *Una heladería vende helados de una, dos y tres bolas a uno, dos y tres euros, respectivamente. El viernes ha vendido 157 helados obteniendo 278 euros. También sabemos que el número de helados de una bola vendidos es* $k$ *veces el número de helados de tres bolas, con* $k > 0$.

*a) Plantea un sistema de ecuaciones lineales cuya resolución permita determinar el número de helados vendidos de cada tipo.*

*b) Estudia para qué valores del parámetro* $k$ *el sistema tiene solución única. Para los casos en los que el sistema tiene solución única, ¿es posible que en alguno de ellos se hayan vendido el mismo número de helados de una bola que de tres bolas? Justifica tu respuesta.*

# 4. ELIMINACIÓN DE PARÁMETROS

La **eliminación de parámetros** de un sistema de ecuaciones es el procedimiento que transforma un sistema dado en otro equivalente en el que no aparecen los parámetros anteriores.

Consideremos un sistema de ecuaciones expresado en función de los parámetros $\lambda_1,...,\lambda_n$:

$$\left.\begin{array}{l} b_1 + a_{11}\lambda_1 + ... + a_{1n}\lambda_n = x_n \\ ...................................... \\ b_m + a_{m1}\lambda_1 + ... + a_{mn}\lambda_m = x_m \end{array}\right\}$$

Transformamos el sistema anterior en un sistema de *m*-ecuaciones con *n*-incógnitas ($\lambda_1,...,\lambda_n$):

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}\lambda_1 + ... + a_{1n}\lambda_n = x_n - b_1 \\ ......................................... \\ a_{m1}\lambda_1 + ... + a_{mn}\lambda_m = x_m - b_m \end{array}\right\}$$

Imponiendo que $\text{rango}(A) = \text{rango}(A \mid b)$ obtenemos un sistema equivalente en el que no aparecen los parámetros $\lambda_1,...,\lambda_n$. Estas ecuaciones reciben el nombre de ecuaciones implícitas del sistema.

Consideraciones a tener en cuenta:

- Si en el sistema inicial, $\text{rango}(A) = m$, no podemos eliminar ningún parámetro, ya que, al ser el sistema compatible determinado, no tiene ecuaciones implícitas que lo restrinjan.
- Si $\text{rango}(A) = k < m$ podremos eliminar algunos parámetros; esta eliminación dará lugar a un sistema de $m-k$ ecuaciones.

# 5. GEOGEBRA

**(1) Multiplicación de matrices cuadradas de orden 3.**
Autor: Leopoldo Aranda Murcia
Tema: Matrices, Multiplicación

https://www.geogebra.org/m/buacy6cj

**(2) Determinante de una matriz 3x3. Dos métodos.**
Autor: Leopoldo Aranda Murcia
Tema: Matrices

https://www.geogebra.org/m/v6sfw9bw

**(3) Ejercicios de determinantes**
Autor: Pepe Muñoz
Tema: Álgebra, Matrices

https://www.geogebra.org/m/egxn7jqf

**(4) Rango de una matriz**
Autor: José María Arias Cabezas

https://www.geogebra.org/m/ajGRxdNM

**(5) Solución gráfica de ecuaciones de 3x3**
Autor: Antonio Zavaleta Bautista
Tema: Ecuaciones

https://www.geogebra.org/m/chVQmea4

**(6) Resolución sistema de ecuación lineal 3x3**
Autor: Edgar Arana
Resolución de Sistemas de Ecuaciones Lineales 3x3, método de la matriz Inversa, en el cuadro de la derecha puedes modificar los valores de los coeficientes de las variables de cada ecuación, se mostrarán inmediatamente en la lista de la izquierda que se denomina coeficientes y la solución, si existe, se muestra en orden para X,Y,Z, en la matriz Solución.

https://www.geogebra.org/m/S93qc8Fz

# Unidad 4:
# ESPACIO AFÍN

## 1. ESPACIO AFÍN TRIDIMENSIONAL

### 1.1. Vectores en el espacio: vectores fijos y libres

**Definición:**

Un vector fijo $\overrightarrow{AB}$ es un segmento orientado que tiene su origen en el punto $A$ y su extremo en el punto $B$.

Geométricamente se representan con una flecha que empieza en $A$ y acaba en $B$.

Los *elementos* de un vector fijo son:

- Módulo de $\overrightarrow{AB}$: es la longitud del segmento y se representa por $\left|\overrightarrow{AB}\right|$.
- Dirección de $\overrightarrow{AB}$: es la dirección de la recta que pasa por $A$ y $B$.
- Sentido de $\overrightarrow{AB}$: es el recorrido de la recta cuando nos trasladamos de $A$ a $B$. Si dos vectores fijos tienen el mismo sentido escribiremos $\overrightarrow{AB}\uparrow\overrightarrow{CD}$ y si lo tienen distinto $\overrightarrow{AB}\downarrow\overrightarrow{CD}$. El vector fijo nulo no tiene sentido definido.

Dos vectores fijos no nulos son equipolentes si tienen el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido, es decir,

$$\overrightarrow{AB}\sim\overrightarrow{CD}\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AB}\parallel\overrightarrow{CD}\\ \overrightarrow{AB}\uparrow\overrightarrow{CD}\\ \left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{CD}\right|\end{cases}$$

Apuntillemos que todos los vectores fijos nulos son equipolentes entre sí.

La relación de equipolencia entre vectores fijos verifica claramente las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva:

Reflexiva: $\overrightarrow{AB}\sim\overrightarrow{AB}$

Simétrica: $\overrightarrow{AB}\sim\overrightarrow{CD}\Rightarrow\overrightarrow{CD}\sim\overrightarrow{AB}$

Transitiva: $\overrightarrow{AB}\sim\overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{CD}\sim\overrightarrow{EF}\Rightarrow\overrightarrow{AB}\sim\overrightarrow{EF}$

es por lo tanto una relación de equivalencia, por lo que el conjunto de todos los vectores fijos del plano queda clasificado en clases de equivalencia (cada clase de equivalencia estará formada por un vector fijo y todos los equipolentes a él). A cada una de estas clases la llamaremos vector libre[3].

[3] Esto no es nada extraño; de hecho ya conoces otro conjunto en el que pasa lo mismo, es el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales. Recuerda que cuando se trabaja con fracciones se puede elegir la que más nos convenga de todas las que son equivalentes a la que nos dan. Esto mismo es lo que vamos a hacer con los vectores. De todos los que son equipolentes entre sí elegiremos el más apropiado en cada situación.

**Definición:**

Llamaremos vector libre a cada una de las las clases de equivalencia formada por un vector fijo y todos sus equipolentes. El vector libre determinado por el vector fijo $\overrightarrow{AB}$ lo notaremos $\left[\overrightarrow{AB}\right]$, es decir:

$$\left[\overrightarrow{AB}\right] = \left\{\vec{x} : \vec{x} \sim \overrightarrow{AB}\right\}$$

y al vector fijo $\overrightarrow{AB}$ se le suele llamar representante de la clase.

Al conjunto formado por todos los vectores libres lo representaremos por $V^3$.

La propiedad fundamental de los vectores libres es que existe un único representante de cada clase con origen en un punto dado.

Dos vectores libres son iguales, cuando sus representantes son equipolentes.

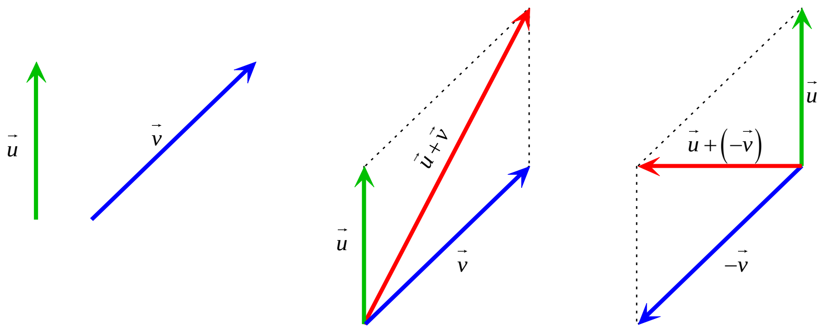
### 1.2. El espacio vectorial de los vectores libres

El conjunto que acabamos de definir, $V^3$, puede ser enriquecido con operaciones que lo doten de una estructura (en concreto la de espacio vectorial), que hará su estudio más cómodo, al poder ser identificado con otras estructuras similares más sencillas.
Las operaciones referidas son:

- Suma de vectores libres.
- Producto de un número real por un vector libre.

***a) Suma***

Para sumar dos vectores libres $\vec{u}$ y $\vec{v}$ se representa el vector $\vec{u}$ y por su extremo se representa un representante del vector $\vec{v}$. El vector que resulta de unir el origen de $\vec{u}$ con el extremo de $\vec{v}$ se denomina vector suma de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.




Propiedades de la suma:

(1) Conmutativa: $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$

(2) Asociativa: $\vec{u}+\left(\vec{v}+\vec{w}\right)=\left(\vec{u}+\vec{v}\right)+\vec{w}$

(3) Existencia de elemento neutro: $\vec{0}$ : $\vec{u}+\vec{0}=\vec{u}$

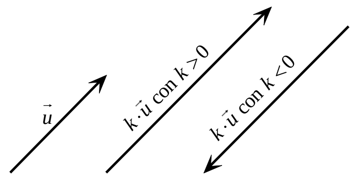
(4) Existencia de elemento opuesto: $\vec{u}+\left(-\vec{u}\right)=\vec{0}$

Por verificar estas cuatro propiedades se dice que $\left(V^3,+\right)$ es un grupo abeliano.

Nótese que la suma de vectores libres es una operación interna.

***b)*** ***Multiplicación de un vector por un número real***

El producto del vector $\vec{u}$ por el número real $k$ es el vector $k\vec{u}$ que tiene la misma dirección que $\vec{u}$, igual sentido si $k>0$, y sentido contrario si $k<0$, y cuyo módulo es igual a $k\left|\vec{u}\right|$.




Propiedades de la multiplicación por escalares:

(5) $k\left(\vec{u}+\vec{v}\right)=k\vec{u}+k\vec{v}$

(6) $\left(k+h\right)\vec{u}=k\vec{u}+h\vec{u}$

(7) $\left(kh\right)\vec{u}=k\left(h\vec{u}\right)$

(8) $1\vec{u}=\vec{u}$

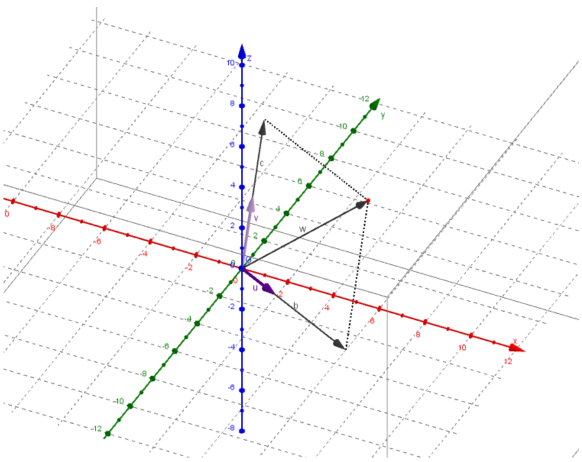
Por verificar estas ocho propiedades se dice que la terna $\left(V^3,+,\cdot_{\mathbb{R}}\right)$ es un espacio vectorial real.

$$\boxed{\left(V^3,+,\cdot_{\mathbb{R}}\right) \text{ es un espacio vectorial real}}$$

## 1.3. Dependencia e independencia lineal de vectores

**Definición:**

Una combinación lineal de los vectores $\vec{v_1},\ \vec{v_2},\ ...,\ \vec{v_n}$ es una expresión de la forma $\alpha_1\vec{v_1}+...+\alpha_n\vec{v_n}$ con $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\in\mathbb{R}$.



**Definición:**

Diremos que los vectores $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$ , ... , $\vec{v_n}$ son linealmente dependientes si $\exists \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$ no todos nulos tales que $\alpha_1 \vec{u_1} + \alpha_2 \vec{u_2} + ... + \alpha_n \vec{u_n} = \vec{0}$. En caso contrario, diremos que los vectores son linealmente independientes, es decir, si la única posibilidad de que la igualdad anterior sea cierta es que $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$.

**Definición:**

Un conjunto de vectores de un espacio vectorial se dice que forman un sistema de generadores si cualquier vector del espacio se puede escribir como combinación lineal de los vectores de dicho conjunto.

**Definición:**

Un conjunto de vectores forman una base si son linealmente independientes y además forman un sistema de generadores.

Al número de vectores que forman una cualquiera de las bases (pues todas las bases de un mismo espacio vectorial tienen el mismo número de elementos) se le llama **dimensión** del espacio vectorial.

Por tanto, la dimensión de $V^3$ es tres.

Dada una base $\mathrm{B} = \{ \vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3} \}$ de $V^3$ y dado un vector $\vec{x}$ cualquiera, sabemos que existen tres únicos números reales $\alpha_1$, $\alpha_2$ y $\alpha_3$ que permiten expresar dicho vector $\vec{x}$ como combinación lineal de los vectores básicos, esto es:

$$\vec{x} = \alpha_1 \vec{u_1} + \alpha_2 \vec{u_2} + \alpha_3 \vec{u_3}$$

A la terna $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ se le llama coordenadas del vector $\vec{x}$ en la base $\mathrm{B} = \{ \vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3} \}$.

**Criterio práctico:**

En un espacio vectorial tridimensional tres vectores linealmente independientes siempre forman una base.

### 1.4. El Espacio vectorial $\mathbb{R}^3$

En $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{ (x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R} \}$ (conjunto de ternas de números reales) definimos las siguientes operaciones:

Suma: $(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$

Producto de un número real por una terna: $\lambda (x, y, z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

Las ternas $(x_1, y_1, z_1)$ y $(x_2, y_2, z_2)$ de $\mathbb{R}^3$ son iguales cuando se verifican las siguientes igualdades:

$$\begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \\ z_1 = z_2 \end{cases}$$

El conjunto $\mathbb{R}^3$ con las dos operaciones definidas antes, verifica las mismas ocho propiedades que hemos visto que cumplen los vectores libres y, por tanto,

$$\boxed{\left(\mathbb{R}^3, +, \cdot_{\mathbb{R}}\right) \text{ es un espacio vectorial real}}$$

## ***Ejercicios:***

**72.** *Calcula* $\alpha$ y $\beta$ *para que los vectores* $\vec{u} = (-1, \alpha, 2)$ *y* $\vec{v} = (\beta, 2\alpha, 2)$ *sean iguales.*

**73.** *Dados los vectores* $\vec{u} = (2,4,1)$, $\vec{v} = (-1,2,3)$ y $\vec{w} = (0,1,-1)$, *calcula:*

*a)* $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$

*b)* $\vec{u} - \vec{v} - \vec{w}$

*c)* $3\vec{u} - \vec{v} + 2\vec{w}$

*d)* $\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v} - \frac{3}{5}\vec{w}$

### 1.5. Espacio afín asociado al espacio vectorial $V^3$

Sea $E$ el espacio ordinario (conjunto de puntos del espacio) y $V^3$ el espacio vectorial de los vectores libres en $E$. El par $(E, \varphi)$, donde $\varphi : E \times E \to V^3$ definida por $(A, B) \to \left[\overrightarrow{AB}\right]$ verifica las siguientes propiedades, se denomina espacio afín asociado al espacio vectorial $V^3$:

1) Dado un vector $\vec{v} \in V^3$ y un punto $O \in E$, existe un único punto $P \in E$ tal que $\varphi(O, P) = \vec{v}$
2) $\varphi(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$
3) $\varphi(A, B) + \varphi(B, C) = \varphi(A, C) \qquad \forall A, B, C \in E$

En lo sucesivo lo denotaremos por $E^3$.

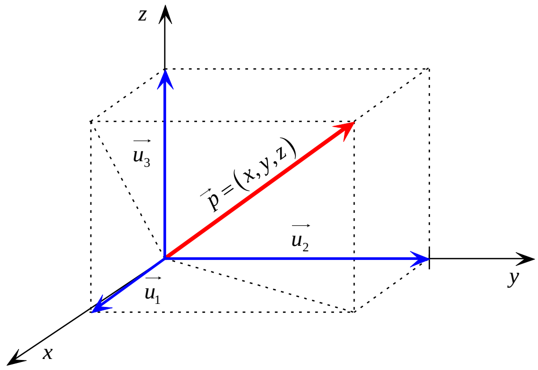
La aplicación anterior es, evidentemente, sobreyectiva, pero no inyectiva.

Sea $O \in E^3$. Entonces, todo punto $P \in E^3$ determina el vector libre $\vec{p} = \left[\overrightarrow{OP}\right]$, que denominaremos vector de posición del punto $P$ respecto del punto $O$.

Un sistema de referencia en el espacio afín $E^3$, es una cuaterna de puntos $(O, U_1, U_2, U_3)$ tales que los vectores $\vec{u}_1 = \left[\overrightarrow{OU_1}\right]$, $\vec{u}_2 = \left[\overrightarrow{OU_2}\right]$, y $\vec{u}_3 = \left[\overrightarrow{OU_3}\right]$ forman una base de $V^3$. Las rectas determinadas por el punto $O$ y cada uno de los puntos $U_1, U_2$ y $U_3$ se llaman ejes coordenados. Los planos determinados por cada par de ejes coordenados se llaman planos coordenados. Las coordenadas de un punto $P \in E^3$ son los únicos números reales $(x_1, x_2, x_3)$, tales que:

$$\left[\overrightarrow{OP}\right] = \vec{p} = x\vec{u}_1 + y\vec{u}_2 + z\vec{u}_3$$

El punto $P$ es la representación gráfica de la terna y lo indicaremos por $P(x, y, z)$.

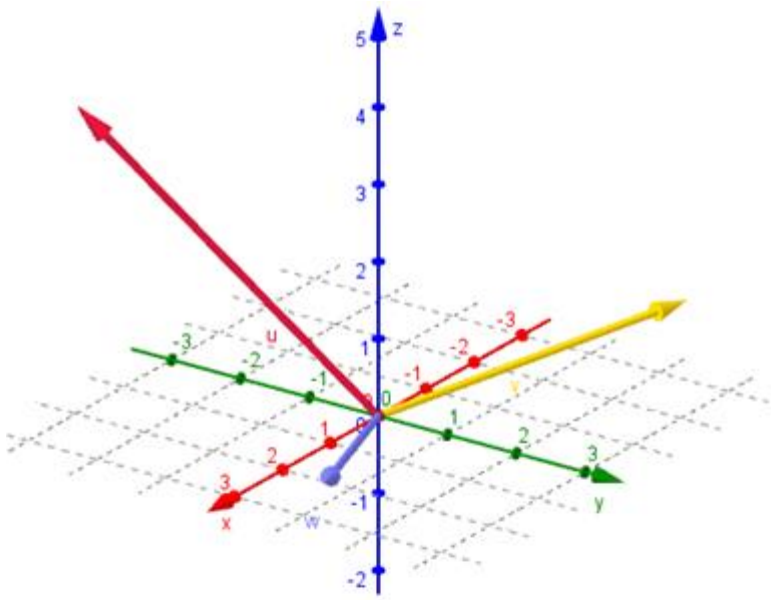



Como consecuencia, las ternas ordenadas de números reales son una representación algebraica de los vectores libres del espacio. De hecho, permiten identificar $V^3$ con $\mathbb{R}^3$:

$$\boxed{V^3 \cong \mathbb{R}^3}$$

con lo que toda relación geométrica se traduce en un relación numérica.

Lo anterior nos dice que desde el punto de vista matemático los espacios vectoriales $\left(V^3, +, \cdot_{\mathbb{R}}\right)$ y $\left(\mathbb{R}^3, +, \cdot_{\mathbb{R}}\right)$ son plenamente identificables, e indistinguibles como espacios vectoriales.




## ***Ejercicios:***

**74.** *Sean los vectores* $\vec{x}=(1,-5,2)$, $\vec{y}=(3,4,-1)$, $\vec{z}=(6,3,-5)$ *y* $\vec{w}=(24,26,-6)$. *Halla* $a$, $b$ y $c$ *para que se cumpla:* $a\vec{x}+b\vec{y}+c\vec{z}=\vec{w}$. *¿Qué significado tiene que* $\vec{w}$ *se pueda escribir como* $a\vec{x}+b\vec{y}+c\vec{z}$ *?*

**75.** *Las coordenadas de* $\vec{u},\vec{v}$ y $\vec{w}$ *respecto de cierta base son* $\vec{u}=(2,1,-1)$, $\vec{v}=(1,3,0)$ *y* $\vec{w}=(4,5,1)$. *¿Se puede expresar el vector* $\vec{w}$ *como combinación lineal de* $\vec{u}$ y $\vec{y}$ *? ¿Y si cambiamos las coordenadas de* $\vec{u}$ *por* $(2,-1,1)$?

**76.** *Expresa el vector* $\vec{z}=\left(5\sqrt{2}-4\sqrt{3},\frac{\sqrt{2}}{3},0\right)$ *como combinación lineal de los vectores* $\vec{x}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{2}{5}\right)$ *y* $\vec{y}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{3},\frac{2}{5}\right)$.

### 1.6. Criterios de dependencia e indepencia lineal de vectores

- Dos vectores $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$ y $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$ son linealmente dependientes si se verifica la siguiente condición:

$$\text{rango}\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}=1$$

- Dos vectores $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$ y $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$ son linealmente independientes si se verifica la siguiente condición:

$$\text{rango}\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}=2$$

- Tres vectores $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$, $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$ y $\vec{w}=(w_1,w_2,w_3)$ son linealmente dependientes si se verifica la siguiente condición:

$$\text{rango}\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}=1 \text{ o } 2$$

- Tres vectores $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$, $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$ y $\vec{w}=(w_1,w_2,w_3)$ son linealmente independientes si se verifica la siguiente condición:

$$\text{rango}\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}=3$$

## *Ejercicios:*

**77.** *¿Podemos encontrar cuatro vectores linealmente independientes en* $V^3$ *?*

**78.** *Estudia la dependencia o independencia lineal de los siguientes conjuntos de vectores:*

*a)* $\vec{u}=(1,2,1),\ \vec{v}=(-1,0,3),\ \vec{w}=(1,2,-1)$

*b)* $\vec{a}=(1,2,3),\ \vec{b}=(1,4,11),\ \vec{c}=(1,1,-1),\ \vec{d}=(0,1,4)$

*c)* $\vec{x}=(1,1,0),\ \vec{y}=(1,0,1),\ \vec{z}=(5,2,3)$

***79.*** *Determina el valor de $k$ para que los siguientes conjuntos de vectores sean linealmente dependientes:*

*a)* $\vec{u}=(k,-3,2),\ \vec{v}=(2,3,k),\ \vec{w}=(4,6,-4)$ *b)* $\vec{a}=(3,2,5),\ \vec{b}=(2,4,7),\ \vec{c}=(1,-1,k)$

***80.*** *¿Cuál de los siguientes conjuntos de vectores forman una base?*

*a)* $B_1=\{(1,2,1),\ (1,0,1),\ (2,2,2)\}$ *b)* $B_2=\{(1,1,1),\ (1,0,1),\ (1,1,0),\ (0,0,1)\}$

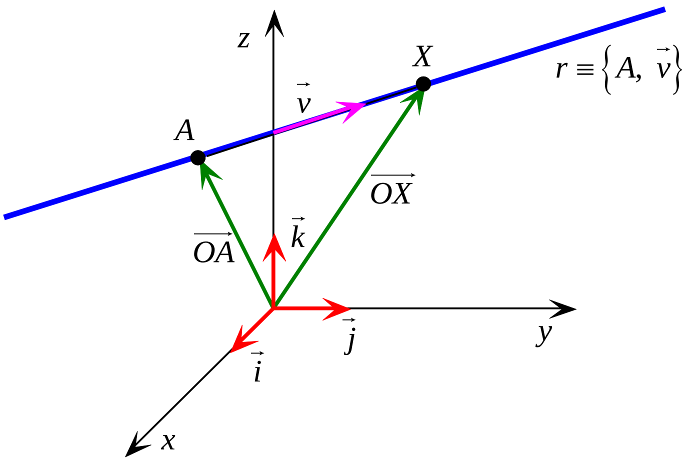
***81.*** *¿Para qué valores de $a$ el conjunto de vectores $S=\{(1,1,1),\ (a,1,1),\ (1,a,0)\}$ es linealmente independiente? ¿Es una base para dichos valores?*

# 2. ECUACIONES DE LA RECTA

## 2.1. Ecuaciones de la recta

**Definición:**

Se llama **determinación lineal de la recta** $r$ al par $(A,\vec{v})$ formado por un punto $A$, llamado punto base, y un vector (libre) no nulo $\vec{v}$ que se denomina vector director o de dirección de la recta.




- Ecuación vectorial de la recta

Sea $r$ la recta determinada por el punto $A$ y el vector $\vec{v}$. Si $X\in r$, se tiene que

$$\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AX}$$

y como $\overrightarrow{AX}=\lambda\vec{v}$ resulta:

$$\boxed{\vec{x}=\vec{a}+\lambda\vec{v} \quad \text{Ecuación vectorial de la recta}}$$

Si $A(a_1,a_2,a_3)$, $X(x,y,z)$ y $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$ se tiene que:

$$(x,y,z)=(a_1,a_2,a_3)+\lambda(v_1,v_2,v_3)$$

Ecuación vectorial de la recta en coordenadas

- Ecuaciones paramétricas de la recta

$$\begin{cases} x=a_1+\lambda v_1 \\ y=a_2+\lambda v_2 \\ z=a_3+\lambda v_3 \end{cases}$$ Ecuaciones paramétricas de la recta

- Ecuación continua de la recta

Eliminando $\lambda$ de las ecuaciones paramétricas resulta:

$$\frac{x-a_1}{v_1}=\frac{y-a_2}{v_2}=\frac{z-a_3}{v_3}$$ Ecuación continua de la recta

En rectas paralelas a los ejes alguno de los denominadores de la ***ecuación continua*** es cero, por lo que dicha ecuación adquiere un ***carácter formal o simbólico***; para obtener en estos casos la ecuación general basta igualar a cero el correspondiente numerador, y obtener la segunda ecuación de la otra igualdad.

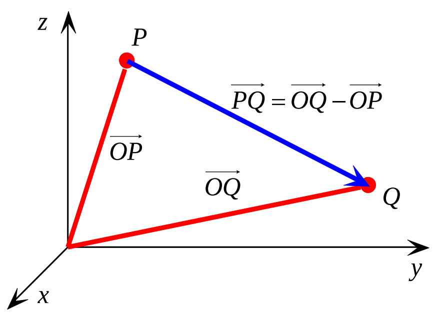
- Ecuación implícita o cartesiana

Desarrollando la ecuación continua se obtiene:

$$r\equiv\begin{cases} Ax+By+Cz+D=0 \\ A'x+B'y+C'z+D'=0 \end{cases}$$ Ecuación implícita

## 2.2. Coordenadas del vector determinado por dos puntos. Vectores paralelos

A la vista del siguiente dibujo




se obtiene la siguiente:

**Caracterización:**

Las coordenadas del vector que une $P(p_1,p_2,p_3)$ y $Q(q_1,q_2,q_3)$ son:

$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=(q_1-p_1,q_2-p_2,q_3-p_3)$$

**Definición / caracterización:**

Los vectores $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$ y $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$ son paralelos, $\vec{u}\parallel\vec{v}$, sii tienen la misma dirección, sii son linealmente dependientes, esto es, $\vec{u}=\lambda\vec{v}$ con $\lambda\in\mathbb{R}$, o equivalentemente, cuando

$$\frac{u_1}{v_1}=\frac{u_2}{v_2}=\frac{u_3}{v_3}$$

## Ejemplos:

**1)** Dadas las ecuaciones implícitas de la recta $s\equiv\begin{cases}x-y-z-1=0\\x+2y+z-1=0\end{cases}$, vamos a obtener las ecuaciones paramétricas y continua:

Como $\begin{cases}x-y-z-1=0\\x+2y+z-1=0\end{cases}$ es un sistema compatible inderminado ($\begin{vmatrix}1&-1\\1&2\end{vmatrix}\neq 0$), llamamos $x=\gamma\in\mathbb{R}$ (podemos elegir cualquier variable) y resolvemos el sistema

$$\begin{cases}\gamma-y-z-1=0\\\gamma+2y+z-1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-y-z=1-\gamma\\2y+z=1-\gamma\end{cases}$$

$$y=2-2\gamma\Rightarrow z=-3+3\gamma$$

Así:

$$s\equiv\begin{cases}x=\gamma\\y=2-2\gamma\\z=-3+3\gamma\end{cases}\Rightarrow s\equiv\frac{x}{1}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+3}{3}$$

de donde podemos obtener un punto y un vector director fácilmente.

**2)** Dada la recta $r\equiv\begin{cases}2x-3y+4z+1=0\\6x+2y+5z-2=0\end{cases}$, vamos a obtener las ecuaciones paramétricas.

Resolvemos el sistema, haciendo $z=\lambda$:

$$r\equiv\begin{cases}2x-3y+4z+1=0\xrightarrow[z=\lambda]{\cdot(-3)}\\6x+2y+5z-2=0\end{cases}\begin{cases}-6x+9y=3+12\lambda\\6x+2y=2-5\lambda\end{cases}$$

$$11y=5+7\lambda\Rightarrow y=\frac{5}{11}+\frac{7}{11}\lambda$$

Como $2x-3y=-1-4\lambda\Rightarrow x=\dfrac{-1-4\lambda+3\left(\frac{5}{11}+\frac{7}{11}\lambda\right)}{2}=\dfrac{2}{11}-\dfrac{23}{22}\lambda$, las ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{cases}x=\dfrac{2}{11}-\dfrac{23}{22}\lambda\\y=\dfrac{5}{11}+\dfrac{7}{11}\lambda\quad\text{con }\lambda\in\mathbb{R}\\z=\lambda\end{cases}$$

**3)** Dada la recta $r \equiv \frac{x+3}{2}\frac{y-4}{-5} = \frac{z+3}{-1}$, vamos a determinar las ecuaciones paramétricas de la misma.

Se tiene que $\lambda = \frac{x+3}{2}$, $\lambda = \frac{y-4}{-5}$ y $\lambda = \frac{z+3}{-1}$. Así:

$$r \equiv \begin{cases} x = -3+2\lambda \\ y = 4-5\lambda \\ z = -3-\lambda \end{cases} \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

## Ejercicios:

**82.** *Expresa, en todas sus formas posibles, la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(1,-2,5)$ y tiene por vector director $\vec{v} = (3,1,-2)$.*

**83.** *Expresa, en todas sus formas posibles, la ecuación de la recta que pasa por los puntos $P(1,-2,5)$ y $Q(-2,1,0)$.*

**84.** *Halla las ecuaciones de la recta $\begin{cases} 2x+y+z=3 \\ x-y-2z=1 \end{cases}$ en forma paramétrica y continua.*

**85.** *Expresa cada una de las siguientes rectas de todas las formas vistas en clase:*

*a)* $\frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-4}{3}$

*b)* $\begin{cases} x-y-3z=1 \\ x-3y+z=5 \end{cases}$

*c)* $\begin{cases} x=2+t \\ y=1-t \\ z=3+2t \end{cases}$

**86.** *Halla la ecuación de la recta que pasa por el origen de coordenadas y es paralela a la recta de ecuación* $\frac{x+1}{-2} = \frac{y}{2} = -z$.

## Ejercicio de selectividad

Junio de 2024, 3a).

### 2.3. Ecuaciones de los ejes de coordenadas

Eje OX:

$OX \equiv \{O(0,0,0), \vec{i} = (1,0,0)\}$

Ecuación vectorial: $(x,y,z) = (0,0,0) + \lambda(1,0,0)$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

Ecuaciones implícitas: $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

Eje *OY*:

$OY \equiv \left\{ O(0,0,0), \vec{j} = (0,1,0) \right\}$

Ecuación vectorial: $(x,y,z) = (0,0,0) + \lambda(0,1,0)$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases}$

Ecuaciones implícitas: $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

Eje *OZ*:

$OZ \equiv \left\{ O(0,0,0), \vec{k} = (0,0,1) \right\}$

Ecuación vectorial: $(x,y,z) = (0,0,0) + \lambda(0,1,0)$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases}$

Ecuaciones implícitas: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

# 3. INCIDENCIA DE PUNTO Y RECTA

## 3.1. Incidencia de punto y recta

**Definición / caracterización:**

Sea $r$ la recta determinada por el punto $A(a_1, a_2, a_3)$ y el vector $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Se tiene:

$$P(p_1, p_2, p_3) \in r \Leftrightarrow \begin{cases} p_1 = a_1 + \lambda v_1 \\ p_2 = a_2 + \lambda v_2 \\ p_3 = a_3 + \lambda v_3 \end{cases} \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} \parallel \vec{v}$$

Esto es, si las coordenadas de $P$ verifican las ecuaciones de la recta $r$.

Si $P(p_1, p_2, p_3) \in r$, eso quiere decir que el sistema $\begin{cases} p_1 = a_1 + \lambda v_1 \\ p_2 = a_2 + \lambda v_2 \\ p_3 = a_3 + \lambda v_3 \end{cases}$ (de incógnita $\lambda$) es compatible.

## Ejercicio:

**87.** *Estudia si los puntos* $P(1,-2,5)$ y $Q(2,2,4)$ *pertenecen a la recta* $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-4}{3}$.

### 3.2. Condición para que tres puntos estén alineados

**Caracterizaciones:**

Los puntos $A(a_1,a_2,a_3)$, $B(b_1,b_2,b_3)$ y $C(c_1,c_2,c_3)$ están alineados si, y solo si,

$$\text{rango}\begin{pmatrix} b_1-a_1 & b_2-a_2 & b_3-a_3 \\ c_1-a_1 & c_2-a_2 & c_3-a_3 \end{pmatrix} < 2$$

o equivalentemente, si los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son linealmente dependientes ($\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{AC}$).

## Ejercicio:

**88.** *¿Los puntos* $A(3,-4,2)$, $B(1,2,3,)$ y $C(-1,4,6)$ *están alineados?*

## Ejercicios de selectividad

Septiembre de 2000, primer bloque, B)    Otra propuesta 1 de 2001, segundo bloque, B, a)

# 4. POSICIONES RELATIVAS DE DOS RECTAS

### 4.1. Posiciones relativas de dos rectas

Sean $\begin{cases} x=a_1+\lambda v_1 \\ y=a_2+\lambda v_2 \\ z=a_3+\lambda v_3 \end{cases}$ y $\begin{cases} x=a'_1+\mu v'_1 \\ y=a'_2+\mu v'_2 \\ z=a'_3+\mu v'_3 \end{cases}$ dos rectas dadas por sus ***ecuaciones paramétricas*** y llamemos $M=\begin{pmatrix} v_1 & v'_1 \\ v_2 & v'_2 \\ v_3 & v'_3 \end{pmatrix}$ y $\overline{M}=\begin{pmatrix} v_1 & v'_1 & a'_1-a_1 \\ v_2 & v'_2 & a'_2-a_2 \\ v_3 & v'_3 & a'_3-a_3 \end{pmatrix}$. Discutiendo el sistema $\begin{cases} a_1+\lambda v_1=a'_1+\mu v'_1 \\ a_2+\lambda v_2=a'_2+\mu v'_2 \\ a_3+\lambda v_3=a'_3+\mu v'_3 \end{cases}$, donde las incógnitas son $(\lambda,\mu)$, se pueden presentar las siguientes posiciones relativas:

* rango $M=2$

- * $r$ y $s$ se cruzan $\Leftrightarrow$ rango$\overline{M}=3$
- * $r$ y $s$ se cortan en un punto $\Leftrightarrow$ rango$\overline{M}=2$

** rango $M=1$

- * $r$ y $s$ paralelas (y distintas) $\Leftrightarrow$ rango$\overline{M}=2$
- * $r$ y $s$ son coincidentes $\Leftrightarrow$ rango$\overline{M}=1$

| rango $M$ | rango$\overline{M}$ | Sistema | Posición relativa |
|---|---|---|---|
| 2 | 3 | Incompatible | Se cruzan |
| 2 | 2 | Compatible determinado | Se cortan en un punto |
| 1 | 2 | Incompatible | Son paralelas |
| 1 | 1 | Compatible indeterminado | Son coincidentes |

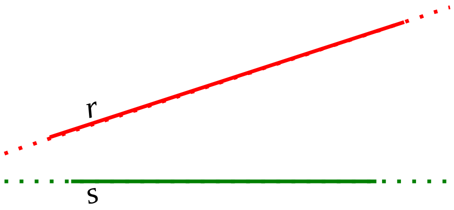
Si las rectas vienen dadas por sus ***ecuaciones implícitas***, entonces:

$$\begin{cases} r \equiv \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \\ s \equiv \begin{cases} A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0 \\ A_4x + B_4y + C_4z + D_4 = 0 \end{cases} \end{cases}$$

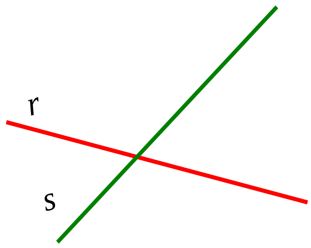
$$M = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 \end{pmatrix} \text{ y } \overline{M} = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{pmatrix}$$

y se pueden presentar las siguientes posiciones relativas:

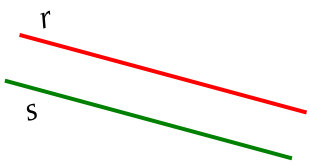
| rango $M$ | rango $\overline{M}$ | Sistema | Posición relativa |
|---|---|---|---|
| 3 | 4 | Incompatible | Se cruzan |
| 3 | 3 | Compatible determinado | Se cortan en un punto |
| 2 | 3 | Incompatible | Paralelas |
| 2 | 2 | Compatible indeterminado | Coincidentes |



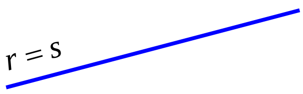

Rectas que se cruzan




Rectas secantes (en un punto)




Rectas paralelas




Rectas coincidentes

Esto, se puede escribir **de otra forma**:

Sean $\vec{u}_r$ y $\vec{u}_s$ los vectores directores de las rectas $r$ y $s$, y $P_r$ y $P_s$ puntos cualesquiera de $r$ y de $s$ respectivamente. Se tiene:

<table>
<tr><th colspan="4">Vectores directores</th></tr>
<tr><td colspan="2">Proporcionales</td><td colspan="2">No proporcionales</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\vec{u}_r \parallel \vec{u}_s$</td><td colspan="2">$\vec{u}_r \nparallel \vec{u}_s$</td></tr>
<tr><td>Coincidentes</td><td>Paralelas</td><td>Secantes</td><td>Se cruzan</td></tr>
<tr><td>$\vec{u}_r \parallel \overrightarrow{P_rP_s}$</td><td>$\vec{u}_r \nparallel \overrightarrow{P_rP_s}$</td><td>$\det\left(\vec{u}_r,\ \vec{u}_s,\ \overrightarrow{P_rP_s}\right) = 0$</td><td>$\det\left(\vec{u}_r,\ \vec{u}_s,\ \overrightarrow{P_rP_s}\right) \neq 0$</td></tr>
</table>

***Ejercicios:***

**89.** *Estudia la posición relativa de las siguientes parejas de rectas:*

*a)* $\begin{cases} r_1 \equiv \begin{cases} x-y+z=0 \\ 2x+y=3 \end{cases} \\ r_2 \equiv \begin{cases} x-2y+z=0 \\ x-2y-z=3 \end{cases} \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} s_1 \equiv \begin{cases} 2x+y=-5 \\ 4x-z=-10 \end{cases} \\ s_2 \equiv \begin{cases} 2y-z=-7 \\ 2x-3y=8 \end{cases} \end{cases}$

**90.** *Estudia la posición relativa de las rectas:*

*a)* $r \equiv \begin{cases} x+z=8 \\ y+z=4 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x+y=0 \\ x-2y+z=5 \end{cases}$.

*b)* $r \equiv (x,y,z)=(1,0,2)+\lambda(-3,1,k)$ y $s \equiv \dfrac{x+1}{3}=-y+1=z$

**91.** *Estudia las posiciones relativas de los pares de rectas que aparecen a continuación. Cuando se corten, calcula el punto en el que lo hacen:*

*a)* $r \equiv \begin{cases} x=1-5\lambda \\ y=2+3\lambda \\ z=-5+\lambda \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=\mu \end{cases}$ *c)* $r \equiv \begin{cases} x=3+2\lambda \\ y=1-\lambda \\ z=5 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x=-1-6\mu \\ y=3+3\mu \\ z=5 \end{cases}$

*b)* $r \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=\lambda \\ z=0 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x=3 \\ y=3 \\ z=\mu \end{cases}$ *d)* $r \equiv \begin{cases} x=3+\lambda \\ y=-2-\lambda \\ z=1 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x=-2\mu \\ y=3+2\mu \\ z=-1 \end{cases}$

## *Ejercicios de selectividad*

Septiembre de 2001, segundo bloque, B)

Otra propuesta 2 de 2001, segundo bloque, B)

Reserva 1 de 2004, tercer bloque, B)

Reserva 2 de 2006, cuarto bloque, A)

Reserva 1 de 2012, propuesta A, 4a)

Septiembre de 2013, propuesta A, 4)

Septiembre de 2016, propuesta A, 4a)

Junio de 2017, propuesta A, 4a)

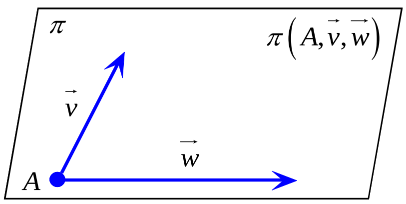
Septiembre de 2020, 7a)

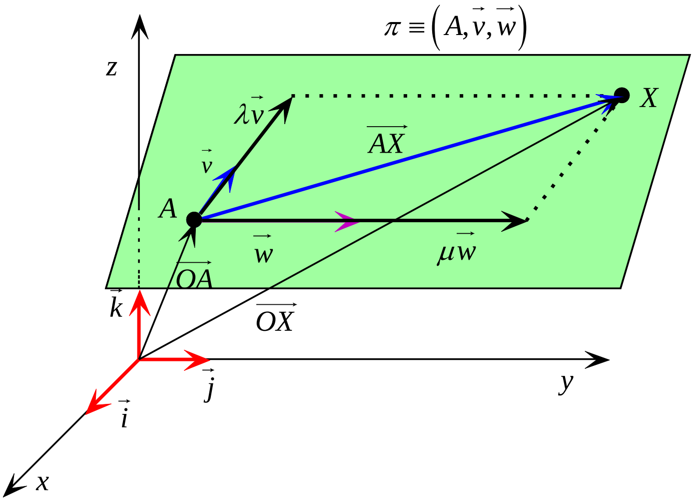
Junio de 2021, 4b)

# 5. ECUACIONES DEL PLANO

**Definición:**

Un plano $\pi$ queda determinado por un punto $A(a_1,a_2,a_3)$ (el vector $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ se llama vector de posición) y dos vectores linealmente independientes (no nulos y no proporcionales) $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$ y $\vec{w}=(w_1,w_2,w_3)$, que denominamos vectores directores. A $\pi \equiv \{A,\vec{v},\vec{w}\}$ se le llama determinación lineal del plano $\pi$.






Para obtener la ecuación vectorial, tenemos en cuenta que $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AX}$ y, como $\overrightarrow{AX} = \lambda\vec{v} + \mu\vec{w}$, resulta que

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + \lambda\vec{v} + \mu\vec{w}$$

que es la ecuación vectorial del plano determinado por el punto $A$ y los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

- Si $X(x, y, z) \in \pi$ se tiene:

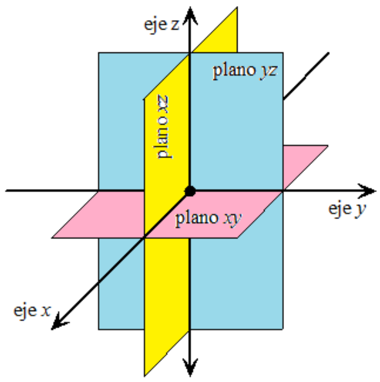
$$\boxed{\vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{v} + \mu\vec{w} \quad \text{Ecuación vectorial del plano}}$$

donde $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$$\boxed{\begin{array}{c}(x, y, z) = (a_1, a_2, a_3) + \lambda(v_1, v_2, v_3) + \mu(w_1, w_2, w_3) \\ \text{Ecuación vectorial del plano en coordenadas}\end{array}}$$

- Efectuando las operaciones obtenemos:

$$\boxed{\begin{cases} x = a_1 + \lambda v_1 + \mu w_1 \\ y = a_2 + \lambda v_2 + \mu w_2 \\ z = a_3 + \lambda v_3 + \mu w_3 \end{cases} \quad \text{Ecuaciones paramétricas del plano}}$$




## ***Ejercicios:***

**92.** *Expresa las ecuaciones del plano determinado por el punto* $P(1,2,3)$ *y los vectores* $\vec{u} = (1,1,0)$ y $\vec{v} = (1,0,1)$.

**93.** *Halla las ecuaciones del plano que contiene a los puntos* $A(3,2,-1)$, $B(0,2,-5)$ *y* y $C(-2,4,-1)$.

**94.** *Determinar las ecuaciones paramétricas del plano determinado por el punto* $P$ *y los vectores directores* $\vec{u}$ y $\vec{v}$ *en cada uno de los siguientes casos:*

*a)* $P(-2,3,1)$, $\vec{u}=(2,-3,0)$, $\vec{v}=(1,0,1)$

*b)* $P(0,1,1)$, $\vec{u}=(2,0,0)$, $\vec{v}=(0,-1,0)$

# 6. INCIDENCIA DE PUNTO Y PLANO

## 6.1. Incidencia de punto y plano

**Definición / caracterización:**

El punto $P(p_1,p_2,p_3)$ pertenece al plano $\pi$ (es un punto de dicho plano), cuando se cumple la siguiente condición:

$$P(p_1,p_2,p_3)\in\pi \Leftrightarrow \det\begin{pmatrix} p_1-a_1 & v_1 & w_1 \\ p_2-a_2 & v_2 & w_2 \\ p_3-a_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix}=0$$

es decir, si los vectores $\overrightarrow{AP}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente dependientes.

## 6.2. ¿Cuándo 4 puntos son coplanarios?

**Caracterizaciones:**

Los puntos $A(a_1,a_2,a_3)$, $B(b_1,b_2,b_3)$, $C(c_1,c_2,c_3)$ y $D(d_1,d_2,d_3)$ son coplanarios[4] si, y solo si, los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$ son linealmente dependientes si, y solo si, $\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)=0$

***Ejercicios:***

**95.** *Calcula el valor de* $a$ *para que los cuatro puntos estén en el mismo plano:* $(a,0,1)$, $(0,1,2)$, $(1,2,3)$, $(7,2,1)$. *Calcula la ecuación del plano.*

# 7. ECUACIÓN GENERAL, CARTESIANA O IMPLÍCITA DEL PLANO

## 7.1. Ecuación general del plano

Sea $\pi$ el plano determinado por el punto $A(a_1,a_2,a_3)$ y los vectores directores $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$ y $\vec{w}=(w_1,w_2,w_3)$. Sabemos que

$$(x,y,z)=(a_1,a_2,a_3)+\lambda(v_1,v_2,v_3)+\mu(w_1,w_2,w_3)$$

es la ecuación vectorial de $\pi$, y que los vectores

[4] Están en el mismo plano.

$$\left(x-a_1, y-a_2, z-a_3\right),\ \left(v_1, v_2, v_3\right) \text{ y } \left(w_1, w_2, w_3\right)$$

son linealmente dependientes, luego

$$\text{rango}\begin{pmatrix} x-a_1 & v_1 & w_1 \\ y-a_2 & v_2 & w_2 \\ z-a_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix} = 2$$

(no puede ser 1, ya que $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linelamente independientes), lo que equivale a que

$$\boxed{\det\begin{pmatrix} x-a_1 & v_1 & w_1 \\ y-a_2 & v_2 & w_2 \\ z-a_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix} = 0}$$

Desarrollamos el determinante:

$$\begin{vmatrix} x-a_1 & v_1 & w_1 \\ y-a_2 & v_2 & w_2 \\ z-a_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & v_1 & w_1 \\ y & v_2 & w_2 \\ z & v_3 & w_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & v_1 & w_1 \\ a_2 & v_2 & w_2 \\ a_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} =$$

$$= x\begin{vmatrix} v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} + y\begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & v_1 & w_1 \\ a_2 & v_2 & w_2 \\ a_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = 0$$

Que se puede escribir en el forma:

$$\boxed{Ax + By + Cz + D = 0}$$

con $A = \begin{vmatrix} v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix}$, $B = \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix}$, $C = \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix}$ y $D = -\begin{vmatrix} a_1 & v_1 & w_1 \\ a_2 & v_2 & w_2 \\ a_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}$. Dicha ecuación recibe el nombre de <u>*ecuación general, cartesiana o implícita del plano*</u> $\pi$.

En general, si a la ecuación implícita de un plano le falta una de sus variables, es porque es paralelo al eje correspondiente a dicha variable. Así:

- Si $A = 0$, el plano que se obtiene es paralelo al eje $x$.
- Si $B = 0$, el plano que se obtiene es paralelo al eje $y$.
- Si $C = 0$, el plano que se obtiene es paralelo al eje $z$.

## <u>*Ejercicios:*</u>

**96.** *Halla la ecuación general del plano que contiene a los puntos* $P(1,2,-1)$, $Q(3,0,2)$, *y tiene como vector director* $\vec{u} = (1,1,-1)$.

**97.** *Halla la ecuación general del plano determinado por el punto* $P(1,2,3)$ *y los vectores directores* $\vec{a} = (1-2,-1)$ y $\vec{b} = (2,-1,3)$.

## <u>*Ejemplo:*</u>

Dado la ecuación general del plano $\pi \equiv 3x + 2y + z - 4 = 0$, vamos a determinar las ecuaciones paramétricas.

Como el rango de la matriz de coeficientes y de la matriz ampliada es 1, tenemos dos parámetros. Llamamos $y=\lambda\in\mathbb{R}$ y $z=\mu\in\mathbb{R}$. Entonces, $x=\frac{4-2\lambda-\mu}{3}=\frac{4}{3}-\frac{2}{3}\lambda-\frac{1}{3}\mu$. Así:

$$\pi\equiv\begin{cases}x=\frac{4}{3}-\frac{2}{3}\lambda-\frac{1}{3}\mu\\ y=\lambda\\ z=\mu\end{cases}$$

Lo comprobamos: $\pi\equiv\det\begin{pmatrix}x-\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\\ y & 1 & 0\\ z & 0 & 1\end{pmatrix}=0\Rightarrow x+\frac{2}{3}y+\frac{1}{3}z-\frac{4}{3}=0\Rightarrow\pi\equiv 3x+2y+z-4=0$

## ***Ejercicios de Selectividad***

Junio de 2015, propuesta B, 4)

Junio de 2017, propuesta A, 4b)

Septiembre de 2020, 7b)

### 7.2. Ecuaciones de los planos coordenados

Plano *XY*:

$XY\equiv\left\{O(0,0,0),\vec{i}=(1,0,0),\vec{j}=(0,1,0)\right\}$

Ecuación vectorial: $(x,y,z)=(0,0,0)+\lambda(1,0,0)+\mu(0,1,0)$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases}x=\lambda\\ y=\mu\\ z=0\end{cases}$

Ecuación implícita: $z=0$

Plano *YZ*:

$YZ\equiv\left\{O(0,0,0),\vec{j}=(0,1,0),\vec{k}=(0,0,1)\right\}$

Ecuación vectorial: $(x,y,z)=(0,0,0)+\lambda(0,1,0)+\mu(0,0,1)$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases}x=0\\ y=\lambda\\ z=\mu\end{cases}$

Ecuación implícita: $x=0$

Plano *XZ*:

$XZ\equiv\left\{O(0,0,0),\vec{i}=(1,0,0),\vec{j}=(0,1,0)\right\}$

Ecuación vectorial: $(x,y,z)=(0,0,0)+\lambda(1,0,0)+\mu(0,0,1)$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = \mu \end{cases}$

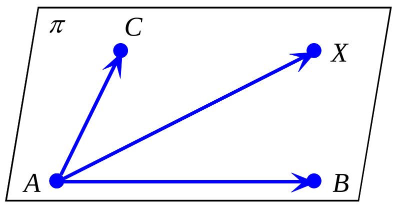
Ecuación implícita: $y = 0$

# 8. ECUACIÓN DEL PLANO QUE PASA POR TRES PUNTOS

Sabemos que tres puntos distintos y no alineados determinan un plano que pasa por ellos.

El plano $\pi$ que pasa por tres puntos distintos y no alineados $A, B$ y $C$ tiene la siguiente determinación lineal $\pi \equiv \left\{A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right\}$ y, por tanto, si $X \in \pi$ es un punto genérico, la ecuación de dicho plano es:

$$\pi \equiv \det\left(\overrightarrow{AX}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = 0$$




***Ejercicio de Selectividad***

Septiembre de 2013, propuesta B, 4, b)

# 9. ECUACIÓN CANÓNICA DEL PLANO

Sea $\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$ un plano con $D \neq 0$. Entonces, $\pi$ corta a los tres ejes de coordenadas.. Sean $A(a,0,0)$, $B(0,b,0)$ y $C(0,0,c)$ dichos puntos de corte. En la ecuación general dividimos por $-D$:

$$\frac{A}{-D}x + \frac{B}{-D}y + \frac{C}{-D}z - 1 = 0$$

y sustituimos $A, B$ y $C$ en dicha ecuación:

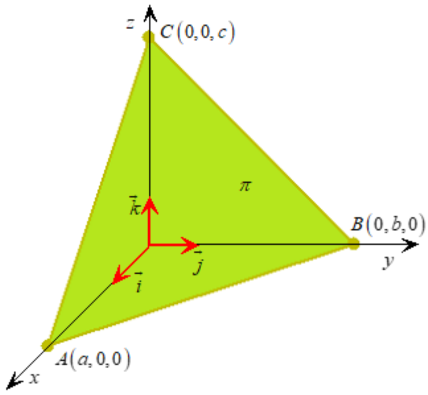
$$\begin{cases} \frac{A}{-D}a + \frac{B}{-D}0 + \frac{C}{-D}0 - 1 = 0 \Rightarrow \frac{A}{-D} = \frac{1}{a} \\ \frac{A}{-D}0 + \frac{B}{-D}b + \frac{C}{-D}0 - 1 = 0 \Rightarrow \frac{B}{-D} = \frac{1}{b} \\ \frac{A}{-D}0 + \frac{B}{-D}0 + \frac{C}{-D}c - 1 = 0 \Rightarrow \frac{C}{-D} = \frac{1}{c} \end{cases}$$

Y, como consecuencia, la ecuación del plano se puede escribir en la forma

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 = 0 \quad \text{Ecuación canónica o segmentaria del plano } \pi}$$

donde $a$, $b$ y $c$ son los puntos en los que el plano corta a los ejes $x$, $y$, $z$ respectivamente.

Dicha ecuación también se puede obtener aplicando el apartado anterior con $A(a,0,0)$, $B(0,b,0)$ y $C(0,0,c)$.




# 10. POSICIONES RELATIVAS DE DOS PLANOS

Sean $\pi \equiv Ax+By+Cz+D=0,\ \pi' \equiv A'x+B'y+C'z+D'=0$ dos planos y llamemos

$$M=\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix} \text{ y } \overline{M}=\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \end{pmatrix}.$$

***En función del rango***, se tienen las siguientes posiciones relativas:

* $\text{rango}M=2=\text{rango}\overline{M} \Leftrightarrow \pi$ y $\pi'$ se cortan en una recta
* $\text{rango}M=1$ y $\text{rango}\overline{M}=2 \Leftrightarrow \pi$ y $\pi'$ son paralelos
* $\text{rango}M=1=\text{rango}\overline{M} \Leftrightarrow \pi$ y $\pi'$ son coincidentes

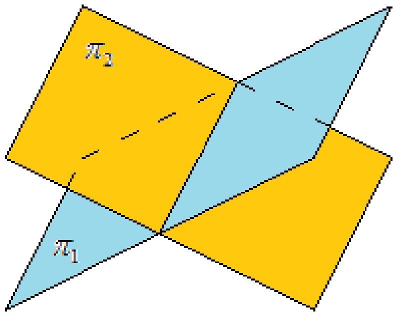
| rango $M$ | rango $\overline{M}$ | Sistema | Posición relativa |
|---|---|---|---|
| 2 | 2 | Compatible indeterminado | Se cortan en una recta |
| 1 | 2 | Incompatible | Son paralelos |
| 1 | 1 | Compatible indeterminado | Son coincidentes |

También podemos estudiar dicha posición relativa ***utilizando la proporcionalidad de los coeficientes***:

- $\text{rango}M=\text{rango}\overline{M}=2 \Leftrightarrow \frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$ o $\frac{A}{A'} \neq \frac{C}{C'}$ o $\frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'} \Rightarrow \pi$ y $\pi'$ se cortan en una recta
- $\text{rango}M=1 \neq 2=\text{rango}\overline{M} \Leftrightarrow \frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'} \neq \frac{D}{D'} \Rightarrow \pi$ y $\pi'$ son paralelos
- $\text{rango}M=1=\text{rango}\overline{M} \Leftrightarrow \frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}=\frac{D}{D'} \Rightarrow \pi$ y $\pi'$ son coincidentes

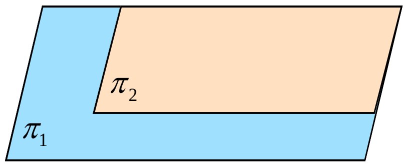
| Proporcionalidad de los coeficientes | Posición relativa |
|---|---|
| $\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$ o $\frac{A}{A'} \neq \frac{C}{C'}$ o $\frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$ | Se cortan en una recta |

| | |
|---|---|
| $\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}\neq\frac{D}{D'}$ | Son paralelos |
| $\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}=\frac{D}{D'}$ | Son coincidentes |




Planos secantes
(en una recta)


Planos paralelos




Planos coincidentes

***<u>Ejercicios:</u>***

**98.** *Estudia la posición relativa de las siguientes parejas de planos:*

*a)* $\begin{cases}\pi_1\equiv x-2y+z=0\\ \pi_2\equiv 3x-6y+3z=3\end{cases}$  *b)* $\begin{cases}\pi_1\equiv x-2y+z=0\\ \pi_2\equiv x-2y-z=3\end{cases}$

**99.** *Estudia la posición relativa de* $\pi_1\equiv mx+2y-3z-1=0$ y $\pi_2\equiv 2x-4y+6z+5=0$ *en funcion del parámetro m.*

***<u>Ejercicios de selectividad</u>***

Reserva 1 de 2006, cuarto bloque, A), b)

Junio de 2007, cuarto bloque, B, a)

Junio de 2009, cuarto bloque, B, a)

Junio de 2009, cuarto bloque, A, a)

Reserva 1 de 2013, propuesta A, 4a y b)

# 11. POSICIONES RELATIVAS DE UNA RECTA Y UN PLANO

**1ª forma:** ***dado un punto y un vector director de la recta y la ecuación implícita del plano***

Sea $r\equiv\begin{cases}x=a_1+\lambda v_1\\ y=a_2+\lambda v_2\\ z=a_3+\lambda v_3\end{cases}$ una recta y $\pi\equiv Ax+By+Cz+D=0$ un plano. Sustituyendo $x$, $y$ y $z$ (de la recta en la ecuación del plano) se obtiene la siguiente ecuación:

$$A(a_1+\lambda v_1)+B(a_2+\lambda v_2)+C(a_3+\lambda v_3)+D=0\Leftrightarrow Aa_1+Ba_2+Ca_3+(Av_1+Bv_2+Cv_3)\lambda=0$$

y al discutirla (en función de $\lambda$, que es la incógnita), obtenemos las siguientes posiciones relativas:

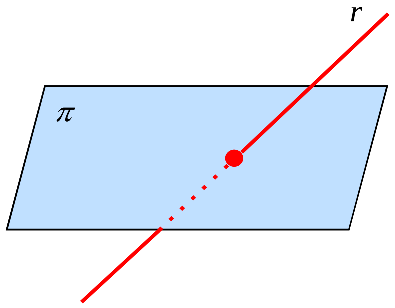
- $Av_1+Bv_2+Cv_3\neq 0$
  ***La recta y el plano se cortan en un punto***, ya que la ecuación tiene una única solución.

- $Av_1 + Bv_2 + Cv_3 = 0$

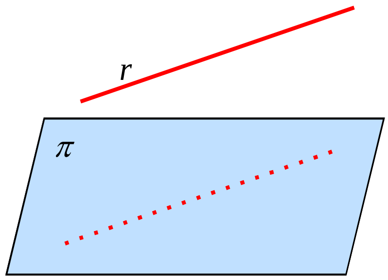
  Se pueden presentar los siguientes dos casos:

  $Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 + D \neq 0 \Rightarrow r$ y $\pi$ ***paralelos***, ya que la ecuación no tiene solución.

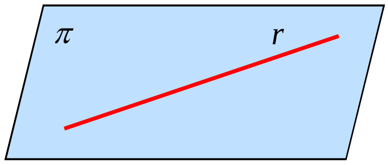
  $Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 + D = 0 \Rightarrow r$ ***contenida*** en $\pi$, ya que cualquier valor de $\lambda$ es solución de la ecuación.



Recta y plano, secantes
(en un punto)



Recta paralela al plano



Recta contenida en el plano

**2ª forma:** ***discutiendo el correspondiente sistema de ecuaciones lineales***

Si la recta viene dada como intersección de dos planos y el plano a través de su ecuación implícita:

$$\begin{cases} r \equiv \begin{cases} A'x + B'y + C'z + D' = 0 \\ A''x + B''y + C''z + D'' = 0 \end{cases} \\ \pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0 \end{cases}$$

consideramos

$$M = \begin{pmatrix} A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \\ A & B & C \end{pmatrix} \text{ y } \overline{M} = \begin{pmatrix} A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \\ A & B & C & D \end{pmatrix}$$

y se pueden presentar las siguientes posiciones relativas:

| rango $M$ | $rango\overline{M}$ | Sistema | Posición relativa |
|---|---|---|---|
| 3 | 3 | Compatible determinado | Se cortan en un punto |
| 2 | 3 | Incompatible | Son paralelos |
| 2 | 2 | Compatible indeterminado | Recta contenida en el plano |

## ***Ejercicio:***

***100.*** *Estudia la posición relativa de la recta y el plano en cada caso:*

*a)* $\begin{cases} r \equiv \dfrac{x-1}{5} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z}{0} \\ \pi \equiv 5x - 7y = -3 \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} r \equiv \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z}{1} \\ \pi \equiv x + y - 3z = 1 \end{cases}$

## ***Ejercicios de selectividad***

Reserva 2 de 2010, propuesta A, 4)

Septiembre de 2010, propuesta B, 4)

Septiembre de 2015, propuesta B, 4b)

Julio de 2019, propuesta A, 4a)

Julio de 2020, 7a)

Junio de 2023, 8b)

# 12. POSICIONES RELATIVAS DE TRES PLANOS

Sean $\begin{cases} \pi \equiv Ax+By+Cz+D=0 \\ \pi \equiv A'x+B'y+C'z+D'=0 \\ \pi \equiv A''x+B''y+C''z+D''=0 \end{cases}$ tres planos y consideremos

$$M=\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{pmatrix} \text{ y } \overline{M}=\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \end{pmatrix}.$$

Se tienen las siguientes **posiciones relativas**:

- $\text{rango}M=3$. En este caso *los tres planos se cortan en un único punto*, ya que el sistema es compatible determinado.

- $\text{rango}M=2$ y $\text{rango}\overline{M}=3$. En este caso el sistema es incompatible, esto es, no hay ningún punto en común a los tres planos. Se pueden presentar los siguientes casos:
  - Las matrices de orden $2\times 3$ que pueden formarse con las filas de $M$, tienen rango 2; entonces *los planos se cortan dos a dos según tres rectas*.
  - Una de las matrices citadas tiene rango 1 y las otras, rango 2. En este caso *dos planos son paralelos y el tercero los corta según dos rectas paralelas*.

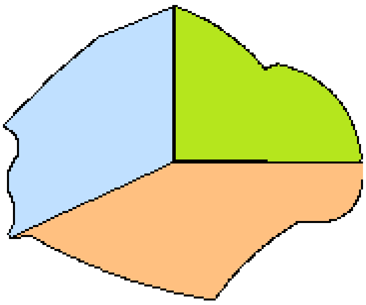
- $\text{rango}M=2$ y $\text{rango}\overline{M}=2$. En este caso el sistema es compatible indeterminado, y se pueden dar los siguientes dos casos:
  - Las matrices de orden $2\times 4$ que pueden formarse con las filas de $\overline{M}$ tienen rango 2. *Los tres planos son distintos y se cortan en una recta*.
  - Una de esas matrices tiene rango 1. Entonces, *dos planos coinciden y el tercero los corta según una recta*.

- $\text{rango}M=1$ y $\text{rango}\overline{M}=2$. En este caso el sistema es incompatible, y se pueden presentar los siguientes dos casos:
  - Si las matrices de orden $2\times 4$ que pueden formarse con las filas de $\overline{M}$ son de rango 2, entonces *los tres planos son paralelos*.
  - Si una de esas matrices tiene rango 1, entonces *dos planos coinciden y el otro es paralelo*.

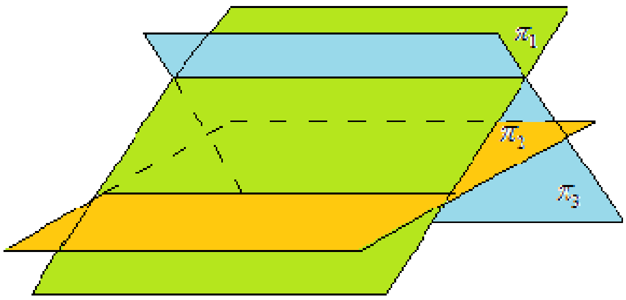
- $\text{rango}M=1$ y $\text{rango}\overline{M}=1 \Rightarrow$ *los planos coinciden*, ya que el sistema es compatible indeterminado con variables libres.

| $\text{rg}(M)$ | $\text{rg}(\overline{M})$ | Sistema | Rango de las submatrices de $M$ de orden $2\times 3$ | Rango de las submatrices de $\overline{M}$ de orden $2\times 4$ | Posición relativa |
|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 3 | C.D. | --- | --- | Secantes en un punto |

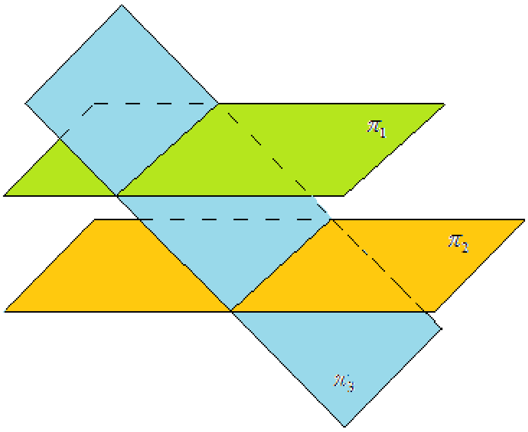
| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 3 | I. | 2 (todas) | --- | Se cortan dos a dos según tres rectas |
| 2 | 3 | I. | 1 (una) | --- | Dos planos paralelos y el tercero los corta según dos rectas paralelas |
| 2 | 2 | C.I | --- | 2 (todas) | Distintos y se cortan en una recta |
| 2 | 2 | C.I. | --- | 1 (una) | Dos planos coinciden y el tercero los corta según una recta |
| 1 | 2 | I. | --- | 2 (todas) | Paralelos |
| 1 | 2 | I. | --- | 1 (una) | Dos planos coinciden y el otro es paralelo |
| 1 | 1 | I. | --- | --- | Coincidentes |



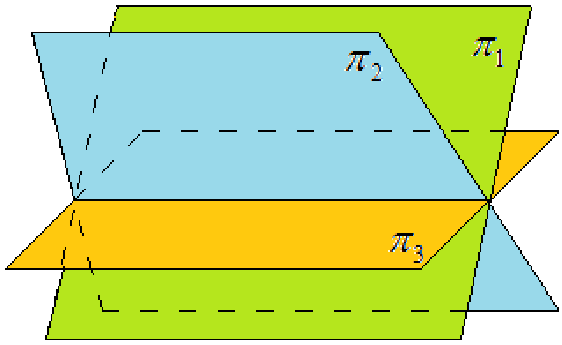
Tres planos secantes en un punto



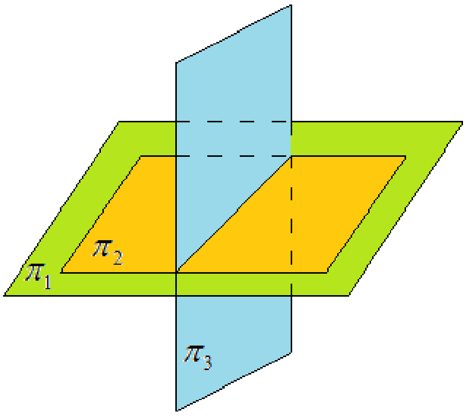

Tres planos secantes dos a dos según 3 rectas



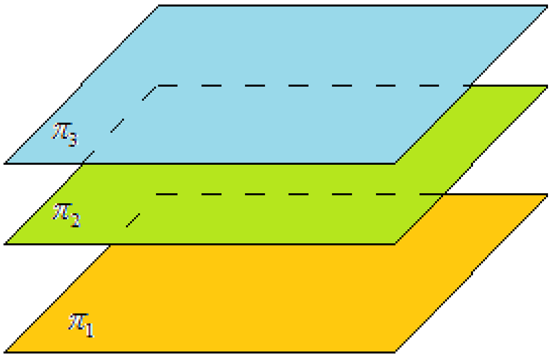

Dos planos paralelos y el tercero los corta según dos rectas



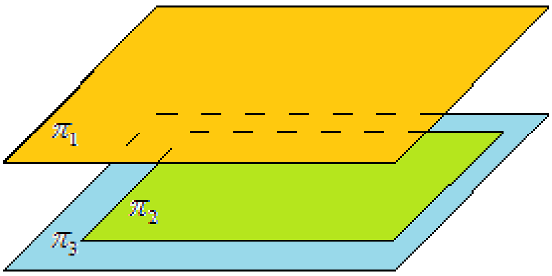

Tres planos distintos, secantes en una recta



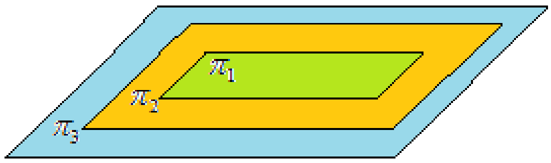

Dos planos coincidentes y el tercero los corta según una recta




Los tres planos son paralelos




Dos planos coinciden y el otro es paralelo




Los tres planos son coincidentes

## ***Ejercicios***

**101.** *Determina la posición relativa de los planos:*

$$\begin{cases} \pi_1 \equiv 2x+3y+z=1 \\ \pi_2 \equiv x-y+z=-2 \\ \pi_3 \equiv 2x-2y+2z=-3 \end{cases}$$

**102.** *Estudia para los diferentes valores de $m$ la posición relativa de los planos:*

$$a)\ \begin{cases} \pi_1 \equiv mx+y+z=1 \\ \pi_2 \equiv x+my+z=1 \\ \pi_3 \equiv x+y+mz=1 \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} \pi_1 \equiv mx-y-z=-m \\ \pi_2 \equiv x-my+mz=m \\ \pi_3 \equiv x+y+z=-1 \end{cases}$$

**103.** *Estudia la posición relativa de los siguientes planos:*

$$a)\ \begin{cases} x+2y-z-3=0 \\ 3y+2z-1=0 \\ x+y+z-2=0 \end{cases} \qquad c)\ \begin{cases} x-y+z-1=0 \\ 3x+y-2z=0 \\ 2x+2y-3z+4=0 \end{cases}$$

$$b)\ \begin{cases} 2x-y+z-3=0 \\ x-y+z-2=0 \\ 3x-y+z-4=0 \end{cases}$$

## ***Problemas afines:***

***104.*** *Halla la ecuación de la recta paralela a* $r\equiv\begin{cases}x+2z=5\\y+3z=5\end{cases}$ *que pase por el punto de intersección de la recta* $s\equiv\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z+2}{3}$ *con el plano* $\pi\equiv x-y+z=7$.

***105.*** *Halla la ecuación implícita del plano que pasa por el punto* $P(1,1,1)$ *y es paralelo al plano*

$$\begin{cases}x=1+2\lambda-3\mu\\y=3+2\mu\\z=-1-\mu\end{cases}.$$

***106.*** *Dados los puntos* $(1,1,1)$, $(2,3,4)$ y $(-5,0,-2)$, *comprueba si están alineados. En caso afirmativo, halla las ecuaciones paramétricas y continua de la recta que definen y en caso negativo, la ecuación del plano correspondiente.*

***107.*** *Dadas las rectas*

$$r\equiv\frac{x}{3}=\frac{y-1}{0}=\frac{z}{1}\quad y\quad s\equiv(x,y,z)=(2,1,1)+t(3,-1,3)$$

*encontrar el plano que pasa por* $r$ *y es paralelo a* $s$ *y el que pasa por* $s$ *y es paralelo a* $r$.

***108.*** *Determina la ecuación del plano que contiene a la recta* $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z-4}{3}$ *y es paralelo a la recta* $\begin{cases}x=1+3t\\y=1+2t\\z=t\end{cases}$.

***109.*** *Consideramos las rectas de ecuaciones*

$$r\equiv\begin{cases}x+y-z+3=0\\-2x+z-1=0\end{cases}\quad \text{y}\quad s\equiv x+1=\frac{y-3}{n}=\frac{z}{2}$$

a) *Halla* $n$ *para que* $r$ y $s$ *sean paralelas.*
b) *Para el valor de* $n$ *obtenido en el apartado anterior, determina la ecuación del plano que contiene a ambas rectas.*

***110.*** *Dadas las rectas* $r\equiv\begin{cases}x=3+\lambda\\y=-1+2\lambda\\z=2+\lambda\end{cases}$ y $s\equiv\begin{cases}4x+5y+7=0\\3y-4z+7-m=0\end{cases}$:

a) *Calcula el valor de* $m$, *para que las dos estén en un mismo plano.*
b) *Halla la ecuación de dicho plano.*

***111.*** *Consideramos la recta* $r$, *el plano* $\pi$ *y el punto* $P$, *siendo:*

$$r\equiv\frac{x-1}{2}=\frac{y+8}{3}=\frac{z-2}{5};\qquad \pi\equiv 2x-y+3z=1;\qquad P(1,0,4)$$

a) *Obtener una recta* $s$ *paralela a* $r$ *que pase por el punto* $P$.

*b) Calcular el punto de intersección de* $r$ y $\pi$ .

## Ejercicios de selectividad

Reserva 2 de 2011, propuesta A, 4a)

Septiembre de 2014, propuesta B, 4a)

Junio de 2016, propuesta B, 4a)

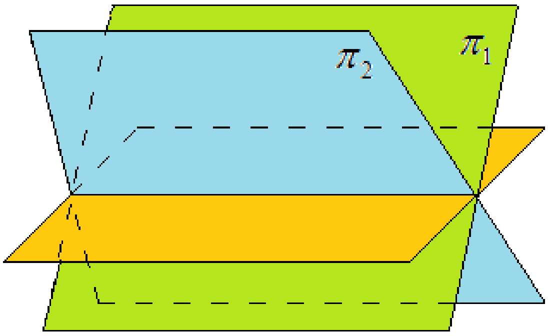
Julio de 2024, 5b)

# 13. HAZ DE PLANOS

### 13.1. Haz de planos de arista una recta: haz de planos secantes

Sean $\pi$ y $\pi'$ dos planos que se cortan en una recta $r$. El conjunto de todos los planos que pasan por la recta $r$ se denomina haz de planos de arista $r$ y tiene por ecuación:

$$\lambda(Ax+By+Cz+D)+\mu(A'x+B'y+C'z+D')=0$$




## Ejemplo:

Dada la recta $r\equiv\begin{cases}x-4y+9=0\\3y-z-9=0\end{cases}$ , ¿para cualquier valor de $\lambda$, el plano

$$\pi\equiv x-4y+9+\lambda(3y-z-9)=0$$

contiene a $r$ ?

Sí, ya que $x-4y+9+\lambda(3y-z-9)=0$ representa la ecuación de los infinitos planos que se cortan en la recta $r$ .

## Ejemplo:

Determina la ecuación del plano que pasa por el origen de coordenadas y contiene a la recta determinada por los planos:

$$r\equiv\begin{cases}\pi\equiv x+y+z-1=0\\\pi'\equiv x-y-2=0\end{cases}$$

Sabemos que el haz de planos de arista $r$ tiene por ecuación:

$$\lambda(x+y+z-1)+\mu(x-y-2)=0$$

Como además el plano pasa por el origen de coordenadas, se tiene que:

$$\lambda(0+0+0-1)+\mu(0-0-2)=0\Rightarrow-\lambda-2\mu=0\Rightarrow\lambda=-2\mu$$

y por tanto:

$$-2\mu(x+y+z-1)+\mu(x-y-2)=0\Rightarrow-2\mu x-2\mu y-2\mu z+2\mu+\mu x-\mu y-2\mu=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow-\mu x-3\mu y-2\mu z=0\Rightarrow-\mu(x+3y+2z)=0$$

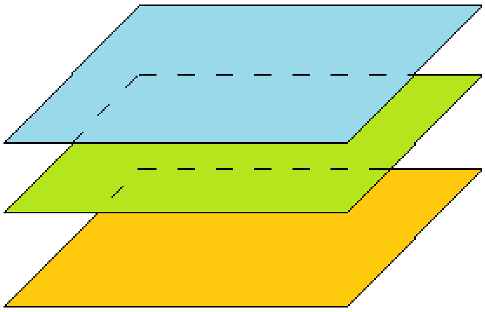
Es decir, el plano que nos piden es: $\pi'' \equiv x+3y+2z=0$.

### 13.2. Haz de planos paralelos

Si en la ecuación del plano $\pi \equiv Ax+By+Cz+D=0$ sustituimos los coeficientes $A, B$ y $C$ por las coordenadas de un vector $\vec{n}$ normal al plano, se obtiene la expresión de todos los planos que son paralelos y que tienen vector normal $\vec{n}$:

$$\left.\begin{array}{l}\pi \equiv Ax+By+Cz+D=0\\ \vec{n}=(A_n,B_n,C_n)\end{array}\right\} \Rightarrow A_nx+B_ny+C_nz+D=0$$

Dicho conjunto de planos, se llama haz de planos paralelos normales a $\vec{n}$.



## *Ejemplo:*

El haz de planos paralelos normales a $\vec{n}=(3,2,-1)$ tiene por ecuación:

$$3x+2y-z+D=0$$

Dando valores a $D\in\mathbb{R}$ se obtienen los planos del haz.

## *Ejemplos:*

(1) Vamos a determinar un plano $\pi'$ que pase por $P(3,2,-1)$ y sea paralelo al plano $\pi \equiv 3x-y+2z+1=0$.

Como el vector normal a $\pi$ es $\vec{n}=(3,-1,2)$, la ecuación del haz de planos paralelos normales a $\vec{n}$ es:

$$3x-y+2z+D=0$$

Sustituyendo las coordenadas de $P$ en $\pi$ obtenemos:

$$3\cdot 3-2+2\cdot(-1)+D=0 \Rightarrow D=-5$$

y, por tanto, la ecuación del plano pedido es: $3x-y+2z-5=0$.

(2) Hallar la ecuación del plano que pasa por $P(2,1,-1)$ y es paralelo al plano

$$\pi \equiv 2x-5y+2z-2=0$$

Para ello, sustituimos las coordenadas de $P$ en la ecuación del haz de planos paralelos a $\pi$:

$$H_\pi \equiv 2x-5y+2z+D=0$$

$$2\cdot 2-5\cdot 1+2\cdot(-1)+D=0 \Rightarrow D=5$$

Por tanto, el plano pedido es $\pi' \equiv 2x-5y+2z+5=0$.

(3) Hallar el haz de planos secantes y el haz de planos perpendiculares a la recta

$$r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{-1}$$

En primer lugar, pasamos de la ecuación continua a las ecuación implícita:

$$r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{-1} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+1}{-1} \Rightarrow -x+1 = y+1 \\ \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z}{-1} \Rightarrow y+1 = z \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x+y=0 \\ y-z+1=0 \end{cases}$$

Así, el haz de planos secantes a $r$ es:

$$(x+y)+\alpha(y-z+1)=0$$

y el haz de planos perpendiculares es:

$$x-y-z+D=0$$

(ya que su vector normal es el vector director de la recta)

(4) Calcula la ecuación de la recta cuyo haz de planos perpendiculares es $x-y+z+D=0$, sabiendo que pasa por el punto $P(1,2,3)$. ¿Cuál es su haz de planos secantes?

El vector director de la recta coincide con el vector normal del hza de plano, luego tenemos que determinar la ecuación de la recta que pasa por $P(1,2,3)$ con vector director $\overrightarrow{u_r} = (1,-1,1)$:

$$r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{1}$$

Por otra parte, el haz de planos secantes se obtiene a partir de la ecuación implícita de la recta:

$$r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+3}{1} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{-1} \\ \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z-3}{1} \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x+y-3=0 \\ y+z+1=0 \end{cases}$$

$$Haz \equiv (x+y-3)+\alpha(y+z+1)=0$$

***Ejercicio de selectividad***

Reserva 1 de 2005, Cuarto Bloque, A).

# 14. RADIACIÓN DE PLANOS

Supongamos que los planos $\pi$, $\pi'$ y $\pi''$ tienen en común un único punto $P$. Entonces, el conjunto de todos los planos que pasan por $P$, recibe el nombre de radiación de planos de vértice $P$, y tiene por ecuación:

$$\lambda(Ax+By+Cz+D)+\mu(A'x+B'y+C'z+D')+\delta(A''x+B''y+C''z+D'')=0$$

***Ejercicios de selectividad de repaso***

Septiembre de 2000, cuarto bloque, B)

Septiembre de 2005, Cuarto Bloque, A)

Septiembre de 2006, Cuarto Bloque, A)

Junio de 2007, Cuarto Bloque, A)

Reserva 1 de 2007, Cuarto Bloque, B, a)

Reserva 2 de 2008, Cuarto Bloque, A)

Reserva 2 de 2009, Cuarto Bloque, A)

Junio de 2019, propuesta B, 4b)

Julio de 2024, 7b)

Septiembre de 2008, Cuarto Bloque, A)

Septiembre de 2009, Cuarto Bloque, B)

Septiembre de 2017, propuesta A, 4b)

Junio de 2022, 4a) y b)

# Unidad 5:
# ESPACIO AFÍN EUCLÍDEO

*«El que desdeña la geometría de Euclides es como el hombre que, al regresar a su casa de tierras extrañas, menosprecia su casa»*
H. G. Forder

## 1. PRODUCTO ESCALAR

### PRODUCTO ESCALAR EN $V^3$

**Definición:**

Se define el *producto escalar* de dos vectores por:

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\ |\vec{b}|\ \cos\measuredangle\left(\vec{a},\vec{b}\right)}\quad \forall\vec{a},\vec{b}\in V^3$$

donde $\measuredangle\left(\vec{a},\vec{b}\right)$ es el ángulo que forman los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

***Propiedades:***

(1) Conmutativa: $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

(2) Distributiva: $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$

(3) $\left(\lambda\vec{a}\right)\cdot\left(\mu\vec{b}\right)=\lambda\mu\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)$

(4) $\vec{a}\neq\vec{0}\Rightarrow\vec{a}\cdot\vec{a}>0$

(el número real $\vec{a}\cdot\vec{a}$ se llama cuadrado escalar y se representa por $\vec{a}^{\,2}$)

**Definición:**

Se define el *módulo* de un vector por:

$$\boxed{|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}}\quad \forall\vec{a}\in V^3$$

***Dos propiedades importantes:***

- *Desigualdad de Cauchy-Schwarz:* $\boxed{\left|\vec{a}\cdot\vec{b}\right|\leq|\vec{a}|\ |\vec{b}|\quad \forall\vec{a},\vec{b}\in V^3}$
- *Desigualdad triangular:* $\boxed{\left|\vec{a}+\vec{b}\right|\leq|\vec{a}|+|\vec{b}|\quad \forall\vec{a},\vec{b}\in V^3}$

*Demostraciones:*

(1) Desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\left|\vec{a}\cdot\vec{b}\right|=\left||\vec{a}|\ |\vec{b}|\ \cos\theta\right|=|\vec{a}|\ |\vec{b}|\ |\cos\theta|\underset{(1)}{\leq}|\vec{a}|\ |\vec{b}|$$

donde en (1) hemos tenido en cuenta que $|\cos\theta|\leq 1\quad\forall x\in\mathbb{R}$ y que $|\vec{a}|\geq 0$ y $|\vec{b}|\geq 0$.

$$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2 = \left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right) = \vec{a}^{\,2} + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}^{\,2} = \left|\vec{a}\right|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + \left|\vec{b}\right|^2 \underset{(1)}{\leq} \left|\vec{a}\right|^2 + 2\left|\vec{a}\cdot\vec{b}\right| + \left|\vec{b}\right|^2 \underset{(2)}{\leq}$$

$$\leq \left|\vec{a}\right|^2 + 2\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right| + \left|\vec{b}\right|^2 = \left(\left|\vec{a}\right| + \left|\vec{b}\right|\right)^2 \overset{(3)}{\Rightarrow} \left|\vec{a}+\vec{b}\right| \leq \left|\vec{a}\right| + \left|\vec{b}\right|$$

Donde en (1) hemos usado que $x \leq |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$, en (2) la desigualdad de Cauchy-Schwarz y en (3) hemos tomado raíces cuadradas en ambos miembros (ya que los radicandos son no negativos).

C.Q.D.

**Definición:**

Los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son perpendiculares u ortogonales, $\vec{a} \perp \vec{b}$, cuando $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$.

**Definición:**

El vector $\vec{a}$ es un vector unitario sii $\left|\vec{a}\right| = 1$.

**Definición:**

Una base del espacio vectorial $V^3$, se dice ortonormal cuando sus vectores son ortogonales dos a dos y unitarios.

A partir de ahora, siempre trabajaremos con la **base usual**, esto es, con la base ortonormal:

$$\mathfrak{B} = \left\{\vec{i} = (1,0,0), \vec{j} = (0,1,0), \vec{k} = (0,0,1)\right\}$$

*Expresión analítica del producto escalar*:
Si $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ respecto de una base ortonormal, entonces:

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}$$

En efecto:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \left(a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}\right)\cdot\left(b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}\right) =$$

$$= a_1b_1\vec{i}^{\,2} + a_2b_2\vec{j}^{\,2} a_3b_3\vec{k}^{\,2} + \left(a_1b_2 + a_2b_1\right)\left(\vec{i}\cdot\vec{j}\right) + \left(a_1b_3 + a_3b_1\right)\left(\vec{i}\cdot\vec{k}\right) + \left(a_2b_3 + a_3b_2\right)\left(\vec{j}\cdot\vec{k}\right) \underset{[1]}{=}$$

$$= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

donde en [1] hemos tenido en cuenta que $\vec{i}^{\,2} = \vec{j}^{\,2} = \vec{k}^{\,2} = 1$ y que

$$\vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{i}\cdot\vec{k} = \vec{j}\cdot\vec{k} = 0$$

por ser ortonormal la base.

*Expresión analítica del módulo*: Si $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ respecto de una base ortonormal, entonces:

$$\boxed{\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$$

En efecto:

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}} = \sqrt{a_1a_1 + a_2a + a_3a_3} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

C.Q.D.

<u>*Expresión analítica del coseno de ángulo que forman dos vectores*</u>: Si $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ y $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ respecto de una base ortonormal, entonces:

$$\boxed{\cos\measuredangle(\vec{a},\vec{b})=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\ \sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}}$$

<u>*Vector perpendicular a un plano*</u>: Un vector $\vec{n}$ es perpendicular al plano $\pi$, y se escribe $\vec{n}\perp\pi$, cuando es perpendicular a cualquier vector contenido en el plano.

Sea $\overrightarrow{PQ}\in\pi\equiv Ax+By+Cz+D=0$ cualquiera. Si $P(p_1,p_2,p_3)$ y $Q(q_1,q_2,q_3)$, se tiene que

$$\left.\begin{aligned}Ap_1+Bp_2+Cp_3+D=0\\Aq_1+Bq_2+Cq_3+D=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow A(q_1-p_1)+B(q_2-p_2)+C(q_3-p_3)=0$$

es decir, el producto escalar del vector $\overrightarrow{PQ}=(q_1-p_1,q_2-p_2,q_3-p_3)$ y del vector $\vec{n}=(A,B,C)$ es cero, luego

$$\boxed{\vec{n}=(A,B,C)\perp\pi\equiv Ax+By+Cz+D=0}$$

## <u>*Ejercicios:*</u>

***112.*** *Sean los vectores* $\vec{x}=(1,-5,2)$, $\vec{y}=(3,4,-1)$, $\vec{z}=(6,3,-5)$ *y* $\vec{w}=(24,26,-6)$. *Halla los siguientes productos escalares:* $\vec{x}\cdot\vec{y}$, $\vec{x}\cdot\vec{z}$, $\vec{w}\cdot\vec{w}$ y $\vec{w}\cdot\vec{z}$

***113.*** *Halla el ángulo que forman estas parejas de vectores:*

*a)* $\vec{u}=(4,-1,3)$ y $\vec{v}=(3,0,2)$

*b)* $\vec{u}=(5,4,-1)$ y $\vec{v}=(2,-3,-2)$

***114.*** *¿Determina* $a$ *para que el ángulo que forman* $\vec{a}=(1,2,2)$ y $\vec{b}=(-3,1,a)$ *mida 60º?*

***115.*** *Decide si el triángulo de vértices* $A(-2,4,0)$, $B(3,-3,1)$ *y* $C(6,-2,4)$ *es rectángulo, acutángulo u obtusángulo.*

***116.*** *Si* $\vec{u}$ y $\vec{v}$ *son vectores ortogonales y unitarios, halla los posibles valores del parámetro real* $a$ *para que los vectores* $\vec{u}+a\vec{v}$ y $\vec{u}-a\vec{v}$ *formen un ángulo de 60º.*

*Indicaciones: el producto escalar correspondiente se efectúa «como si fuera un producto de polinomios» y para calcular los módulos hay que tener en cuenta la definición de módulo.*

**Nota 1:** ***posición relativa de una recta y un plano***

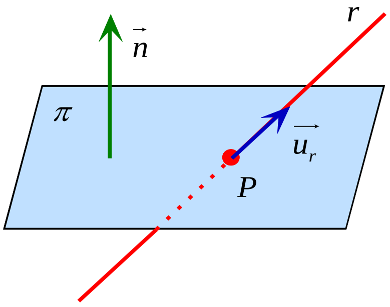
Usando el vector normal al plano, se entiende mucho mejor lo visto en el apartado 11 de la unidad anterior (1ª forma de estudiar la posición relativa de una recta y un plano), y que se puede escribir en la forma:

Sea $r\equiv\{P,\overrightarrow{u_r}\}$ una recta y $\pi\equiv Ax+By+Cz+D=0$ un plano, con vector normal $\overrightarrow{n_\pi}=(A,B,C)$.

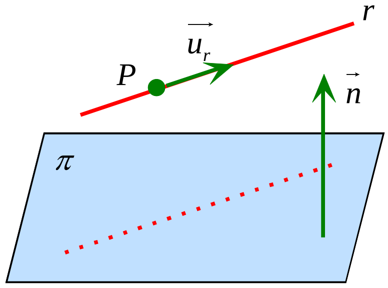
Se pueden presentar las siguientes ***posiciones relativas***:

- $\overrightarrow{u_r}\not\perp\overrightarrow{n_\pi}\Leftrightarrow r$ y $\pi$ se cortan en un punto

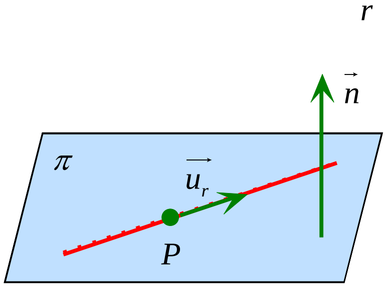
- $\overrightarrow{u_r} \perp \overrightarrow{n_\pi} \quad \begin{cases} P \in \pi \Rightarrow r \subset \pi \ (r \text{ contenida en } \pi) \\ P \notin \pi \Rightarrow r \parallel \pi \ (r \text{ y } \pi \text{ paralelos}) \end{cases}$




Recta y plano, secantes (en un punto)




Recta paralela al plano



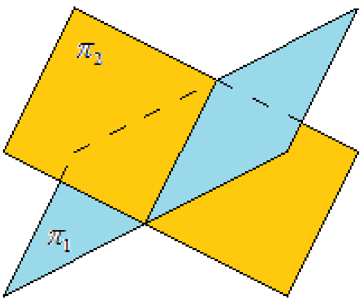

Recta contenida en el plano

**Nota 2:** ***posición relativa de dos planos***

Sean $\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$ y $\pi' \equiv A'x + B'y + C'z + D' = 0$ dos planos con vectores normales $\overrightarrow{n_\pi} = (A, B, C)$ y $\overrightarrow{n_{\pi'}} = (A', B', C')$, respectivcamente.

Se tienen las siguientes ***posiciones relativas***:

- $\overrightarrow{n_\pi} \nparallel \overrightarrow{n_{\pi'}} \Rightarrow$ Planos secantes (en una recta)
- $\overrightarrow{n_\pi} \parallel \overrightarrow{n_{\pi'}} \Rightarrow \begin{cases} \text{Paralelos: } P \in \pi \Rightarrow P \notin \pi' \\ \text{Coincidentes: } P \in \pi \Rightarrow P \in \pi' \end{cases}$

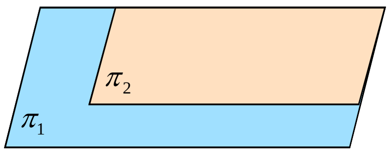



Planos secantes (en una recta)

$$\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$$


Planos paralelos

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \neq \frac{D}{D'}$$




Planos coincidentes

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \frac{D}{D'}$$

***Ejercicios de selectividad***

Junio de 2008, Cuarto Bloque, B) — Junio de 2014, Propuesta B, 4)

Junio de 2018, propuesta B, 4a) y b) — Julio de 2023, 8b)

Modelo 1 de 2024, 3b) — Modelo 2 de 2024, 8b)

# 2. ECUACIÓN NORMAL DEL PLANO

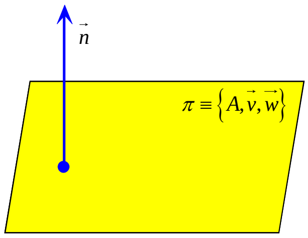
Sea $\pi$ el plano determinado por el punto $A$ y los vectores directores $\vec{v}$ y $\vec{w}$, y sea $\vec{n}$ un vector perpendicular al plano. Entonces, la ecuación del plano $\pi$ se puede escribir en la forma

$$\boxed{\vec{n}\cdot\left(\vec{x}-\vec{a}\right)=0}$$

Si además el vector $\vec{n}$ es unitario (o lo dividimos por su módulo), la ecuación anterior recibe el nombre de ecuación normal del plano.

Si $\pi\equiv Ax+By+Cz+D=0$, se tiene que $\vec{n}=(A,B,C)$ es un vector perpendicular al plano y, por tanto, la ecuación normal del plano $\pi$ con vector normal $\vec{n}$ que pasa por el punto $A(a_1,a_2,a_3)$ viene dada por:

$$\boxed{A(x-a_1)+B(y-a_2)+C(z-a_3)+D=0}$$




***Ejercicio:***

***117.*** *Halla la ecuación normal del plano* $x-2y+3z+5=0$ *que pasa por el punto* $A(1,-1,2)$.

# 3. ESPACIO VECTORIAL EUCLÍDEO. ESPACIO EUCLÍDEO

El espacio vectorial $V^3$ dotado con el producto escalar se denomina espacio vectorial euclídeo. El espacio afín $E^3$ asociado al espacio vectorial euclídeo, se llama espacio euclídeo o espacio afín euclídeo.

Además, dicho espacio se puede convertir en un espacio métrico (espacio en el que hay una métrica, esto es una forma de medir), definiendo la distancia entre dos puntos, a partir del producto escalar.

**Definición:**

Si $A(a_1,a_2,a_3)$ y $B(b_1,b_2,b_3)$ respecto de un sistema de referencia ortonormal, se define la distancia entre $A$ y $B$ por:

$$d(A,B)=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}$$

***Propiedades*:**

(1) $d(A,B)\geq 0$ y $d(A,B)=0\Leftrightarrow A=B$

(2) $d(A,B)=d(B,A)$

(3) $d(A,C)\leq d(A,B)+d(B,C)\quad \forall A,B,C\in E^3$

*Demostración:*

(1) $d(A,B)\geq 0$ por cómo hemos definido la distancia.

Vamos a demostrar que $d(A,B)=0 \Leftrightarrow A=B$:

$\Rightarrow) d(A,B)=0 \Rightarrow \left|\overrightarrow{AB}\right|=0 \Rightarrow \overrightarrow{AB}=\vec{0} \Rightarrow A=B$

$\Leftarrow)\ A=B \Rightarrow \overrightarrow{AB}=\vec{0} \Rightarrow \left|\overrightarrow{AB}\right|=0 \Rightarrow d(A,B)=0$

(2) $d(A,B)=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{BA}\right|=d(B,A)$

(3) $d(A,C)=\left|\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right|\underset{(1)}{\leq}\left|\overrightarrow{AB}\right|+\left|\overrightarrow{BC}\right|=d(A,B)+d(B,C)$

donde en (1) hemos usado la desigualdad triangular.

***Ejercicios:***

**118.** *Calcula la distancia entre los puntos* $A(1,-2,-3)$ y $B(-2,-1,3)$.

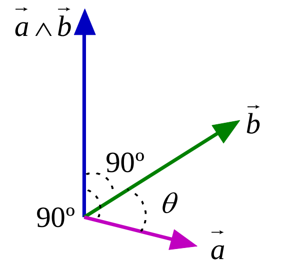
**119.** *Halla el valor del parámetro* $a$ *para que la distancia entre los puntos* $A(1,a,2)$ y $B(5,3,2)$ *sea igual a cinco.*

# 4. PRODUCTO VECTORIAL

**Definición:**

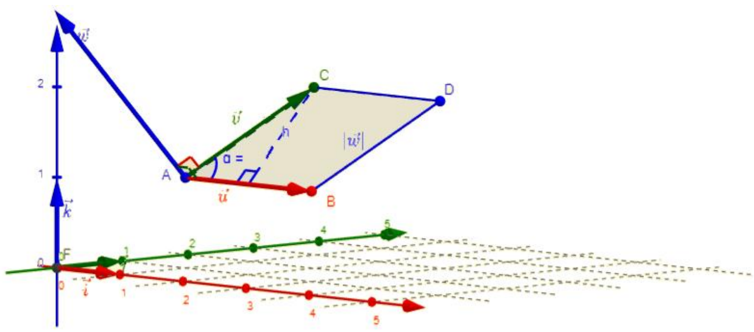
Si $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ y $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ respecto de una base ortonormal, se define el producto vectorial[5] de $\vec{a}$ y $\vec{b}$ por:

$$\boxed{\vec{a}\wedge\vec{b}=\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right) \equiv \det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}}$$




donde en la «última igualdad» se entiende que estamos calculando el determinante de las coordenadas (escritas por filas) de los vectores respecto de la base ortonormal usual $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$.

El sentido es el del avance del sacacorchos, que gira de $\vec{a}$ a $\vec{b}$ siguiendo el camino más corto.




Fuente: https://www.geogebra.org/m/TDsyaheC

[5] También se suele representar por $\times$.

***Observación:***

La igualdad $\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}$ ayuda a visualizar el sentido del producto vectorial.

*Propiedades*: $\vec{a},\vec{b}\in V^3$ y $\lambda\in\mathbb{R}$

(1) $\left|\vec{a}\wedge\vec{b}\right|=\left|\vec{a}\right|\ \left|\vec{b}\right|\ \left|\text{sen}\measuredangle\left(\vec{a},\vec{b}\right)\right|$

(2) $\vec{a}\wedge\vec{b}$ es ortogonal a $\vec{a}$ y a $\vec{b}$

(3) Si $\vec{a}=\vec{0}$ o $\vec{b}=\vec{0}\Rightarrow\vec{a}\wedge\vec{b}=\vec{0}$

(4) $\vec{a}\wedge\vec{b}=-\vec{b}\wedge\vec{a}$

(5) $\lambda\vec{a}\wedge\vec{b}=\vec{a}\wedge\lambda\vec{b}=\lambda\left(\vec{a}\wedge\vec{b}\right)$

(6) $\vec{a}\wedge\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}\wedge\vec{b}+\vec{a}\wedge\vec{c}$

(7) $\left(\vec{b}+\vec{c}\right)\wedge\vec{a}=\vec{b}\wedge\vec{a}+\vec{c}\wedge\vec{a}$

(8) $\vec{a}\wedge\vec{b}=\vec{0}\Leftrightarrow\vec{a}$ y $\vec{b}$ linealmente dependientes

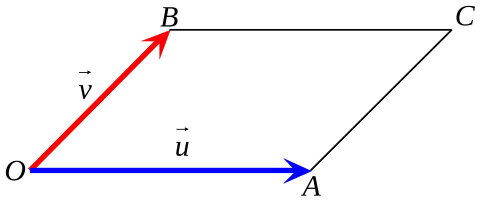
(9) **No verifica la propiedad asociativa**

***Ejercicio:***

***120.*** *Calcula el producto vectorial de los vectores* $\vec{u}=(1,-2,5)$ *y* $\vec{v}=(3,1,-2)$.

**Interpretación geométrica:**

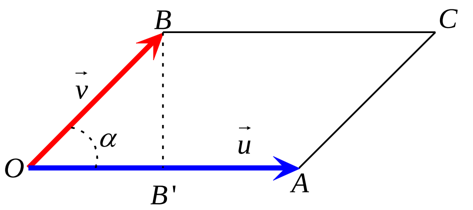
Sean $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ los representantes de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ con origen en $O$. Entonces, el módulo del producto vectorial es el área del paralelogramo $OACB$ determinado por $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$:




$$\boxed{\left|\vec{u}\wedge\vec{v}\right|=\text{Área}\left(OACB\right)}$$

En efecto.

Si consideramos el paralelogramo determinado por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ se tiene que:




$$\text{Área}=\left|\vec{u}\right|\left|\overrightarrow{BB'}\right|=\left|\vec{u}\right|\left|\vec{v}\right|\text{sen}\,\alpha$$

y, por tanto:

$$\left|\vec{u}\times\vec{v}\right|=\left|\vec{u}\right|\left|\vec{v}\right|\text{sen}\,\alpha=$$

= Área del paralelogramo determinado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$

***Ejercicio:***

***121.*** *Halla el valor de* $a$ *para que al efectuar el producto vectorial de* $\vec{u}=(1,2,a)$ y $\vec{v}=(a,3,1)$ *se obtenga el vector* $\vec{w}=(-4,3,-1)$.

**Ampliación: aclaración**

El producto vectorial de dos vectores, se define en un sistema de coordenadas **orientado**, como el vector perpendicular al plano generado por los dos vectores definidos con dicha orientación. Su definición viene dada por la expresión

$$\boxed{\vec{a}\times\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\ \left|\vec{b}\right|\ \text{sen}\,\theta\ \vec{n}}$$

donde $\theta = \sphericalangle\{\vec{a},\vec{b}\}$ y $\vec{n}$ es un vector unitario ortogonal al plano generado por los mismos.

La dependencia de la orientación, crea un «pequeño» problema cuando uno cambia de sistema de referencia, dado que un «verdadero vector» no debería cambiar de dirección al cambiar de orientación. Por ello, el producto vectorial no es un «verdadero vector», y es lo que se denomina *pseudovector* o *vector axial*, de ahí que su módulo tenga unidades de área y no de longitud, como se deduce de la propiedad (1) y de su interpretación geométrica.

***Otra definición*** alternativa es la siguiente:
Sean $\vec{a},\vec{b} \in V^3$. Se define el producto vectorial de ambos, como el vector libre $\vec{a} \wedge \vec{b}$ que verifica:

a) $\left|\vec{a} \wedge \vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right| \left|\vec{b}\right| \left|\operatorname{sen}\sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right)\right|$

b) $\vec{a} \wedge \vec{b}$ es ortogonal a $\vec{a}$ y a $\vec{b}$

c) El sentido de $\vec{a} \wedge \vec{b}$ es tal que la orientación de la terna $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{a} \wedge \vec{b}\right)$ es positiva (regla del sacacorchos).

A partir de esta definición es fácil deducir la que nosotros hemos dado en coordenadas.

***Ejercicio de selectividad***

Junio de 2008, cuarto bloque A).

## 5. VECTOR DIRECTOR DE UNA RECTA Y VECTOR NORMAL DE UN PLANO

Si la recta $r$ está dada como intersección de los planos $\pi_1$ y $\pi_2$,

$$r \equiv \begin{cases} \pi_1 \equiv Ax + By + Cz + D = 0 \\ \pi_2 \equiv A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}$$

se tiene que

$$\boxed{\vec{v}_r = \overrightarrow{n_{\pi_1}} \times \overrightarrow{n_{\pi_2}}}$$

es un vector director de la recta $r$, donde $\overrightarrow{n_{\pi_1}} = (A,B,C)$ y $\overrightarrow{n_{\pi_2}} = (A',B',C')$, ya que si $\vec{u}_r$ es un vector director de $r$, se tiene que $\vec{u}_r$ es perpendicular a $\overrightarrow{n_{\pi_1}}$ y a $\overrightarrow{n_{\pi_2}}$ y, como consecuencia, podemos tomar $\vec{v}_r = \overrightarrow{n_{\pi_1}} \times \overrightarrow{n_{\pi_2}}$ como vector director de la recta $r$.

Por otra parte, si $\pi \equiv \begin{cases} x = a_1 + u_1\lambda + v_1\mu \\ y = a_2 + u_2\lambda + v_2\mu \\ z = a_3 + u_3\lambda + v_3\mu \end{cases}$ son las ecuaciones paramétricas del plano $\pi$, entonces

$$\boxed{\vec{n}_\pi = \vec{u} \times \vec{v}}$$

con $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$ y $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$, es un vector normal a $\pi$.

***Ejercicio:***

***122.*** *Obtener un vector director de cada una de las siguientes rectas, usando el producto vectorial:*

*a)* $r_1\equiv\begin{cases}2x+y+z=3\\x-y-2z=1\end{cases}$ *b)* $r_3\equiv\begin{cases}x+y=0\\x-2y+z=5\end{cases}$ *c)* $r_2\equiv\begin{cases}x+z=8\\y+z=4\end{cases}$

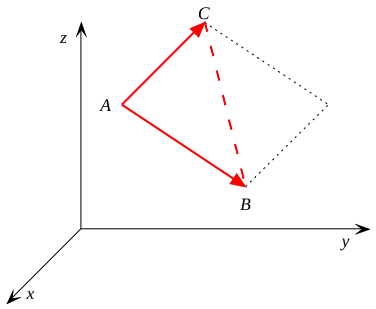
# 6. ÁREA DEL TRIÁNGULO

Sea $ABC$ el triángulo de vértices

$$A(a_1,a_2,a_3),\ B(b_1,b_2,b_3)\ \text{y}\ C(c_1,c_2,c_3)$$

Entonces, el área de dicho triángulo viene dada por:

$$\boxed{S=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right|}\equiv\frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ b_1-a_1 & b_2-a_2 & b_3-a_3\\ c_1-a_1 & c_2-a_2 & c_3-a_3\end{pmatrix}\right|$$




***Ejercicios:***

***123.*** *Calcular el área del triángulo de vértices* $A(2,1,0)$, $B(3,2,1)$ y $C(4,2,-1)$.

***124.*** *Dados los vectores* $\vec{u}=(1,2,3)$ y $\vec{v}=(3,1,0)$, *calcula el área del triángulo que determinan dos representantes suyos, con el mismo origen, al unir sus extremos.*

***Ejercicios de selectividad***

Reserva 2 de 2007, cuarto bloque, B, a)

Junio de 2011, propuesta B, 4a)

Junio de 2012, propuesta A, 4a)

Septiembre de 2020, 6b)

# 7. PRODUCTO MIXTO

**Definición:**

El producto mixto de los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ se define por:

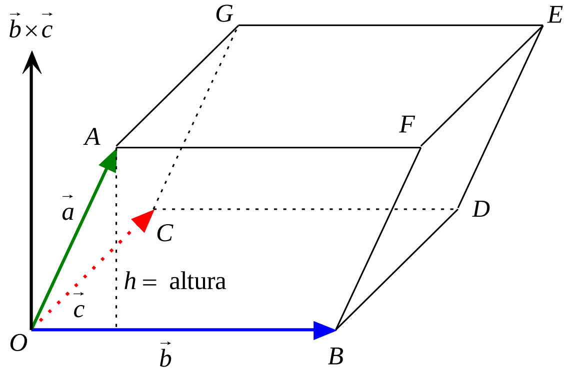
$$\boxed{\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right]=\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\wedge\vec{c}\right)}$$

**Interpretación geométrica:**

Sean $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{OC}$ los representantes de $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ con origen en $O$. Entonces, el valor absoluto del producto mixto de $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ es igual al volumen del paralelepípedo $OBDCAFEG$ determinado por $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{OC}$.

$$\boxed{\begin{array}{c} V\left(\text{paralelepípedo determinado por } \vec{a}, \vec{b} \text{ y } \vec{c}\right) = \\ = \left|\left[\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}\right]\right| \end{array}}$$

$$V\left(OBDCAFEG\right) = \left|\left[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\right]\right|$$




ya que

$$V(\text{paralelepípedo}) = A_{\text{base}} \cdot \text{altura} = \left|\vec{b}\times\vec{c}\right| \cdot \text{altura} =$$

$$= \left|\left|\vec{b}\times\vec{c}\right|\left|\vec{a}\right|\cos\measuredangle\left\{\vec{a}, \vec{b}\times\vec{c}\right\}\right| = \left|\left[\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}\right]\right|$$

***<u>Expresión analítica del producto mixto</u>***: Sean $\vec{a} = \left(a_1, a_2, a_3\right)$, $\vec{b} = \left(b_1, b_2, b_3\right)$ y $\vec{c} = \left(c_1, c_2, c_3\right)$. Entonces:

$$\boxed{\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] = \det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}}$$

En efecto:

$$\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] = \vec{a}\cdot\left(\vec{b}\wedge\vec{c}\right) = \left(a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}\right)\cdot\left(\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}\vec{k}\right) =$$

$$= a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} = \det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} = \det\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)$$

*<u>Propiedades</u>*:

(1) Antisimétrica

$$\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] = \left[\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}\right] = \left[\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}\right] = -\left[\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}\right] = -\left[\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}\right] = -\left[\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}\right]$$

(2) Trilineal

$$\left[\vec{a}+\vec{a}', \vec{b}, \vec{c}\right] = \left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] + \left[\vec{a}', \vec{b}, \vec{c}\right]$$

$$\left[\vec{a}, \vec{b}+\vec{b}', \vec{c}\right] = \left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] + \left[\vec{a}, \vec{b}', \vec{c}\right]$$

$$\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}+\vec{c}'\right] = \left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] + \left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}'\right]$$

$$\left[\lambda\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] = \left[\vec{a}, \lambda\vec{b}, \vec{c}\right] = \left[\vec{a}, \vec{b}, \lambda\vec{c}\right] = \lambda\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right]$$

(3) $\left[\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}\right] = 0 \Leftrightarrow \vec{a},\ \vec{b}$ y $\vec{c}$ son linealmente dependientes (coplanarios o proporcionales)

## ***<u>Ejemplos:</u>***

**1)** Calcula el producto mixto de los vectores $\vec{u} = \left(1, 5, 6\right)$, $\vec{v} = \left(-1, 2, -3\right)$ y $\vec{w} = \left(2, 0, -2\right)$.

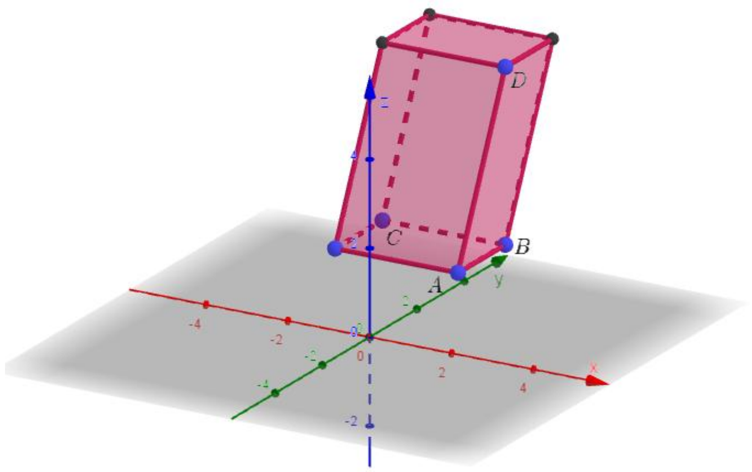
Lo calculamos en primer lugar, aplicando la definición:

$$\left[\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right]=\vec{u}\cdot\left(\vec{v}\wedge\vec{w}\right)=\left(1,5,6\right)\cdot\det\begin{pmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & 2 & -3\\ 2 & 0 & -2\end{pmatrix}=\left(1,5,6\right)\cdot\left(-4,-8,-4\right)=-68$$

Ahora, lo calculamos utilizando la expresión analítica:

$$\left[\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right]=\det\begin{pmatrix}1 & 5 & 6\\ -1 & 2 & -3\\ 2 & 0 & -2\end{pmatrix}=-68$$

**2)** Vamos a calcular el volumen del paralelepípedo de vértices $A(1,2,1)$, $B(1,4,1)$, $C(-2,2,1)$ y $D(1,4,5)$:




Calculamos los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$:

$$\overrightarrow{AB}=\left(0,2,0\right),\ \overrightarrow{AC}=\left(-3,0,0\right)$$

$$\overrightarrow{AD}=\left(0,2,4\right)$$

Se tiene que:

$$V_{\substack{paralelepípedo\\ A,B,C,D}}=\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right]\right|=$$

$$=\left|\det\begin{pmatrix}0 & 2 & 0\\ -3 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 4\end{pmatrix}\right|=24\ \text{u}^3$$

**3)** Dado el paralelepípedo formado por los vectores $\vec{u}=\left(1,-2,3\right)$, $\vec{v}=\left(1,-3,2\right)$ y $\vec{w}=\left(-1,-2,-2\right)$, calcula su altura respecto de la base formada por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

El volumen del paralelepípedo es

$$V=\left|\left[\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right]\right|=\left|\det\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 1 & -3 & 2\\ -1 & -2 & -2\end{pmatrix}\right|=\left|-5\right|=5\ \text{u}^3$$

Como la base está formada por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, el área de la base es

$$\left|\vec{u}\times\vec{v}\right|=\left|\det\begin{pmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -2 & 3\\ 1 & -3 & 2\end{pmatrix}\right|=\left|\left(5,1,-1\right)\right|=3\sqrt{3}\ \text{u}^2$$

y, por tanto, teniendo en cuenta que

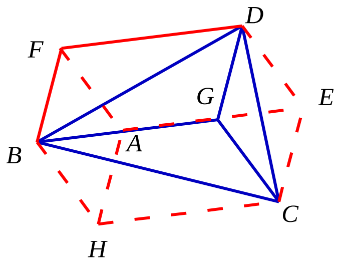
$$V=A_{base}\cdot h$$

resulta que

$$h=\frac{5}{3\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{3}}{3}\ \text{u}$$

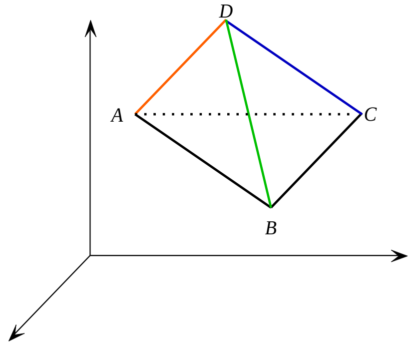
# 8. VOLUMEN DEL TETRAEDRO

Sea $ABCD$ el tetraedro de vértices $A, B, C$ y $D$. Trazando por $B, C$ y $D$, planos paralelos a las caras opuestas, se obtiene un paralelepípedo cuyo volumen es seis veces el del tetraedro, ya que este es la tercera parte del volumen del prisma triangular $ABCDFE$, que a su vez es la mitad del volumen del paralelepípedo $ABHCFGED$.




**Expresión vectorial y analítica:** sea $ABCD$ el tetraedro de vértices $A, B, C$ y $D$. Entonces, el volumen del tetraedro viene dado por:

$$V=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right]\right|=\frac{1}{6}\left|\det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & 1\\ b_1 & b_2 & b_3 & 1\\ c_1 & c_2 & c_3 & 1\\ d_1 & d_2 & d_3 & 1\end{pmatrix}\right|$$




es decir, es un sexto del valor absoluto del producto mixto de los tres vectores.

***Ejemplo:***

Dados los puntos $A(1,1,1)$, $B(1,3,-3)$, $C(-3,-1,1)$ y $D(2,3,4)$:

a) Calcula el volumen del tetraedro $A, B, C, D$.

b) Calcula un punto $P\in OX$ tal que $\underset{A,B,C,P}{V_{tetraedro}}=1\ \text{u}^3$.

a) El volumen del tetraedro es:

$$V=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right]\right|=\frac{1}{6}\left|\det\begin{pmatrix} 0 & 2 & -4\\ -4 & -2 & 0\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}\right|=\frac{48}{6}=8\ \text{u}^3$$

donde $\overrightarrow{AB}=(0,2,-4)$, $\overrightarrow{AC}=(-4,0,0)$ y $\overrightarrow{AD}=(1,2,3)$.

b) Sea $P(x,0,0)\in OX$. Se tiene que:

$$V=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AP}\right]\right|=\frac{1}{6}\left|\det\begin{pmatrix} 0 & 2 & -4\\ -4 & 0 & 0\\ x-1 & -1 & -1\end{pmatrix}\right|=\frac{1}{6}\left|-8x-16\right|=1\Rightarrow\left|-8x-16\right|=6\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases} -8x-16=6\Rightarrow x=\dfrac{6+16}{-8}=-\dfrac{11}{4}\Rightarrow P_1\left(-\dfrac{11}{4},0,0\right) \\ -8x-16=-6\Rightarrow x=\dfrac{-6+16}{-8}=-\dfrac{5}{4}\Rightarrow P_2\left(-\dfrac{5}{4},0,0\right)\end{cases}$$

***Ejemplo:***

Calcula el volumen de una pirámide que tiene por base el triángulo $ABC$ y por vértice el punto $D(3,-1,1)$, siendo $A(5,0,0), B(0,1,0)$ y $C(0,0,-5)$.

Sabemos que $V_{pirámide}=\frac{1}{3}S_{base}\cdot h$.

Calculamos

$$S_{base}=S_{triángulo}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\det\begin{pmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -5 & 1 & 0\\ -5 & 0 & -5\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\left|(-5,-25,5)\right|=\frac{1}{2}\sqrt{(-5)^2+25^2+5^2}=\frac{15\sqrt{3}}{2}\text{ u}^2$$

donde $\overrightarrow{AB}=(0,1,0)-(5,0,0)=(-5,1,0)$ y $\overrightarrow{AC}=(0,0,-5)-(5,0,0)=(-5,0,-5)$.

Calculamos ahora $h=d(\pi,D)$, donde $\pi\equiv\left\{A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right\}$:

$$\pi\equiv\det\begin{pmatrix}x-5 & -5 & -5\\ y & 1 & 0\\ z & 0 & -5\end{pmatrix}=-5x-25y+5z+25=0\Rightarrow\pi\equiv -x-5y+z+5=0$$

$$h=d(\pi,D)=\frac{\left|-3+5+1+5\right|}{\sqrt{(-1)^2+(-5)^2+1^2}}=\frac{8\sqrt{3}}{9}\text{ u}$$

Así,

$$V_{pirámide}=\frac{1}{3}\frac{15\sqrt{3}}{2}\frac{8\sqrt{3}}{9}=\frac{20}{3}\text{ u}^3$$

***Ejercicios:***

**125.** *Calcula el volumen del tetraedro que determinan los vectores* $\vec{u}=(2,3,3)$, $\vec{v}=(-2,9,1)$ *y* $\vec{w}=(-1,2,1)$.

**126.** *Calcula el volumen del tetraedro que determina el plano* $2x+4y+z-8=0$ *al cortar a los planos coordenados.*

***Ejercicios de Selectividad***

Junio de 2012, propuesta A, 4b) | Julio de 2020, 6b)

Junio de 2021, 5) | Julio de 2022, 6a)

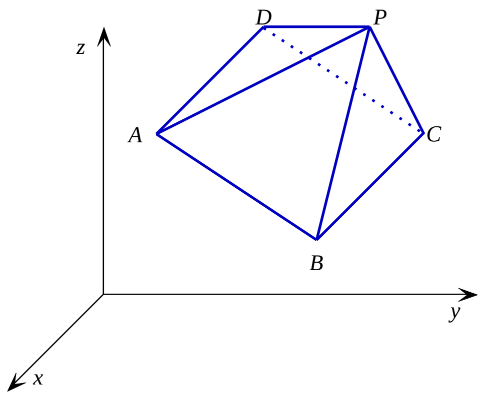
# 9. VOLUMEN DE UNA PIRÁMIDE CUADRANGULAR

Consideremos la pirámide que tiene por base el cuadrilátero $ABCD$, y otro vértice $P$ no situado en el plano en el que están situados los puntos $A, B, C$ y $D$.

El volumen de la pirámide es:

$$\boxed{V_{pirámide} = \frac{1}{3} S_{base} \cdot h}$$

donde la superficie de la base se puede calcular con la fórmula vista en el apartado 4 como el área de un cuadrilátero y la altura es la distancia del vértice al plano de la base, para la que también veremos una fórmula.




***Ejemplo:***

Consideramos la pirámide recta de base un paralelogramo de vérices $A(1,-3,0)$, $B(5,-1,1)$, $C(2,4,0)$ y $D$.

a) Calcular el punto $D$.

Si el vértice de la pirámide es $V(-2,1,13)$, calcular:

b) La altura de la pirámide.

c) El volumen de dicha pirámide.

a) Calculamos el punto $D$:

Sabemos que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AD} = (d_1,d_2,d_3)-(1,-3,0) = (d_1-1, d_2+3, d_3) \text{ donde } D=(d_1,d_2,d_3) \\ \overrightarrow{BC} = (2,4,0)-(5,-1,1) = (-3,5,-1) \end{cases}$ y,

por tanto, $\begin{cases} d_1 - 1 = -3 \Rightarrow d_1 = -2 \\ d_2 + 3 = 5 \Rightarrow d_2 = 2 \\ d_3 = -1 \end{cases} \Rightarrow D(-2,2,-1)$.

b) Calculamos el plano que determinan $A, B, C$ y $D$:

$$\left.\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= (5,-1,1)-(1,-3,0) = (4,2,1) \\ \overrightarrow{AC} &= (2,4,0)-(1,-3,0) = (1,7,0) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \pi \equiv \det\begin{pmatrix} x-1 & 4 & 1 \\ y+3 & 2 & 7 \\ z & 1 & 0 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \pi \equiv -7x + y + 26z = 0$$

Altura de la pirámide: distancia de $\pi$ a $V$

$$d(\pi, V) = \frac{|-7\cdot(-2)+1+26\cdot 13+10|}{\sqrt{(-7)^2+1^2+26^2}} = \frac{373}{\sqrt{726}} \text{ u}$$

c) Área del paralelogramo $A, B, C, D$:

$$A_{\substack{\text{Paralelogramo} \\ A,B,C,D}} = \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \left|\det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 7 & 0 \end{pmatrix}\right| = |(-7,1,26)| = \sqrt{(-7)^2+1^2+26^2} = 11\sqrt{6} \text{ u}^2$$

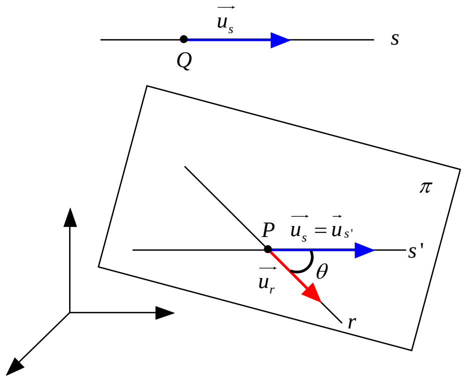
Volumen de la pirámide:

$$V_{\substack{\text{Pirámide}\\ A,B,C,D,V}} = \frac{1}{3}A_{base}\cdot h = \frac{1}{3}\cdot 11\sqrt{6}\cdot\frac{373}{\sqrt{726}} = \frac{373}{3}\ \text{u}^3$$

# 10. ÁNGULO ENTRE RECTAS

Sean $r$ y $s$ dos rectas del espacio euclídeo. El ángulo que forman estas dos rectas, tanto si se cortan como si no se cortan (se cruzan), se reduce al caso en el que se cortan, pues si se cruzan podemos tomar el ángulo que forma una de ellas con la paralela a la otra, por un punto de la primera.
El ángulo que forman las rectas $r$ y $s$ coincide con el ángulo que forman las rectas $r$ y $s'$, donde $s'$ es una recta paralela a la recta $s$ que pasa por un punto $P$ de la recta $r$.

Como las rectas $s$ y $s'$ son paralelas tienen el mismo vector director, luego el ángulo que forman las rectas $r$ y $s$ viene dado por el ángulo que forman sus respectivos vectores directores.




**Definición:**

Llamamos ***ángulo que forman dos rectas*** (tanto si se cortan como si se cruzan) al menor de los ángulos que forman sus vectores directores:

$$\boxed{\sphericalangle\{r,s\} = \arccos\frac{|\vec{u}_r\cdot\vec{u}_s|}{|\vec{u}_r||\vec{u}_s|}}$$

## *Ejemplo:*

Calculamos el ángulo que forman las rectas $r \equiv \begin{cases} x+y+z-2=0 \\ 2x-y+2z-1=0 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} 3x+2y+z+2=0 \\ -x-y+2+z+1=0 \end{cases}$.

Los vectores directores de las rectas son:

$$\vec{u}_r = \det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} = 3\vec{i} - 3\vec{k} = (3,0,-3) \ \text{ y } \ \vec{u}_s = \det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = 5\vec{i} - 7\vec{j} - \vec{k} = (5,-7,-1)$$

El ángulo que forman es:

$$\sphericalangle\{r,s\} = \arccos\frac{|\vec{u}_r\cdot\vec{u}_s|}{|\vec{u}_r||\vec{u}_s|} = \arccos\frac{|(3,0,-3)\cdot(5,-7,-1)|}{\sqrt{3^2+(-3)^2}\sqrt{5^2+(-7)^2+(-1)^2}} = \arccos\frac{\sqrt{6}}{5} = 60^{\circ}39'58,05''$$

**Caracterización de la perpendiuclaridad de dos rectas:**

$$\boxed{r \perp s \Leftrightarrow \sphericalangle\left\{\vec{u}_r, \vec{u}_s\right\} = 90^{\circ}}$$

## *Ejercicios:*

**127.** *Estudia la posición de las rectas* $r$ y $s$, *y halla el ángulo que forman:*

$$r \equiv \begin{cases} x - y = 3 \\ y + z = 15 \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} x = 3t \\ y = 1 + 2t \\ z = -14 + 5t \end{cases}$$

**128.** *Determina el ángulo que forman las siguientes parejas de rectas:*

*a)* $r \equiv \frac{x-1}{6} = \frac{y+2}{-4} = \frac{z-1}{2} \qquad s \equiv \frac{x+1}{-3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{-1}$

*b)* $r \equiv \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 4 - t \\ z = 2 + 2t \end{cases} \qquad s \equiv \frac{x+2}{3} = \frac{y}{-4} = \frac{z+1}{2}$

## *Ejercicio de Selectividad*

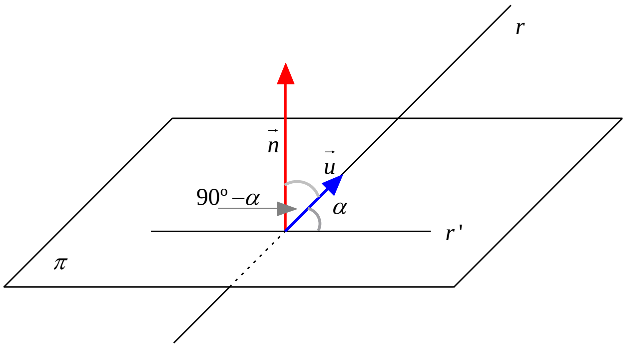
Reserva 2 de 2010, propuesta B, 4).

# 11. ÁNGULO DE RECTA Y PLANO

**Definición:**

Sea $r \equiv \vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{u}$ una recta, $\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$ un plano, $\vec{n}$ un vector normal a $\pi$ y $\alpha$ el ángulo agudo que forman $r$ y $\pi$. Dicho ángulo se define como el complementario del ángulo agudo que forman un vector director de la recta y un vector normal del plano:

$$\boxed{\text{sen}\,\alpha = \left|\cos \sphericalangle\left(\vec{u}, \vec{n}\right)\right|}$$




$$\text{sen}\,\alpha = \left|\cos\left(90^{\circ} - \alpha\right)\right| = \frac{\left|\vec{u}_r \cdot \vec{n}_{\pi}\right|}{\left|\vec{u}_r\right|\left|\vec{n}_{\pi}\right|}$$

$$\boxed{\alpha = \text{arcsen}\,\frac{\left|Au_1 + Bu_2 + Cu_3\right|}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}}$$

## *Ejemplo:*

Determinamos el ángulo que forman la recta $r \equiv \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{5} = \frac{z-1}{-1}$ y el plano $\pi \equiv 2x - 5y + 7z - 11 = 0$.

El vector director de la recta es $\overrightarrow{u_r}=(2,5,-1)$ y el vector normal del plano es $\overrightarrow{n_\pi}=(2,-5,7)$. Así:

$$\alpha=\operatorname{arcsen}\frac{\left|\overrightarrow{u_r}\cdot\overrightarrow{n_\pi}\right|}{\left|\overrightarrow{u_r}\right|\left|\overrightarrow{n_\pi}\right|}=\operatorname{arcsen}\frac{\left|(2,5,-1)\cdot(2,-5,7)\right|}{\sqrt{2^2+5^2+(-1)^2}\sqrt{2^2+(-5)^2+7^2}}=\operatorname{arcsen}\frac{28}{\sqrt{30}\sqrt{78}}=35^\circ\,22'5,54''$$

**Condición de perpendicularidad de recta y plano:**

$$r\perp\pi\Leftrightarrow\vec{u}\parallel\vec{n}\Leftrightarrow\frac{u_1}{A}=\frac{u_2}{B}=\frac{u_3}{C}$$

**Condición de paralelismo de recta y plano:**

$$r\parallel\pi\Leftrightarrow\vec{u}\cdot\vec{n}=0\Leftrightarrow Au_1+Bu_2+Cu_3=0$$

## Ejercicios:

**129.** *Calcula el ángulo que forman la recta* $\dfrac{x-3}{7}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-2}{3}$ *con el plano* $x+3y-z+1=0$.

**130.** *Halla, en cada caso, el ángulo que forman la recta y el plano:*

*a)* $r\equiv\dfrac{x+1}{-2}=\dfrac{y+3}{4}=\dfrac{z}{2}$ $\qquad\pi\equiv x-2y-z+1=0$

*b)* $r\equiv\begin{cases}x=t\\y=1+2t\\z=-2\end{cases}$ $\qquad\pi\equiv 2x-y-z=0$

# 12. ÁNGULO DE DOS PLANOS

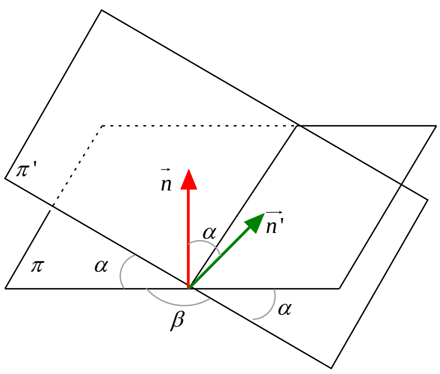
**Definición:**

Sean $\pi\equiv Ax+By+Cz+D=0$, $\pi'\equiv A'x+B'y+C'z+D'=0$ dos planos y $\vec{n}$ y $\vec{n'}$ vectores perpendiculares a $\pi$ y $\pi'$ respectivamente (por ejemplo, $\vec{n}=(A,B,C)$ y $\vec{n'}=(A',B',C')$). El ángulo agudo formado por los dos planos está determinado por:

$$\boxed{\cos\alpha=\left|\cos\measuredangle\left(\vec{n},\vec{n'}\right)\right|}$$

O en coordenadas:

$$\boxed{\cos\alpha=\frac{\left|AA'+BB'+CC'\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{(A')^2+(B')^2+(C')^2}}}$$



**Condición de perpendicularidad de dos planos:**

$$\vec{n} \perp \vec{n}' \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \vec{n}' = 0 \Leftrightarrow AA' + BB' + CC' = 0$$

## Ejercicio:

***131.*** *Calcula el ángulo que forman los planos:*

*a)* $\alpha \equiv z = 3$ y $\beta \equiv x - y + 2z + 4 = 0$

*b)* $\pi \equiv 2x - y + z - 1 = 0$ y $\pi' \equiv x + z + 3 = 0$

## *Ejercicio de Selectividad*

Reserva 1 de 2008, cuarto bloque, A)

# 13. DISTANCIA DE UN PUNTO A UN PLANO Y DE UN PLANO A UNA RECTA

**Definición:**

La distancia del punto $P(p_1, p_2, p_3)$ al plano

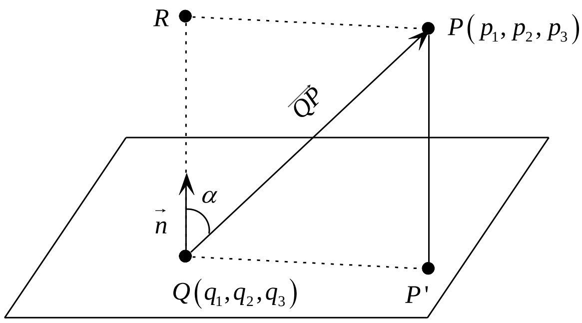
$$\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$$

es la distancia del punto $P$ al punto $Q$, que es el punto de intersección del plano con la perpendicular a $\pi$ trazada por $P$.

En coordenadas se tiene:

$$\boxed{d(P,\pi) = \frac{|Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}}$$

En efecto:




$\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$

Se tiene que $d(P,\pi) = d(P,P') = \left|\overrightarrow{PP'}\right| = \left|\overrightarrow{QR}\right|$.

Por otra parte, $\vec{n} \cdot \overrightarrow{QP} = |\vec{n}|\left|\overrightarrow{QP}\right|\cos\alpha$ y $\cos\alpha = \dfrac{\left|\overrightarrow{QR}\right|}{\left|\overrightarrow{QP}\right|}$, luego $\vec{n} \cdot \overrightarrow{QP} = |\vec{n}|\left|\overrightarrow{QP}\right|\dfrac{\left|\overrightarrow{QR}\right|}{\left|\overrightarrow{QP}\right|} = |\vec{n}|\left|\overrightarrow{QR}\right|$ y, como consecuencia, $\dfrac{\vec{n} \cdot \overrightarrow{QP}}{|\vec{n}|} = \left|\overrightarrow{QR}\right|$. Así, $d(P,\pi) = \left|\overrightarrow{QR}\right| = \dfrac{\left|\vec{n} \cdot \overrightarrow{QP}\right|}{|\vec{n}|}$ (hemos tomado el valor absoluto del producto escalar, para asegurar que la distancia es no negativa).

Expresamos en coordenadas la expresión obtenida:

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OQ}=\left(p_1-q_1,p_2-q_2,p_3-q_3\right)\\ \vec{n}=\left(A,B,C\right)\end{array}\right\}\Rightarrow \vec{n}\cdot\overrightarrow{QP}=A\left(p_1-q_1\right)+B\left(p_2-q_2\right)+C\left(p_3-q_3\right)=$$

$$=Ap_1+Bp_2+Cp_3-\left(Aq_1+Bq_2+Cq_3\right)\underset{(1)}{=}Ap_1+Bp_2+Cp_3+D$$

donde en (1) hemos tenido en cuenta que $Q\left(q_1,q_2,q_3\right)\in\pi$ y, por tanto, $Aq_1+Bq_2+Cq_3+D=0$, de donde $Aq_1+Bq_2+Cq_3=-D$. Así,

$$d\left(P,\pi\right)=\frac{\left|Ap_1+Bp_2+Cp_3+D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

CQ.D.

## ***Ejemplo:***

Calculamos la distancia del punto $P\left(3,2,-1\right)$ al plano $\pi\equiv x-3y+5z-4=0$.

Se tiene que

$$d\left(P,\pi\right)=\frac{\left|Ap_1+Bp_2+Cp_3+D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{\left|3-3\cdot2+5\cdot\left(-1\right)-4\right|}{\sqrt{1^2+\left(-3\right)^2+5^2}}=\frac{12\sqrt{35}}{\sqrt{35}}\ \text{u}$$

Como consecuencia:

**Definición:**

La <u>distancia de un plano</u> $\pi$ <u>a una recta</u> $r$ <u>paralela a él</u>, coincide con la distancia de un punto cualquiera $P_r\in r$ al plano $\pi$.

$$\boxed{d\left(r,\pi\right)=d\left(P_r,\pi\right)\ \text{ donde } P_r\in r}$$

Si la <u>recta está contenida en el plano o</u> es <u>secante</u> con él, entonces:

$$\boxed{d\left(r,\pi\right)=0}$$

## ***Ejemplo:***

Calcular la distancia de la recta $r\equiv\dfrac{x-3}{-2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+1}{3}$ al plano $\pi\equiv x+5y-z=0$.

Como $r\parallel\pi$ ya que $\overrightarrow{u_r}=\left(-2,1,3\right)\perp\overrightarrow{n_\pi}=\left(1,5,-1\right)$, se tiene que $d\left(r,\pi\right)=d\left(P_r,\pi\right)$ donde $P_r\in r$. Tomando $P_r\left(3,1,-1\right)$, resulta que:

$$d\left(r,\pi\right)=d\left(P_r,\pi\right)=\frac{\left|3+5\cdot1-\left(-1\right)\right|}{\sqrt{1^2+5^2+\left(-1\right)^2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\ \text{u}$$

## ***Ejercicios:***

***132.*** *Halla la distancia del punto* $P\left(2,1,0\right)$ *al plano* $\pi\equiv2x-3y+z-2=0$.

***133.*** *Halla la distancia del punto* $P(2,1,0)$ *al plano* $\pi \equiv \begin{cases} x = 2-\lambda+\mu \\ y = 3\lambda - 2\mu \\ z = 1+\lambda-2\mu \end{cases}$.

***134.*** *Calcula la altura trazada desde el vértice* $D$ *del tetraedro determinado por los puntos* $A(2,0,0)$, $B(-1,3,2)$, $C(1,-4,-1)$ y $D(0,0,0)$.

*Indicación: Halla el plano determinado por los puntos* $A$, $B$ y $C$, *y la distancia del punto* $D$ *a ese plano.*

### ***Ejercicios de Selectividad: distancia de un punto a un plano***

Junio de 2000, primer bloque, B)

Junio de 2006, cuarto bloque, A, b)

Septiembre de 2007, cuarto bloque, B)

Septiembre de 2008, cuarto bloque, B)

Reserva 2 de 2011, propuesta B, 4)

### ***Ejercicios de Selectividad: distancia ente una recta y un plano***

Junio de 2004, tercer bloque, B)

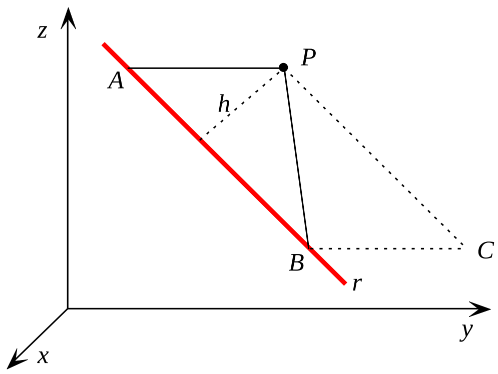
Septiembre de 2011, propuesta B, 4)

Junio de 2013, propuesta A, 4)

# 14. DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA

**Definición / caracterización:**

Sea $P(p_1, p_2, p_3)$ un punto y $r$ la recta determinada por un punto $A(a_1, a_2, a_3)$ y un vector director $\vec{u_r} = (u_1, u_2, u_3)$.




Como $S(ABCP) = |\overrightarrow{AB}|h = |\overrightarrow{AB}|d(P,r)$, la distancia del punto $P$ a la recta $r$ se puede expresar por:

$$\boxed{d(P,r) = \frac{S(ABCP)}{|\overrightarrow{AB}|}}$$

donde $B$ es un punto arbitrario de la recta distinto de $A$ y $S(ABCP)$ es la superficie del paralelogramo determinado por $\overrightarrow{AP}$ y $\overrightarrow{AB}$.

**Caracterización:**

La fórmula anterior, se puede escribir como sigue:

$$\boxed{d(P,r) = \frac{|\vec{u_r} \times \overrightarrow{AP}|}{|\vec{u_r}|}}$$

En efecto:

El área del paralelogramo $PABC$ es:

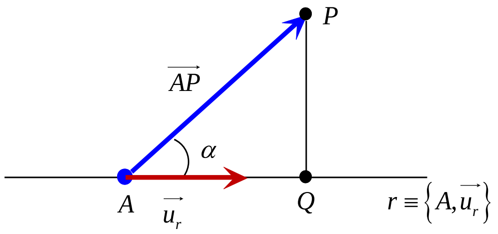
$$\text{Área} = \text{Base} \cdot \text{Altura} = \left|\overrightarrow{u_r}\right| \cdot h$$

$$\text{Área} = \left|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{AP}\right|$$

y como $h = d\left(P, r\right)$, igualando y despejando $h$:

$$\left|\overrightarrow{u_r}\right| \cdot h = \left|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{AP}\right| \Rightarrow h = \frac{\left|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{AP}\right|}{\left|\overrightarrow{u_r}\right|}$$

«De otra forma»:




Se tiene que

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{d}{\left|\overrightarrow{AP}\right|} = \frac{d\left(P,Q\right)}{\left|\overrightarrow{AP}\right|} = \frac{d\left(P,r\right)}{\left|\overrightarrow{AP}\right|} \qquad [1]$$

y como $\left|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{AP}\right| = \left|\overrightarrow{u_r}\right|\left|\overrightarrow{AP}\right| \operatorname{sen}\alpha$, resulta que

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\left|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{AP}\right|}{\left|\overrightarrow{u_r}\right|\left|\overrightarrow{AP}\right|} \qquad [2]$$

Como consecuencia de [1] y [2] se tiene lo que queríamos. C.Q.D.

Para calcular la $\boxed{\text{distancia del punto } P \text{ a la recta } r}$, podemos usar, además de la fórmula, los siguientes **métodos**:

**(1) Método del plano perpendicular**

i) Calculamos un plano $\pi$ tal que $\begin{cases} \pi \perp r \\ P \in \pi \end{cases}$

ii) Hallamos $P' = \pi \cap r$ (punto de corte de $\pi$ y de $r$).

iii) $d\left(P,r\right) = d\left(P,P'\right) = \left|\overrightarrow{PP'}\right|$

**(2) Método del punto genérico**

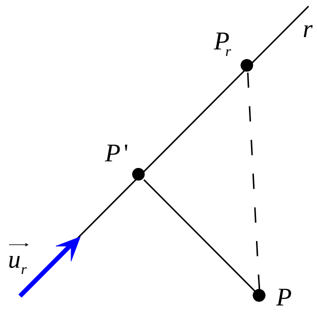
i) Tomamos $P_r \in r$ genérico (que dependerá de $\lambda$)

ii) Hallamos $\overrightarrow{PP_r}$ (que dependerá de $\lambda$)

iii) Imponemos que $\overrightarrow{PP_r} \perp r$ ($\Leftrightarrow \overrightarrow{PP_r} \cdot \overrightarrow{u_r} = 0$), de donde se obtendrá un único valor de $\lambda$.

iv) Sustituimos el valor de $\lambda$ obtenido en las ecuaciones paramétricas de la recta, obteniendo el punto $P'$.

v) $d\left(P,r\right) = d\left(P,P'\right) = \left|\overrightarrow{PP'}\right|$




## Ejemplo:

Calcular $d\left(P,r\right)$, donde $P\left(5,1,6\right)$ y $r \equiv \begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = -\lambda \\ z = 5 + \lambda \end{cases}$.

(1) Método del plano perpendicular

i) $\pi \equiv \{P, \overrightarrow{u_r}\} \equiv -2(x-5)-(y+1)+(z-6)=0 \Rightarrow \pi \equiv 2x+y-z-3=0$

ii) $P' = \pi \cap r \Rightarrow 2(1-2\lambda)+(-\lambda)-(5+\lambda)-3=0 \Rightarrow \lambda=-1 \Rightarrow P'(3,1,4)$

iii) $d(P,r)=d(P,P')=\left|\overrightarrow{PP'}\right|=\sqrt{(-2)^2+(-2)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ u

donde $\overrightarrow{PP'}=(3,1,4)-(5,1,6)=(-2,0,-2)$

(2) Método del punto genérico

i) $P_r(1-2\lambda,-\lambda,5+\lambda)\in r$ genérico

ii) $\overrightarrow{P_rP}=(5,1,6)-(1-2\lambda,-\lambda,5+\lambda)=(4+2\lambda,-1+\lambda,1+\lambda)$

iii) $\overrightarrow{P_rP}\perp\overrightarrow{u_r} \Leftrightarrow \overrightarrow{P_rP}\cdot\overrightarrow{u_r}=0 \Leftrightarrow (4+2\lambda,-1+\lambda,1+\lambda)\cdot(-2,-1,1)=0 \Rightarrow \lambda=-1$

iv) $P'(3,1,4)$

v) $d(P,r)=d(P,P')=\left|\overrightarrow{PP'}\right|=\sqrt{(-2)^2+(-2)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ u

donde $\overrightarrow{PP'}=(3,1,4)-(5,1,6)=(-2,0,-2)$

## ***Ejemplo:***

Calcular la distancia del punto $P(-6,4,-3)$ a la recta $r \equiv \frac{x}{-6}=\frac{y-4}{-4}=\frac{z+2}{1}$.

Aplicamos la fórmula $d(P,r)=\frac{\left|\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{AP}\right|}{\left|\overrightarrow{u_r}\right|}$ con $A(0,4,-2)\in r$ y $\overrightarrow{u_r}=(-6,-4,1)$.

Se tiene que

$$\overrightarrow{AP}=(-6,0,-1)$$

$$\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{AP}=\det\begin{pmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -6 & -4 & 1\\ -6 & 0 & -1\end{pmatrix}=4\vec{i}-12\vec{j}-24\vec{k}=(4,-12,-24)$$

y, por tanto,

$$d(P,r)=\frac{\left|\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{AP}\right|}{\left|\overrightarrow{u_r}\right|}=\frac{\sqrt{4^2+(-12)^2+(-24)^2}}{\sqrt{(-3)^2+(-4)^2+1^2}}=\frac{4\sqrt{299}}{13}\text{ u}\simeq 5{,}32\text{ u}$$

## ***Ejercicios:***

***135.*** *Halla la distancia del punto* $P(2,1,0)$ *a la recta* $r \equiv x=\frac{y}{2}=\frac{z-2}{1}$

***136.*** *Calcula el área del triángulo que forman los puntos* $A(2,0,0)$, $B(-1,3,2)$ y $C(1,-4,-1)$.

*Indicación: toma, por ejemplo, como base el lado* $AB$ *y la altura será la distancia del vértice* $C$ *a la recta que determinan los puntos* $A$ y $B$.

## *Ejercicios de Selectividad*

Reserva 2 de 2007, cuarto bloque, A)

Reserva 1 de 2009, cuarto bloque, B)

Septiembre de 2010, propuesta A, 4)

Junio de 2015, propuesta A, 4, a)

# 15. DISTANCIA ENTRE DOS RECTAS

### Entre rectas secantes o coincidentes:

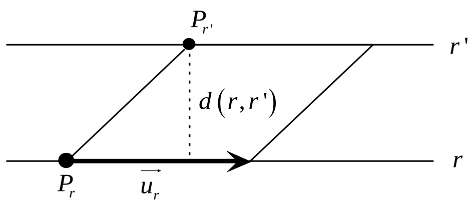
Sean $r$ y $r'$ dos rectas secantes o coincidentes. Se tiene que $\boxed{d(r,r')=0}$

### Entre rectas paralelas:

Si $r$ y $r'$ dos rectas paralelas, entonces

$$\boxed{d(r,r')=d(r,P_{r'})}=\frac{\left|\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{P_rP_{r'}}\right|}{\left|\overrightarrow{u_r}\right|}$$

donde $P_r\in r$ y $P_{r'}\in r'$.




### Entre rectas que se cruzan:

Sean $r$ y $r'$ dos rectas que se cruzan. La distancia entre las rectas $r$ y $r'$ es igual a la distancia entre dos planos paralelos $\pi$ y $\pi'$ que contengan respectivamente a $r$ y $r'$.

Si $\begin{cases} x=a_1+\lambda u_1 \\ y=a_2+\lambda u_2 \\ z=a_3+\lambda u_3 \end{cases}$ y $\begin{cases} x=a'_1+\mu u'_1 \\ y=a'_2+\mu u'_2 \\ z=a'_3+\mu u'_3 \end{cases}$ se tiene que:

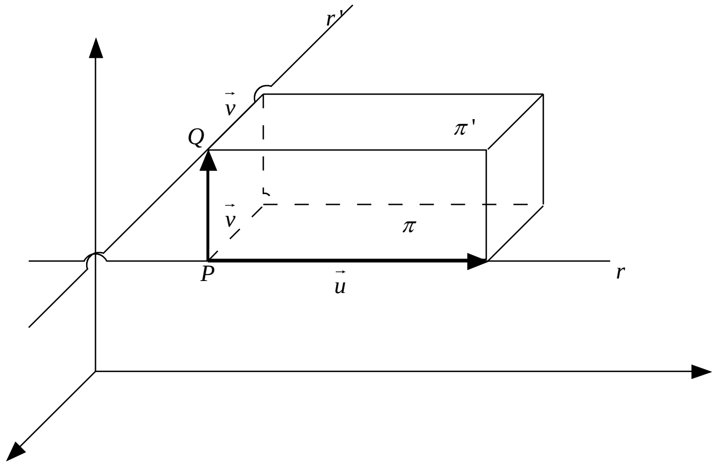
$$\boxed{d(r,r')=\left|\frac{\det\left(\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_{r'}},\overrightarrow{A_{r'}A_r}\right)}{\left|\overrightarrow{u_r}\wedge\overrightarrow{u_{r'}}\right|}\right|}=\left|\frac{\det\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ u'_1 & u'_2 & u'_3 \\ a'_1-a_1 & a'_2-a_2 & a'_3-a_3 \end{pmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ u'_2 & u'_3 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ u'_3 & u'_1 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u'_1 & u'_2 \end{vmatrix}^2}}\right|$$

donde $\overrightarrow{u_r}=(u_1,u_2,u_3)$, $\overrightarrow{u_{r'}}=(u'_1,u'_2,u'_3)$, $A(a_1,a_2a_3)$ es un punto de $r$ y $A'(a_1',a_2',a_3')$ es un punto de $r'$.

En efecto:
El volumen del paralelepípedo es $V_{\text{paralelepípedo}}=A_{base}\cdot h$ y

$$\left.\begin{array}{l} V_{\text{paralelepípedo}} = \left|\left[\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}, \overrightarrow{A_{r'}A_r}\right]\right| \\ A_{\text{base}} = \left|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_{r'}}\right| \\ h = d(P,Q) = d(r,r') \end{array}\right\} \Rightarrow d(r,r') = \frac{\left|\left[\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_{r'}}, \overrightarrow{A_{r'}A_r}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_{r'}}\right|}$$

C.Q.D.




**Entre rectas que se cruzan:**

La *distancia entre dos rectas que se cruzan*, $r$ y $r'$, coincide también con la distancia de una de ellas, $r$, al plano que contiene a la otra, $r'$, y es paralelo a $r$.

**Teorema:**

Dadas dos rectas que se cruzan, siempre existe un plano que contiene a una de ellas y es paralelo a la otra.

Para calcular la distancia entre dos rectas $r$ y $s$ que se cruzan, podemos usar, además de la fórmula, los siguientes **métodos**:

**(1) Método del plano paralelo**

$d(r,s) = d(s,\pi)$ donde $\pi$ es un plano tal que $\begin{cases} \pi \parallel s \\ r \subset \pi \end{cases}$

**(2) Método del vector variable**

i) $P_r \in r$ punto genérico de $r$ (depende de $\lambda$)

ii) $P_s \in s$ punto genérico de $s$ (depende de $\mu$)

iii) Calculamos el vector $\overrightarrow{P_rP_s}$ (con origen en $r$ y extremo en $s$), que depende de $(\lambda,\mu)$.

iv) Imponemos que $\overrightarrow{P_rP_s} \perp r$ y $\overrightarrow{P_rP_s} \perp s$ ($\overrightarrow{P_rP_s} \cdot \overrightarrow{u_r} = 0 = \overrightarrow{P_rP_s} \cdot \overrightarrow{u_s}$) y obtenemos $(\lambda,\mu)$.

v) Sustituyendo $\lambda$ y $\mu$ en las ecuaciones de $r$ y $s$, respectivamente, obtenemos dos puntos $R \in r$ y $S \in s$.

vi) $d(r,s)=d(R,S)=\left|\overrightarrow{RS}\right|$

## ***Ejemplo:***

**1)** Calcular la distancia entre las rectas $r\equiv\begin{cases}x&=&5&+&\lambda\\y&=&-1&&\\z&=&8&+&2\lambda\end{cases}$ y $s\equiv\begin{cases}x&=&4&+&3\mu\\y&=&3&-&\mu\\z&=&5&+&4\mu\end{cases}$.

(1) Método del plano paralelo

Hallamos un plano $\pi$ tal que $\begin{cases}\pi\parallel s\\ r\subset\pi\end{cases}$ : $\pi\equiv\left\{P_r,\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s}\right\}$ o también $\pi\equiv\left\{P_r,\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{u_s}\right\}$

$$\pi\equiv\det\begin{pmatrix}x-5&1&3\\y+1&0&-1\\z-8&2&4\end{pmatrix}=0\Rightarrow\pi\equiv2x+2y-z=0$$

$$d(r,s)=d(s,\pi)=d(P_s,\pi)=\frac{|2\cdot4+2\cdot3-5|}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}}=3\text{ u}$$

(2) Método del vector variable

i) Punto genérico de $r:P_r(5+\lambda,-1,8+2\lambda)$

ii) Punto genérico de $s:P_s(4+3\mu,3-\mu,5+4\mu)$

iii) Vector genérico:

$$\overrightarrow{P_rP_s}=(4+3\mu,3-\mu,5+4\mu)-(5+\lambda,-1,8+2\lambda)=(-1+3\mu-\lambda,4-\mu,-3+4\mu-2\lambda)$$

iv) Imponemos que $\overrightarrow{P_rP_s}\perp r$ y $\overrightarrow{P_rP_s}\perp s$:

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{P_rP_s}\perp r\Rightarrow5+5\lambda-11\mu=0\\ \overrightarrow{P_rP_s}\perp s\Rightarrow19+11\lambda-26\mu=0\end{array}\right\}\Rightarrow(\lambda,\mu)=(3,2)$$

v) Sustituyendo en $r$ y en $s$ obtenemos los puntos:

$R(8,-1,14)$ y $S(10,1,13)$

vi) $d(r,s)=d(R,S)=\left|\overrightarrow{RS}\right|=\sqrt{(10-8)^2+(1+1)^2+(13-14)^2}=3\text{ u}$

2) Calcular la distancia entre las rectas $r\equiv\frac{x-2}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z-4}{1}$ y $s\equiv\frac{x}{-1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$.

Consideramos los puntos $P_r(2,0,4)$ y $P_s(0,0,0)$, Se tiene que $\overrightarrow{P_rP_s}=(-2,0,-4)$, $\overrightarrow{u_r}=(3,2,1)$ y $\overrightarrow{u_s}=(-1,1,1)$ y, así:

$$d(r,s)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{P_rP_s},\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{u_s}\right|}=\frac{\left|\det\begin{pmatrix}2&0&4\\3&2&1\\1&1&1\end{pmatrix}\right|}{\left|(1,-4,5)\right|}=\frac{|-22|}{\sqrt{1^2+(-4)^2+5^2}}=\frac{11\sqrt{42}}{21}\text{ u}$$

donde $\left|\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{u_s}\right|=\left|\det\begin{pmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\3&2&1\\1&1&1\end{pmatrix}\right|=\left|(1,-4,5)\right|$

## Ejercicios:

**137.** *Halla la distancia entre los siguientes pares de rectas:*

*a)* $r\equiv\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{-1}$ y $s\equiv\frac{x}{1}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z}{-1}$

*b)* $r\equiv\frac{x+1}{-1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z+1}{-1}$ y $s\equiv\begin{cases}2x-3y=0\\2y-3z=0\end{cases}$

**138.** *Halla la distancia entre los siguientes pares de rectas:*

*a)* $r\equiv\begin{cases}2x+y-2=0\\z=0\end{cases}$ y $s\equiv\begin{cases}2x-3y=0\\2y-3z=0\end{cases}$

*b)* $r$ *es la recta que pasa por el origen de coordenadas y el punto* $P(-1,2,1)$*, y* $s$ *es la recta que pasa por el punto* $Q(1,1,1)$ *y es perpendicular al plano* $\pi\equiv x=0$.

## Ejercicios de Selectividad

Otra propuesta 1, 2001, segundo bloque, B, b)

Septiembre de 2004, cuarto bloque, B, b)

Reserva 1 de 2007, cuarto bloque, A, b)

Reserva 2 de 2012, propuesta B, 4)

# 16. DISTANCIA ENTRE DOS PLANOS

**Planos coincidentes o que se cortan:**

Si los planos son coincidentes o se cortan, la distancia es cero: $\boxed{d(\pi,\pi')=0}$

**Planos paralelos:**

Si los planos son paralelos, la distancia entre ambos es igual a la distancia entre cualquier punto $P$ de uno de los planos al otro:

$$\boxed{d(\pi,\pi')=d(P_\pi,\pi')\text{ donde }P_\pi\in\pi}$$

## Ejercicio:

**139.** *Halla la distancia entre los siguientes planos:*

*a)* $\pi\equiv 2x-2y+3z=0$ y $\pi'\equiv 4x-4y+6z=12$

*b)* $\pi\equiv 3x-3y=0$ y $\pi'\equiv x-y=1$

## Ejercicios de Selectividad

Otra propuesta 1 de 2000, primer bloque, B) Septiembre de 2004, tercer bloque, B)

Junio de 2007, cuarto bloque B)

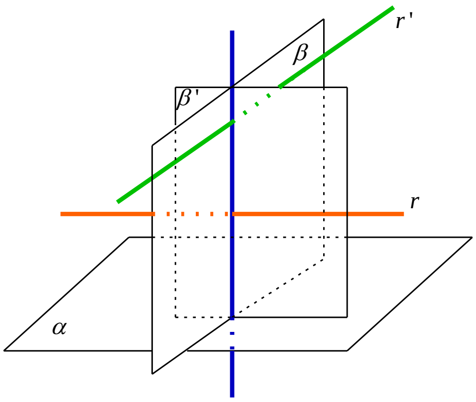
# 17. PERPENDICULAR COMÚN

Llamamos perpendicular común a las rectas $r$ y $r'$ a la recta que es perpendicular a ellas y corta a las dos.

Antes de dar un método para calcularla hay que hacer notar que ***para que el problema tenga solución única*** las rectas $r$ y $r'$ tienen que ser secantes o cruzarse en el espacio.

*Para hallar la perpendicular común a dos rectas*:

(1) Hallamos un plano $\alpha$ paralelo a las dos rectas.
(2) Hallamos un plano $\beta$ perpendicular a $\alpha$ y que contenga a $r$.
(3) Hallamos un plano $\beta'$ perpendicular a $\alpha$ y que contenga a $r'$.
(4) La recta buscada es la intersección de los planos $\beta$ y $\beta'$.



Perpendicular común

*«Otra forma» de hallar la perpendicular común a dos rectas* es la siguiente:

$$\boxed{p \equiv \begin{cases} \det\left(\overrightarrow{A_r X}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_r} \wedge \overrightarrow{u_{r'}}\right) = 0 \\ \det\left(\overrightarrow{A_{r'} X}, \overrightarrow{u_{r'}}, \overrightarrow{u_r} \wedge \overrightarrow{u_{r'}}\right) = 0 \end{cases}}$$

donde $A_r$ es un punto de $r$, $A_{r'}$ es un punto de $r'$, $\overrightarrow{u_r}$ es un vector director de $r$, $\overrightarrow{u_{r'}}$ es un vector director de $r'$ y $X$ es un punto genérico de la perpendicular común $p$.

## Ejercicios:

**140.** *Halla la perpendicular común a los pares de rectas que puedes formar con las rectas:*

$$r_1 \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{2} \qquad r_2 \equiv x-1 = y = \frac{z}{2} \qquad r_3 \equiv x-2 = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2}$$

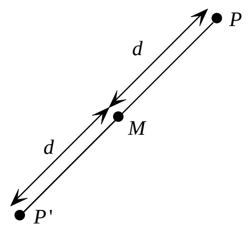
**141.** *Halla unas ecuaciones de la recta $t$ perpendicular común a las rectas*

$$r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-3}{2} \qquad s \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-1}$$

## Ejercicio de Selectividad

Otra propuesta 1 de 2000, segundo bloque, B)

# 18. PUNTO SIMÉTRICO DE UN PUNTO RESPECTO DE OTRO PUNTO: SIMETRÍA CENTRAL




El simétrico del punto $P$ respecto de otro punto $M$ es el punto $P'$ tal que $M$ es el punto medio del segmento $\overline{PP'}$.

Dados dos puntos en el espacio $A(a_1,a_2,a_3)$ y $B(b_1,b_2,b_3)$, el punto medio del segmento $\overline{AB}$ es:

$$\boxed{M\left(\frac{a_1+b_1}{2},\frac{a_2+b_2}{2},\frac{a_3+b_3}{2}\right)}$$

## *Ejercicios resueltos:*

***142.*** *Halla el punto simétrico del punto $A(0,2,-1)$ respecto del punto $B(-1,0,2)$.*

Solución:

Sea $A'(a'_1,a'_2,a'_3)$ el punto simétrico pedido. Se tiene que:

$$(-1,0,2)=\left(\frac{0+a'_1}{2},\frac{2+a'_2}{2},\frac{-1+a'_3}{2}\right)\Rightarrow\begin{cases}-1=\dfrac{0+a'_1}{2}\\ 0=\dfrac{2+a'_2}{2}\\ 2=\dfrac{-1+a'_3}{2}\end{cases}\Rightarrow A'(-2,-2,5)$$

***143.*** *Calcula los vértices del triángulo simétrico al formado por los puntos*

$$A(0,-1,2),\ B(-1,2,0),\ C(2,0,-1)$$

*respecto del origen de coordenadas.*

Solución:

Simétrico de $A$ respecto de $O(0,0,0)$

$$(0,0,0)=\left(\frac{0+a'_1}{2},\frac{-1+a'_2}{2},\frac{2+a'_3}{2}\right)\Rightarrow\begin{cases}0=\dfrac{0+a'_1}{2}\\ 0=\dfrac{-1+a'_2}{2}\\ 0=\dfrac{2+a'_3}{2}\end{cases}\Rightarrow A'(0,-1,-2)$$

Simétrico de $B$ respecto de $O(0,0,0)$

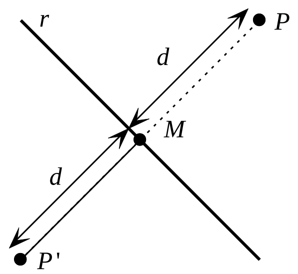
$$(0,0,0)=\left(\frac{-1+b'_1}{2},\frac{2+b'_2}{2},\frac{0+b'_3}{2}\right)\Rightarrow\begin{cases}0=\dfrac{-1+b'_1}{2}\\0=\dfrac{2+b'_2}{2}\\0=\dfrac{0+b'_3}{2}\end{cases}\Rightarrow B'(1,-2,0)$$

Simétrico de $C$ respecto de $O(0,0,0)$

$$(0,0,0)=\left(\frac{2+c'_1}{2},\frac{0+c'_2}{2},\frac{-1+c'_3}{2}\right)\Rightarrow\begin{cases}0=\dfrac{2+c'_1}{2}\\0=\dfrac{0+c'_2}{2}\\0=\dfrac{-1+c'_3}{2}\end{cases}\Rightarrow C'(-2,0,1)$$

# 19. PUNTO SIMÉTRICO RESPECTO DE UNA RECTA: SIMETRÍA AXIAL

Dos puntos $P$ y $P'$ son simétricos respecto de una recta $r$, si la recta $r$ es perpendicular al segmento $\overline{PP'}$ en su punto medio. Dicha recta recibe el nombre de *recta de simetría*.




Dados una recta $r$ y un punto $P$ no perteneciente a ella, para determinar el simétrico de $P$ respecto de $r$ seguimos los siguientes pasos:

1) Obtenemos la ecuación del plano $\pi$ perpendicular a $r$ y que pasa por $P$.
2) Hallamos el punto $M$ de intersección de $r$ y $\pi$.
3) Determinamos el punto $P'$ simétrico de $P$ respecto de $M$.

## *Ejercicios resueltos:*

***144.*** *a) Halla el punto simétrico del punto* $P(2,1,0)$ *respecto de la recta* $r\equiv\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z-2}{1}$.

*b) Halla el punto simétrico del punto* $P(2,1,0)$ *respecto de la recta* $r\equiv\frac{x-3}{3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{2}$.

Solución:

a) Simétrico

i) Plano perpendicular a $r$ que pasa por $P$

$$\left.\begin{array}{l}\pi \equiv \left\{P, \overrightarrow{n_\pi} = \overrightarrow{u_r}\right\} \equiv Ax + By + Cz + D = 0 \\ \left.\begin{array}{r}\overrightarrow{u_r} = (1,2,1) \Rightarrow x + 2y + z + D = 0 \\ P(2,1,0) \in \pi\end{array}\right\} \Rightarrow D = -4\end{array}\right\} \Rightarrow \pi \equiv x + 2y + z - 4 = 0$$

ii) $Q = r \cap \pi \equiv \begin{cases} 2x - y = 0 \\ y - 2z = -4 \\ x + 2y + z = 4 \end{cases} \Rightarrow Q\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{7}{3}\right)$

iii) $P'(p'_1, p'_2, p'_3)$ simétrico de $P$ respecto de $Q$

$$\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{7}{3}\right) = \left(\frac{2+p'_1}{2}, \frac{1+p'_2}{2}, \frac{p'_3}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{3} = \frac{2+p'_1}{2} \\ \frac{2}{3} = \frac{1+p'_2}{2} \\ \frac{7}{3} = \frac{p'_3}{2} \end{cases} \Rightarrow P'\left(-\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, \frac{14}{3}\right)$$

b) Simétrico

i) Plano perpendicular a $r$ que pasa por $P$

$$\left.\begin{array}{l}\pi \equiv \left\{P, \overrightarrow{n_\pi} = \overrightarrow{u_r}\right\} \equiv Ax + By + Cz + D = 0 \\ \left.\begin{array}{r}\overrightarrow{u_r} = (3,-2,2) \Rightarrow 3x - 2y + 2z + D = 0 \\ P(-1,2,3) \in \pi\end{array}\right\} \Rightarrow D = 1\end{array}\right\} \Rightarrow \pi \equiv 3x - 2y + 2z + 1 = 0$$

ii) $Q = r \cap \pi \equiv \begin{cases} 2x + 3y = 3 \\ 2x - 3z = 6 \\ 3x - 2y + 2z + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow Q\left(\frac{15}{17}, \frac{7}{17}. -\frac{24}{17}\right)$

iii) $P'(p'_1, p'_2, p'_3)$ simétrico de $P$ respecto de $Q$

$$\left(\frac{15}{17}, \frac{7}{17}, -\frac{24}{17}\right) = \left(\frac{-1+p'_1}{2}, \frac{2+p'_2}{2}, \frac{3+p'_3}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} \frac{15}{17} = \frac{-1+p'_1}{2} \\ \frac{7}{17} = \frac{2+p'_2}{2} \\ -\frac{24}{17} = \frac{3+p'_3}{2} \end{cases} \Rightarrow P'\left(\frac{47}{17}, -\frac{20}{17}, -\frac{99}{17}\right)$$

**145.** *Calcula los vértices del triángulo simétrico al formado por los puntos* $A(0,-1,2)$, $B(-1,2,0)$, $C(2,0,-1)$ *respecto de la recta* $r \equiv x - 1 = y - 1 = z - 1$.

<u>*Solución:*</u>

i) Simétrico de $A$ respecto de la recta r

$\pi_A \equiv x+y+z-1=0$

$$Q_A \equiv \begin{cases} x=y \\ x=z \\ x+y+z-1=0 \end{cases} \Rightarrow Q_A\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) \text{ (punto medio de } \overline{AA'}\text{)}$$

$$A'(a'_1,a'_2,a'_3) \Rightarrow \left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{0+a'_1}{2},\frac{-1+a'_2}{2},\frac{2+a'_3}{2}\right) \Rightarrow A'\left(\frac{2}{3},\frac{5}{3},-\frac{4}{3}\right)$$

ii) Simétrico de $B$ respecto de la recta r

$\pi_B \equiv x+y+z+1=0$

$$Q_B \equiv \begin{cases} x=y \\ x=z \\ x+y+z+1=0 \end{cases} \Rightarrow Q_B\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right) \text{ (punto medio de } \overline{BB'}\text{)}$$

$$B'(b'_1,b'_2,b'_3) \Rightarrow \left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{-1+b'_1}{2},\frac{2+b'_2}{2},\frac{0+b'_3}{2}\right) \Rightarrow B'\left(\frac{1}{3},-\frac{8}{3},-\frac{2}{3}\right)$$

iii) Simétrico de $C$ respecto de la recta r

$\pi_C \equiv x+y+z-1=0$

$$Q_C \equiv \begin{cases} x=y \\ x=z \\ x+y+z-1=0 \end{cases} \Rightarrow Q_C\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) \text{ (punto medio de } \overline{CC'}\text{)}$$

$$C'(c'_1,c'_2,c'_3) \Rightarrow \left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{2+c'_1}{2},\frac{0+c'_2}{2},\frac{-1+c'_3}{2}\right) \Rightarrow C'\left(-\frac{4}{3},\frac{2}{3},\frac{5}{3}\right)$$

El triángulo simétrico del triángulo $A, B, C$ es el triángulo $A', B', C'$.

***Ejercicios de Selectividad***

Junio de 2001, tercer bloque, B)

Septiembre de 2006, cuarto bloque, B, b)

Reserva 1 de 2011, propuesta B, 4, b)

Junio de 2015, propuesta A, 4, b)

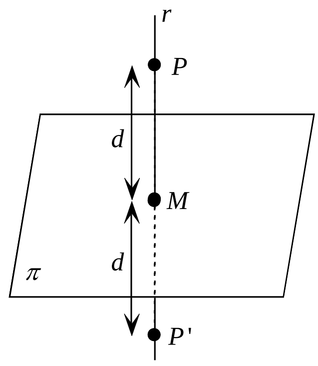
Junio de 2016, propuesta A, 4, b)

# 20. PUNTOS SIMÉTRICOS RESPECTO DE UN PLANO: SIMETRÍA ESPECULAR

Dos puntos $P$ y $P'$ son simétricos respecto de un plano $\pi$, si el plano $\pi$ es perpendicular al segmento $\overline{PP'}$ en su punto medio. Dicho plano recibe el nombre de *plano de simetría*.

Dados un plano $\pi$ y un punto $P$ no perteneciente a él, para determinar el simétrico de $P$ respecto de $\pi$ seguimos los siguientes pasos:

1) Obtenemos la ecuación de la recta $r$ perpendicular al plano $\pi$ y que pase por $P$.
2) Hallamos el punto $M$ de intersección de $r$ y $\pi$.
3) Determinamos el punto $P'$ simétrico de $P$ respecto de $M$.




## ***Ejercicios resueltos:***

***146.*** *Halla el simétrico del punto* $P(2,1,0)$ *respecto del plano* $\pi \equiv 2x-3y+z-2=0$.

Solución:

i) Vector normal al plano

$$\overrightarrow{n_\pi}=(2,-3,1)$$

ii) Recta que pasa por $P$ y es perpendicular a $\pi$

$$r \equiv \left\{P,\overrightarrow{n_\pi}\right\} \equiv \begin{cases} x=2+2\lambda \\ y=1-3\lambda \\ z=\quad\lambda \end{cases} \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}$$

iii) Punto de intersección de $r$ y de $\pi$

Se puede obtener, sustituyendo las coordenadas de $r$ en $\pi$, para obtener $\lambda$, y posteriormente sustituir en las ecuaciones de $r$:

$$2(2+2\lambda)-3(1-3\lambda)+\lambda-2=0 \Rightarrow \lambda=\frac{2}{11}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=2+2\cdot\dfrac{2}{11}=\dfrac{24}{11} \\ y=1-3\cdot\dfrac{2}{11}=\dfrac{5}{11} \\ z=\dfrac{2}{11} \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{24}{11},\frac{5}{11},\frac{2}{11}\right)$$

iv) $P'=2P-I$

$$P'=2(2,1,0)-\left(\frac{24}{11},\frac{5}{11},\frac{2}{11}\right)=\left(\frac{20}{11},\frac{17}{11},-\frac{2}{11}\right)$$

***147.*** *Si los puntos* $A(1,0,5)$ y $A'(3,2,-3)$ *son simétricos, halla una recta y el plano respecto de los cuales dichos puntos son simétricos.*

Solución:

i) Vector director de la recta de simetría

$$\overrightarrow{A'A}=(3,2,-3)-(1,0,5)=(2,2,-8)$$

ii) Punto medio de $\overline{A'A}$

$$P\left(\frac{1+3}{2},\frac{0+2}{2},\frac{5+(-3)}{2}\right)=(2,1,1)$$

iii) Ecuación de la recta de sismetría

$$r\equiv\begin{cases}x=2+2\lambda\\ y=1+2\lambda \quad \text{con } \lambda\in\mathbb{R}\\ z=1-8\lambda\end{cases}$$

iv) Vector normal del plano de simetría

$$\overrightarrow{n_\pi}=\overrightarrow{u_r}=(2,2,-8)$$

v) Ecuación del plano de simetría

$$\left.\begin{array}{l}\pi\equiv\left\{P,\overrightarrow{n_\pi}\right\}\\ \left.\begin{array}{r}\pi\equiv 2x+2y-8z+D=0\\ P(2,1,1)\in\pi\end{array}\right\}\Rightarrow 2\cdot2+2\cdot1-8\cdot1+D=0\Rightarrow D=2\end{array}\right\}\Rightarrow \pi\equiv 2x+2y-8z+2=0$$

***Ejercicios de Selectividad***

Septiembre de 2000, segundo bloque, B)

Otra propuesta 1 de 2001, cuarto bloque, B, c)

Septiembre de 2005, cuarto bloque, B)

Septiembre de 2012, propuesta A, 4, b)

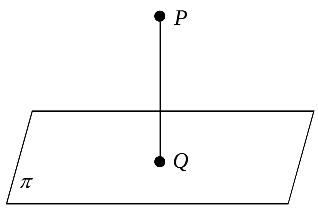
Septiembre de 2013, propuesta B, 4, a)

# 21. PROYECCIÓN ORTOGONAL DE UN PUNTO SOBRE UN PLANO

Dados un punto $P$ y un plano $\pi$, llamaremos proyección ortogonal de $P$ sobre $\pi$, al punto $Q$ que verifica:

$$Q=r\cap\pi$$

donde $r$ es la recta perpendicular a $\pi$ que pasa por $P$.




***Ejercicios:***

***148.*** *Calcula la proyección ortogonal del punto* $P(0,0,0)$ *sobre el plano* $\pi\equiv 2x-3y+z-2=0$.

Solución:

i) Recta perpendicular a $\pi$ que pasa por $P$

Vector director: $\overrightarrow{u_r}=\overrightarrow{n_\pi}=(2,-3,1)$

Punto: $P(0,0,0)$

Recta: $r \equiv \frac{x}{2} = \frac{y}{-3} = z \Rightarrow \begin{cases} -3x - 2y = 0 \\ y + 3z = 0 \end{cases}$

ii) Resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} -3x - 2y = 0 \\ y + 3z = 0 \\ 2x - 3y + z - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow (x, y, z) = \left(\frac{3}{8}, -\frac{3}{8}, \frac{1}{8}\right)$$

iii) La proyección ortogonal de $P$ sobre $\pi$ es $Q\left(\frac{3}{8}, -\frac{3}{8}, \frac{1}{8}\right)$

**149.** *Calcula la proyección ortogonal de los puntos* $A(0,0,0)$, $B(-1,1,1)$ y $C(0,2,0)$ *sobre el plano* $\pi$*, determinado por las rectas:*

$$r \equiv \frac{x-3}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{1} \qquad s \equiv \begin{cases} x + 2z = 3 \\ y - 2z = 0 \end{cases}$$

<u>Solución:</u>

Las rectas $r$ y $s$ son secnates, y el punto de corte es $P\left(\frac{9}{7}, \frac{6}{7}, \frac{3}{7}\right)$, luego el plano $\pi \equiv \left\{P, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}\right\}$

donde $\overrightarrow{u_r} = (3,2,1)$ y $\overrightarrow{u_s} = \det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = (-4,2,1)$, esto es:

$$\pi \equiv \det\begin{pmatrix} x - \frac{9}{7} & 3 & -4 \\ y - \frac{6}{7} & 2 & 2 \\ z - \frac{3}{7} & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow -7y + 14z = 0 \Rightarrow \pi \equiv -y + 2z = 0$$

Proyección ortogonal de $A$ sobre $\pi$

i) Recta perpendicular a $\pi$ que pasa por $A$

Vector director: $\overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{n_\pi} = (0,-1,2)$

Punto: $A(0,0,0)$

Recta: $r \equiv \frac{x}{0} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases}$

ii) Resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} x = 0 \\ 2y + z = 0 \\ -y + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow (x, y, z) = (0,0,0)$$

iii) La proyección ortogonal de $A$ sobre $\pi$ es $Q_A(0,0,0)$

Proyección ortogonal de $B$ sobre $\pi$

i) Recta perpendicular a $\pi$ que pasa por $B$

Vector director: $\overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{n_\pi} = (0,-1,2)$

Punto: $B(-1,1,1)$

Recta: $r \equiv \frac{x+1}{0} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ 2(y-1) = -(z-1) \end{cases}$

ii) Resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} x+1=0 \\ 2(y-1) = -(z-1) \Rightarrow (x,y,z) = \left(-1, \frac{6}{5}, \frac{3}{5}\right) \\ -y+2z=0 \end{cases}$$

iii) La proyección ortogonal de $B$ sobre $\pi$ es $Q_B\left(-1, \frac{6}{5}, \frac{3}{5}\right)$

Proyección ortogonal de $C$ sobre $\pi$

iv) Recta perpendicular a $\pi$ que pasa por $B$

Vector director: $\overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{n_\pi} = (0,-1,2)$

Punto: $C(0,2,0)$

Recta: $r \equiv \frac{x}{0} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{2} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ 2(y-2) = -z \end{cases}$

v) Resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} x=0 \\ 2(y-2) = -z \Rightarrow (x,y,z) = \left(0, \frac{8}{5}, \frac{4}{5}\right) \\ -y+2z=0 \end{cases}$$

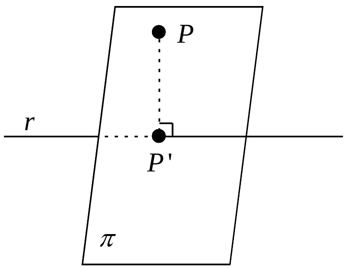
vi) La proyección ortogonal de $C$ sobre $\pi$ es $Q_C\left(0, \frac{8}{5}, \frac{4}{5}\right)$

# 22. PROYECCIÓN ORTOGONAL DE UN PUNTO SOBRE UNA RECTA

La proyección ortogonal de un punto sobre una recta es el punto de intersección de esa recta con el plano perpendicular a ella que contiene al punto.

*Para obtenerlo:*

- Hallamos el plano $\pi$ perpendicular a $r$ y que contiene a $P$
- Hallamos la intersección del plano $\pi$ con la recta $r$.
- La solución del sistema anterior es la proyección $P'$.




Como *consecuencia*:
La distancia de un punto $P$ a una recta $r$ es la distancia entre el punto $P$ y el punto $M \in r$ proyección ortogonal de $P$ sobre $r$.

## ***Ejercicio resuelto:***

***150.*** *Encuentra la proyección ortogonal de los puntos* $A(0,0,0)$, $B(-1,1,1)$ y $C(0,2,0)$ *sobre la recta* $r \equiv \begin{cases} x+2z=3 \\ y-z=0 \end{cases}$.

Solución:

Proyección ortogonal de $A$ sobre $\pi$

i) Plano $\pi$ perpendicular a $r$ y tal que $A \in \pi$

$$\pi \equiv \left\{A, \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{n_\pi}\right\} \text{ donde } \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{n_\pi} = \det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = (-2,1,1)$$

$$\left.\begin{array}{r} \pi \equiv -2x+y+z+D=0 \\ A(0,0,0) \in \pi \end{array}\right\} \Rightarrow D=0 \Rightarrow \pi \equiv -2x+y+z=0$$

ii) $$P'_A \equiv \pi \cap r \equiv \begin{cases} -2x+y+z=0 \\ x+2z=3 \\ y-z=0 \end{cases} \Rightarrow P'_A(1,1,1)$$

iii) La proyección ortogonal de $A$ sobre $\pi$ es $P'_A(1,1,1)$

Proyección ortogonal de $B$ sobre $\pi$

i) Plano $\pi$ perpendicular a $r$ y tal que $B \in \pi$

$$\pi \equiv \left\{B, \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{n_\pi}\right\} \text{ donde } \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{n_\pi} = \det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = (-2,1,1)$$

$$\left.\begin{array}{r} \pi \equiv -2x+y+z+D=0 \\ B(-1,1,1) \in \pi \end{array}\right\} \Rightarrow D=-4 \Rightarrow \pi \equiv -2x+y+z-4=0$$

ii) $$P'_B \equiv \pi \cap r \equiv \begin{cases} -2x+y+z-4=0 \\ x+2z=3 \\ y-z=0 \end{cases} \Rightarrow P'_B\left(-\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right)$$

iii) La proyecciñon ortogonal de $B$ sobre $\pi$ es $P'_B\left(-\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right)$

Proyección ortogonal de $C$ sobre $\pi$

i) Plano $\pi$ perpendicular a $r$ y tal que $C \in \pi$

$$\pi \equiv \left\{C, \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{n_\pi}\right\} \text{ donde } \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{n_\pi} = \det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = (-2,1,1)$$

$$\left.\begin{array}{r} \pi \equiv -2x+y+z+D=0 \\ C(0,2,0) \in \pi \end{array}\right\} \Rightarrow D=-2 \Rightarrow \pi \equiv -2x+y+z-2=0$$

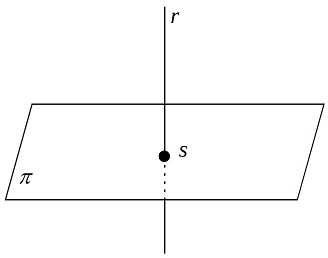
ii) $P'_C \equiv \pi \cap r \equiv \begin{cases} -2x+y+z-2=0 \\ x+2z=3 \\ y-z=0 \end{cases} \Rightarrow P'_C\left(\frac{1}{3},\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)$

iii) La proyecciñon ortogonal de $C$ sobre $\pi$ es $P'_C\left(\frac{1}{3},\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)$

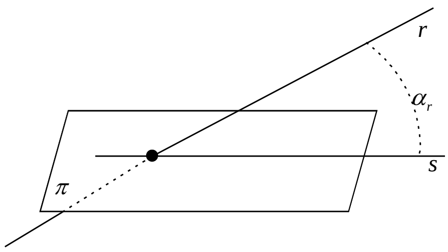
# 23. PROYECCIÓN ORTOGONAL DE UNA RECTA SOBRE UN PLANO

Dados una recta $r$ y un plano $\pi$, llamaremos proyección ortogonal de $r$ sobre $\pi$ a la recta $s$ (o punto) que definimos de la siguiente forma:

(i) Si $r \perp \pi$ entonces $s = r \cap \pi$ (en este caso $s$ es un punto en el que se proyectan todos los puntos de la recta)




(ii) Si $r \not\perp \pi$ entonces $s = \alpha_r \cap \pi$, siendo $\alpha_r$ el plano que contiene a la recta $r$ y que verifica $\alpha_r \perp \pi$.




## *Ejercicios resueltos:*

***151.*** *Halla la proyección ortogonal de la recta* $r \equiv \frac{x-5}{2} = \frac{y-3}{5} = \frac{z+7}{-11}$ *sobre el plano de ecuación* $\pi \equiv 2x+y-3z+8=0$.

Solución:

i) Ecuación implícita de $\pi \equiv 2x+y-3z+8=0$

ii) ¿$\pi \perp r$?

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{n_\pi} = (2,1,-3) \\ \overrightarrow{u_r} = (2,5,-11) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{n_\pi}\cdot\overrightarrow{u_r} = (2,1,-3)\cdot(2,5,-11) \neq 0 \Rightarrow \pi \not\perp r$$

i) Plano $\alpha_r \perp \pi$ y tal que $r \subset \alpha_r$

$$\alpha_r \equiv \left\{P_r\left(5,3,-7\right),\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{n_\pi}\right\} \equiv \det\begin{pmatrix} x-5 & 2 & 2 \\ y-3 & 5 & 1 \\ z+7 & -11 & -3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \alpha_r \equiv x+4y+2z-3=0$$

ii) Recta $r'$ (que es la proyección ortogonal que buscamos) intersección de $\pi$ y $\alpha_r$

$$r' \equiv \begin{cases} 2x+y-3z+8=0 \\ x+4y+2z-3=0 \end{cases} \equiv \begin{cases} x=-5+2\lambda \\ y=2-\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

**152.** *Calcula la proyección ortogonal de la recta*

$$r \equiv \frac{x-2}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-2}{-1}$$

*sobre el plano de ecuaciones paramétricas* $\pi \equiv \begin{cases} x=\lambda-\mu \\ y=2-\lambda+3\mu \\ z=3+2\lambda-2\mu \end{cases}$ .

<u>Solución:</u>

i) Ecuación implícita de $\pi$

$$\pi \equiv \det\begin{pmatrix} x & 1 & -1 \\ y-2 & -1 & 3 \\ z-3 & 2 & -2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \pi \equiv 2x-z+3=0$$

ii) $¿\pi \perp r?$

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{n_\pi}=\left(2,0,-1\right) \\ \overrightarrow{u_r}=\left(1,1,-1\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{n_\pi}\cdot\overrightarrow{u_r}=\left(2,0,-1\right)\cdot\left(1,1,-1\right)=2+1=3\neq 0 \Rightarrow \pi \not\perp r$$

iii) Plano $\alpha_r \perp \pi$ y tal que $r \subset \alpha_r$

$$\alpha_r \equiv \left\{P_r\left(2,2,2\right),\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{n_\pi}\right\} \equiv \det\begin{pmatrix} x-2 & 1 & 2 \\ y-2 & 1 & 0 \\ z-2 & -1 & -1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \alpha_r \equiv x+y+2z-8=0$$

iv) Recta $r'$ (que es la proyección ortogonal que buscamos) intersección de $\pi$ y $\alpha_r$

$$r' \equiv \begin{cases} 2x-z+3=0 \\ x+y+2z-8=0 \end{cases} \equiv \begin{cases} x=-\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}\lambda \\ y=\dfrac{19}{2}-\dfrac{5}{2}\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

**153.** *Halla el punto donde se cortan las proyecciones ortogonales de las rectas*

$$r \equiv \begin{cases} x+2y-2=0 \\ x-y+1=0 \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} x=-8+t \\ y=1+t \\ z=-1+t \end{cases}$$

*sobre el plano* $\pi \equiv x-y+z+2=0$.

Solución:
Del enunciado podemos «deducir» que las proyecciones ortogonales que se piden son rectas. De todas formas, vamos a comprobarlo:

$$\det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = (0,0,-3)$$

$\overrightarrow{n_\pi}\cdot\overrightarrow{u_r} = (1,-1,1)\cdot(0,0,-3) = -3 \neq 0 \Rightarrow \pi \not\perp r$

$\overrightarrow{n_\pi}\cdot\overrightarrow{u_s} = (1,-1,1)\cdot(1,1,1) = 1-1+1 = 1 \neq 0 \Rightarrow \pi \not\perp s$

Proyección ortogonal de $r$ sobre $\pi$

i) Ecuación implícita de $\pi$

$\pi \equiv x - y + z + 2 = 0$

ii) $¿\pi \perp r? \Rightarrow \pi \not\perp r$

iii) Plano $\alpha_r \perp \pi$ y tal que $r \subset \alpha_r$

$$\alpha_r \equiv \left\{P_r(0,1,0), \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{n_\pi}\right\} \equiv \det\begin{pmatrix} x & 0 & 1 \\ y-1 & 0 & 1 \\ z & -3 & -11 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \alpha_r \equiv x + y - 1 = 0$$

iv) Recta $r'$ (que es la proyección ortogonal que buscamos) intersección de $\pi$ y $\alpha_r$

$$r' \equiv \begin{cases} x - y + z + 2 = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases}$$

Proyección ortogonal de $s$ sobre $\pi$

i) Ecuación implícita de $\pi \equiv x - y + z + 2 = 0$

ii) $¿\pi \perp s? \Rightarrow \pi \not\perp s$

iii) Plano $\alpha_r \perp \pi$ y tal que $r \subset \alpha_r$

$$\alpha_s \equiv \left\{P_s(-8,1,-1), \overrightarrow{u_s}, \overrightarrow{n_\pi}\right\} \equiv \det\begin{pmatrix} x+8 & 1 & 1 \\ y-1 & 1 & -1 \\ z+1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \alpha_s \equiv x - z + 9 = 0$$

iv) Recta $s'$ (que es la proyección ortogonal que buscamos) intersección de $\pi$ y $\alpha_s$

$$s' \equiv \begin{cases} x - y + z + 2 = 0 \\ x - z + 9 = 0 \end{cases}$$

Punto de corte de $r'$ y $s'$

$$\begin{cases} x - y + z + 2 = 0 \\ x + y - 1 = 0 \\ x - z + 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow (x,y,z) = \left(-\frac{10}{3}, \frac{13}{3}, \frac{17}{3}\right)$$

Las proyecciones ortogonales de $r$ y $s$ se cortan en el punto $P\left(-\frac{10}{3}, \frac{13}{3}, \frac{17}{3}\right)$

# 24. GEOGEBRA

**(1) Geometría 3D 2º Bachillerato**

Autor: Álvaro Fernández y Pablo Triviño
Tema: Vectores 3D (tres dimensiones), Geometría
https://www.geogebra.org/m/rr7qys9m

**(2) Geometria 2º Bachillerato 2020-21**
Autor: Fernando Villarrubia Gahete
Tema: Geometría, Matemática
https://www.geogebra.org/m/bJ9EdNpW

**(3) Geometría en el espacio. 2º Bachillerato Científico**
Autor: Borja Navarro Martínez
Tema: Geometría, Simetría, Simetrías
https://www.geogebra.org/m/nxdztecc

**(4) Videoclips para las Matemáticas II de 2º de Bachillerato**
Realizados por Manuel Sada Allo
http://docentes.educacion.navarra.es/msadaall/geogebra/videoclips2bach/index.htm

## *Ejercicios de Selectividad de repaso*

Junio de 2005, cuarto bloque, A) y B)

Reserva 1 de 2006, cuarto bloque, B), a)

Septiembre de 2007, cuarto bloque, A, b)

Septiembre de 2014, propuesta A, 4)

Septiembre de 2016, propuesta B, 4, b)

Junio de 2019, propuesta B, 4, a)

Septiembre de 2020, 6)

Julio de 2022 4)

Julio de 2023, 4)

Junio de 2024, 3)

Julio de 2024, 3)

Reserva 2 de 2005, cuarto bloque, B)

Reserva 2 de 2006, cuarto bloque, B)

Septiembre de 2009, cuarto bloque, A)

Junio de 2016, propuesta B, 4)

Julio de 2018, propuesta A, 4)

Julio de 2019, propuesta B, 4, b)

Julio de 2021, 4)

Junio de 2023, 3)

Julio de 2023, 6b)

Junio de 2024, 7b)

# Unidad 6:
# LÍMITES

## 1. SUCESIONES

Una **sucesión** de números reales es un conjunto ordenado de infinitos números reales

$$a_1, a_2, ..., a_n, ...$$

siendo $a_n$ el término general. Se representa por $\{a_n\}$ o por $(a_n)$.

Más formalmente, una sucesión es una función

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$
$$n \to f(n) := a_n$$

y así, $f(1) = a_1,\ f(2) = a_2, ...$

**Ejemplos:**

(1) $\{a_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$

$$a_1 = \frac{1}{1} = 1,\ a_2 = \frac{1}{2},\ a_3 = \frac{1}{4},\ ...$$

(2) $\{b_n\} = \{n^2\}$

$$b_1 = 1^2 = 1,\ b_2 = 2^2 = 4,\ b_3 = 3^2 = 9,\ b_4 = 4^2 = 16,\ ...$$

## 2. LÍMITE DE UNA SUCESIÓN

*Intuitivamente*, decimos que el límite de una sucesión $\{x_n\}$ es el número real $L$ si los términos de dicha sucesión se van aproximando a $L$, y escribiremos $\{x_n\} \to L$ o $\lim x_n = L$ o $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L$

Si $x_n \to L$, entonces $x_n \simeq L$ cuando $n$ es suficientemente grande.

**Definición:** El número real $a$ es el **límite de la sucesión** $(a_n)$ de números reales, cuando, para cualquier número positivo $\varepsilon$, podemos encontrar un término de la sucesión $a_{n_0}$ tal que la distancia de los infinitos términos posteriores a $a_{n_0}$ al número $a$ es menor que $\varepsilon$:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \text{ tal que para } n > n_0,\ |a_n - a| < \varepsilon$$

Las **sucesiones** que tienen límite se llaman **convergentes** y las que tienden hacia $\infty$ se llaman **divergentes**.

**Propiedades elementales** de los límites de sucesiones:

Supongamos que $x_n \to x,\ y_n \to y$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces:

a) $x_n + y_n \to x + y$

b) $x_n y_n \to xy$

c) $\alpha + y_n \to \alpha + y$

d) $\alpha y_n \to \alpha y$

e) $x_n - y_n \to x - y$

f) $\dfrac{x_n}{y_n} \to \dfrac{x}{y}$ siempre que $y \neq 0,\ y_n \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

**<u>El número e</u>**

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e, \quad e \in \mathbb{R}-\mathbb{Q} := \mathbb{I} \text{ y } e = 2,7181828...$$

[GeoGebra: comprendiendo el número *e* (Adrián Martín)]

**<u>Límites infinitos</u>**

1) $x_n \to +\infty \Leftrightarrow -x_n \to -\infty$

2) Si $x_n \to \alpha$ e $y_n \to +\infty$, entonces:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha + \infty = +\infty \quad \text{si} \quad \alpha \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \\ \alpha \cdot (+\infty) = \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad 0 < \alpha \leq +\infty \\ -\infty & \text{si} \quad -\infty \leq \alpha < 0 \end{cases} \\ \dfrac{\alpha}{+\infty} = 0 \quad \text{si} \quad \alpha \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \text{Aritmética de } \overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty] = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

Recta real ampliada

3) Los casos $+\infty - \infty,\quad 0 \cdot (\pm\infty),\quad \pm\dfrac{\infty}{\infty}$ son indeterminaciones.

# <u>3. ENTORNOS EN LA RECTA. DISTANCIA</u>

Dado un número real $a$ y un número real positivo $\varepsilon$, se llama **entorno de centro $a$ y radio $\varepsilon$**, al intervalo abierto de extremos $a-\varepsilon,\ a+\varepsilon$:

$$E(a,\varepsilon) = (a-\varepsilon, a+\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} : a-\varepsilon < x < a+\varepsilon\}$$

El número real $a$ es el **límite de una sucesión** $(a_n)$ de números reales, cuando, para cualquier entorno $E(a,\varepsilon)$, podemos encontrar un término de la sucesión $a_{n_0}$ tal que los infinitos términos posteriores a $a_{n_0}$ pertenecen al entorno $E(a,\varepsilon)$:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall E(a,\varepsilon),\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que para } n > n_0,\ \ a_n \in E(a,\varepsilon)$$

Se llama **entorno reducido de centro $a$ y radio $\varepsilon$** al conjunto:

$$E^*(a,\varepsilon) = E(a,\varepsilon) - \{a\}$$

Dado un número $M > 0$ arbitrariamente grande, se llama **entorno de más infinito**, al conjunto:

$$E(+\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > M\}$$

Dado un número $M < 0$, cuyo valor absoluto es arbitrariamente grande, se llama **entorno de menos infinito**, al conjunto:

$$E(-\infty)=\{x\in\mathbb{R}:x<M\}$$

Se denomina **entorno de infinito**, al conjunto:

$$E(\infty)=E(-\infty)\cup E(+\infty)=\{x\in\mathbb{R}:|x|>M\}$$

Se define la **distancia entre los números reales** $x$ e $y$, como: $d(x,y)=|x-y|$

# 4. LÍMITE DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

## *4.1. Definiciones*

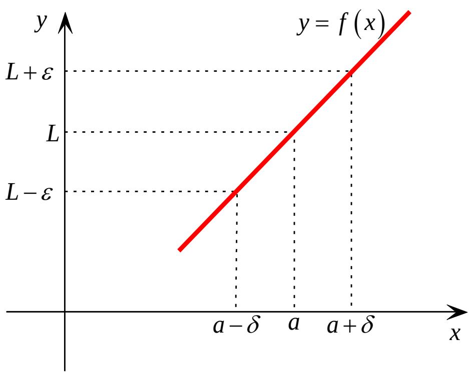
Un punto $a\in D$ es un punto de acumulación de $D\subseteq\mathbb{R}$, y escribiremos $a\in D'$, si $\forall E^*(a)$ se tiene que $E^*(a)\cap D\neq\varnothing$.

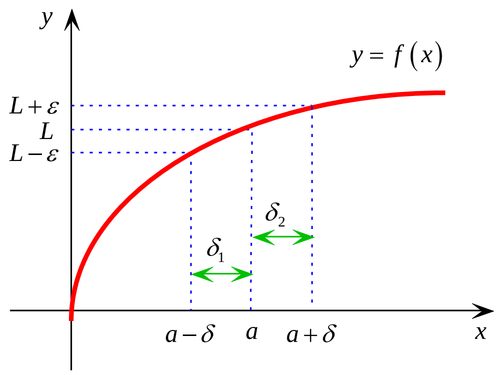
*Criterio práctico*: Siempre que exista un intervalo abierto de centro $a$ contenido en $D$ se tendrá que $a\in D'$.

**Definición intuitiva:** Sea $f:D\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función, $a\in D'$ y $L\in\mathbb{R}$. Diremos que el límite de $f(x)$ cuando $x\to a$ es *L*, y escribiremos $\lim_{x\to a} f(x)=L$, si para valores de *x* cada vez más próximos a *a* (distintos de *a*), los valores de las imágenes $f(x)$ están cada vez más próximas a *L*.

**Definición formal:**

Sea $f:D\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función, $a\in D'$ y $L\in\mathbb{R}$. Diremos que el límite de $f(x)$ cuando $x\to a$ es *L*, y escribiremos $\lim_{x\to a} f(x)=L$, si para cada número real positivo $\varepsilon$, existe un número real positivo $\delta$ (que depende de $\varepsilon$), tal que $|f(x)-L|<\varepsilon$, si $|x-a|<\delta$.




(En general, $\delta_1\neq\delta_2$ y se toma $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$. El que sí es simétrico es el intervalo $(L-\varepsilon,L+\varepsilon)$)

**Límites laterales:**

El límite por la izquierda es el valor al que tiende la función $s$ cuando la variable *x* se aproxima a *a* siendo menor que *a*. Se denota por:

$$\lim_{x\to a-} f(x) \quad \text{o} \quad \lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)$$

El <u>límite por la derecha</u> es el valor al que tiende la función $f(x)$ cuando la variable *x* se aproxima a *a* siendo mayor que *a*. Se denota por:

$$\lim_{x\to a+} f(x) \quad \text{o} \quad \lim_{\substack{x\to a \\ x>a}} f(x)$$

Esto da lugar a la siguiente:

**<u>Caracterización:</u>**

$$\exists \lim_{x\to a} f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \exists \lim\limits_{x\to a-} f(x), \ \exists \lim\limits_{x\to a+} f(x) \\ \lim\limits_{x\to a-} f(x) = \lim\limits_{x\to a+} f(x) \end{cases}$$

En cuyo caso $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a-} f(x) = \lim\limits_{x\to a+} f(x)$

**<u>Propiedades</u>** de los límites:

1) $\lim\limits_{x\to a} k = k$ donde $k \in \mathbb{R}$

   El límite de un número es el propio número.

2) $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)+g(x)\right] = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x)$

   El límite de una suma (resta) es igual a la suma (resta) de los límites.

3) $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\cdot g(x)\right] = \lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$

   El límite de un producto es igual al producto de los límites.

4) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$ siempre que $g(a) \neq 0$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$

   El límite de un cociente es igual al cociente de los límites

5) $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)^{g(x)}\right] = \left[\lim\limits_{x\to a} f(x)\right]^{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$ siempre que $\lim\limits_{x\to a} f(x) > 0$

   El límite de una potencia es igual a la potencia de los límites.

6) $\lim\limits_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$ siempre que $f(x) \geq 0$ y $\lim\limits_{x\to a} f(x) \geq 0$ cuando $n$ sea par.

   El límite de una raíz es la raíz del límite.

7) $\lim\limits_{x\to a}\left[\log_A f(x)\right] = \log_A\left[\lim\limits_{x\to a} f(x)\right]$ siempre que $f(x) > 0$ y $\lim\limits_{x\to a} f(x) > 0$

   El límite de un logaritmo es igual al logaritmo del límite.

## ***<u>Ejercicio:</u>***

***154.*** *Halla, si existe, el límite de las siguientes funciones cuando $x$ tiende a cero:*

*a)* $f(x) = \dfrac{|x| - x}{2}$ *b)* $f(x) = \dfrac{x^2 + |x|}{x}$

### *4.2. Amplicación: cálculo de un límite aplicando la definición*

Demostremos, aplicando la definición de límite, que $\lim_{x \to 3} x^2 = 9$.

Dado $\varepsilon > 0$, tenemos que hallar un $\delta > 0$ tal que, si $|x-3| < \delta$, entonces $|x^2 - 9| < \varepsilon$.
Como un punto próximo a 3 se puede escribir en la forma $x = 3+h$ con $h \neq 0$, se tiene que

$$\left|(3+h)^2 - 9\right| = \left|6h + h^2\right| = |h||6+h| < 7|h|$$

siempre que $|h| < 1$.

Por tanto, tomando $|h| < \frac{\varepsilon}{7} = \delta$ si $\frac{\varepsilon}{7} < 1$ o $|h| = 1 = \delta$ si $\frac{\varepsilon}{7} > 1$, se tiene que $\left|(3+h)^2 - 9\right| < \varepsilon$, y como consecuencia, $\lim_{x \to 3} x^2 = 9$.

# 5. LÍMITES INFINITOS: ASÍNTOTAS VERTICALES

Decir que $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ significa que cuando *x* tiende a *a*, con $x < a$, $f(x)$ toma valores mayores que cualquier número real *k*:

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall k > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que si } |x-a| < \delta \Rightarrow k < f(x)$$

Análogamente, decir que $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ significa que cuando *x* tiende a *a*, con $x < a$, $f(x)$ toma valores cada vez más pequeños:

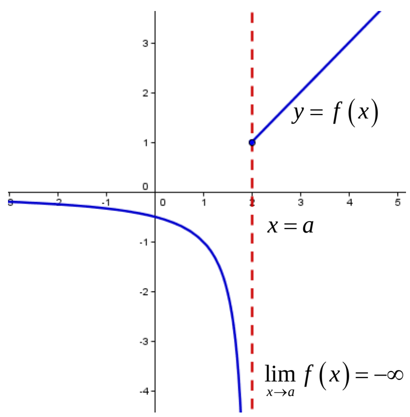
$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall k > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que si } |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) < -k$$

Dada la gráfica de una función, una asíntota es una recta a la cual dicha gráfica se aproxima cada vez más.

Ahora discutiremos de forma mas detallada los distintos tipos de asíntotas de una función.

**Definición:**

La recta $x = a$ es una asíntota vertical de la función $f(x)$ si existe alguno de los siguientes límites: $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ $\quad \lim_{x \to a+} f(x) = \pm\infty$ $\quad \lim_{x \to a-} f(x) = \pm\infty$



**Observaciones:**

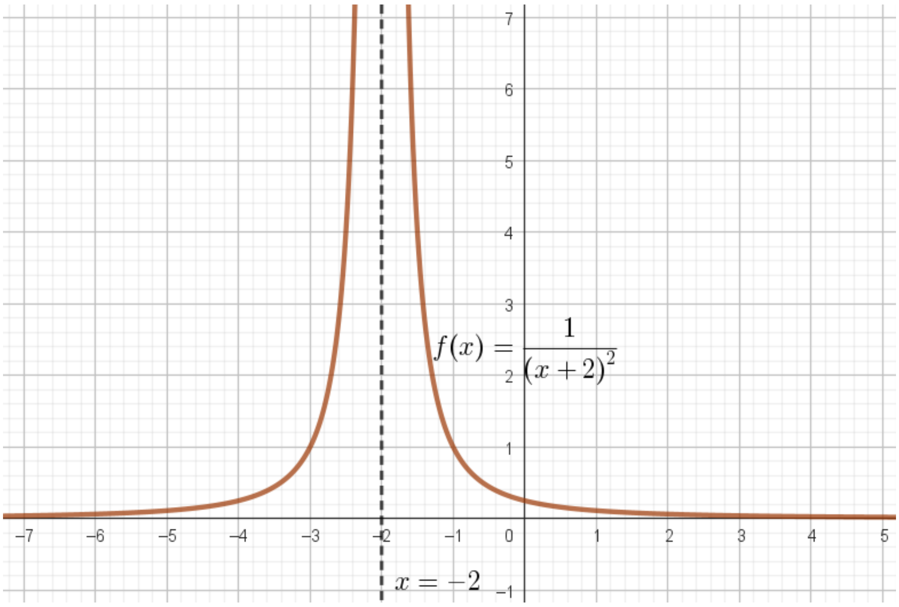
(1) Una función *puede tener infinitas asíntotas verticales*.

(2) En las funciones racionales las asíntotas verticales se hallan en los valores $x$ que anulan al denominador.

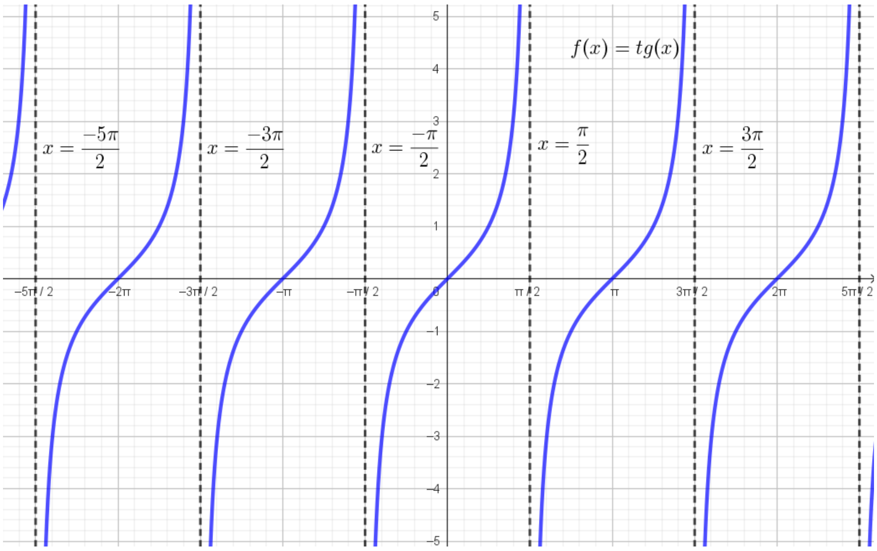
(3) La gráfica de *la función no puede cortar a las asíntotas verticales*.

## Ejemplos:

1) La recta $x=-2$ es una asíntota vertical de la función $f(x)=\dfrac{1}{(x+2)^2}$.




2) La función $f(x)=\operatorname{tg} x$ tiene infinitas asíntotas verticales: $x=\dfrac{\pi}{2}+n\pi$ con $n\in\mathbb{Z}$




# 6. LÍMITES EN EL INFINITO: ASÍNTOTAS HORIZONTALES

Decir que $\lim_{x\to+\infty} f(x)=b$ significa que cuando $x$ se hace tan grande como queramos, la función $f(x)$ toma valores muy próximos a un número fijo $b$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=b \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists k>0 \text{ tal que si } k<x \Rightarrow \left|f(x)-b\right|<\varepsilon$$

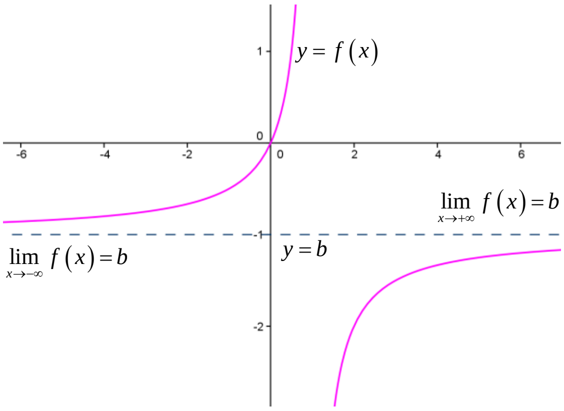
De igual modo, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=b$ significa que $f(x)$ se aproxima a $b$ cuando $x$ se hace cada vez más pequeño:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=b \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists k>0 \text{ tal que si } x<-k \Rightarrow \left|f(x)-b\right|<\varepsilon$$

**Definición:**

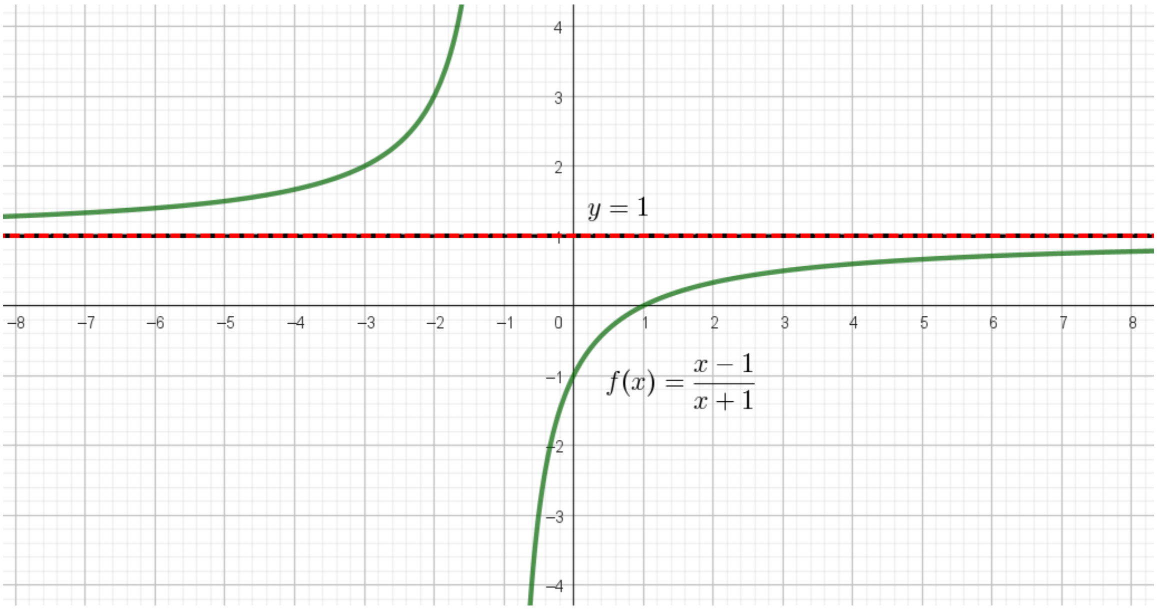
La recta $y = k$ es una <u>asíntota horizontal</u> de $f(x)$ si existe alguno de los siguientes límites:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=k \qquad \text{o} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x)=k$$

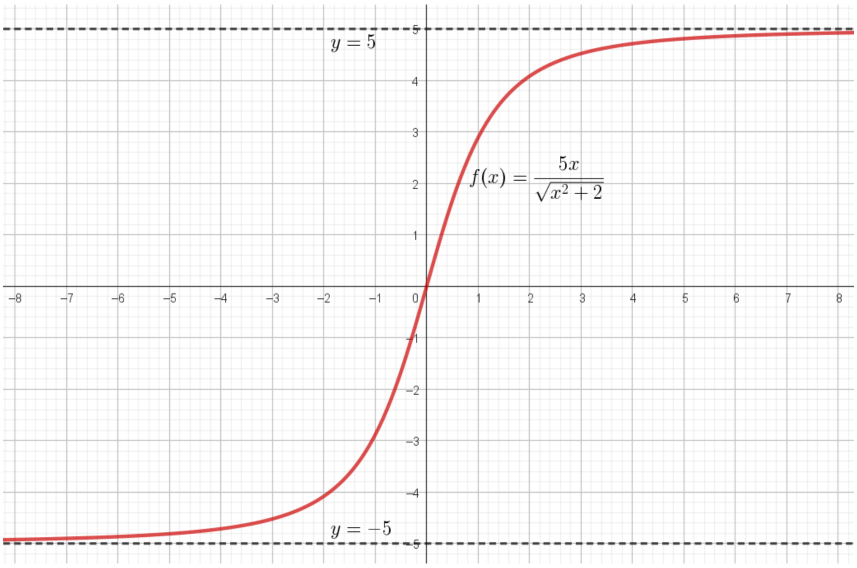



## ***Ejemplos:***

1) La función $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$ tiene una asíntota horizontal, que es la recta $y=1$.




2) La función $f(x)=\dfrac{5x}{\sqrt{x^2+2}}$ tiene dos asíntotas horizontales; las rectas $y=5$ e $y=-5$.




**Observaciones:**

(1) Una función tiene *como máximo dos asíntotas horizontales*.

(2) La gráfica de *la función puede cortar a las asíntotas horizontales*.

(3) Para *funciones racionales*:

- Si en una función racional el grado del numerador es menor que el grado del denominador la recta $y = 0$ (el eje OX) es una asíntota horizontal.
- Si en una función racional el grado del numerador y el del denominador son iguales la recta $y = b$ será una asíntota horizontal (b indica el cociente entre los coeficientes líderes del numerador y del denominador).
- Si en una función racional el grado del numerador es una unidad mayor que el del denominador la función presenta una asíntota oblicua y no hay asíntotas horizontales.
- Si en una función racional el grado del numerador es dos o más unidades, mayor que el del denominador no hay asíntota horizontal.

# 7. LÍMITES INFINITOS EN EL INFINITO: ASÍNTOTAS OBLICUAS

También puede suceder que $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, lo que significa que $x$ y $f(x)$ se hacen infinitamente grandes a la vez. Por tanto:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow f(x) > k$$

para todo $x > p$, siendo $k$ y $p$ números arbitrariamente grandes.

**Definición:**

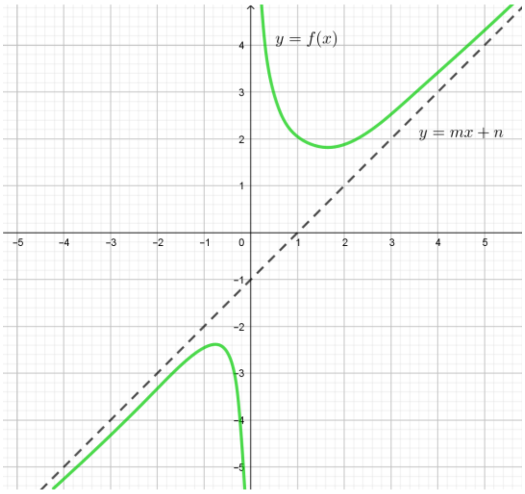
La recta $y = mx + n$, $m \neq 0$, es una asíntota oblicua de $f(x)$ si $\lim_{x\to-\infty}\left(f(x) - mx - n\right) = 0$ o $\lim_{x\to+\infty}\left(f(x) - mx - n\right) = 0$, en cuyo caso $m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ y $n = \lim_{x\to\infty}\left(f(x) - mx\right)$.

**Observaciones:**

(1) Una función puede tener *como máximo dos asíntotas oblicuas*.

(2) La gráfica de *la función puede cortar a las asíntotas oblicuas*.

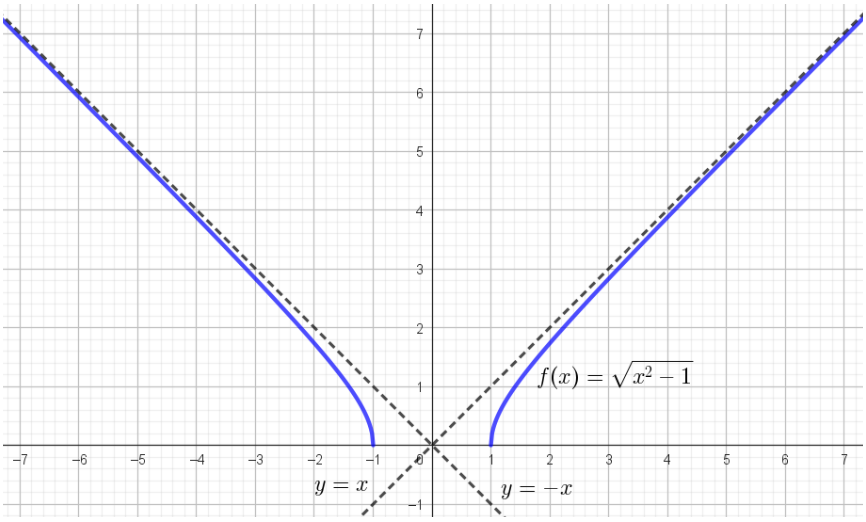
(3) Si en una función racional el grado del numerador es dos o más unidades, mayor que el del denominador, no hay asíntota oblicua.



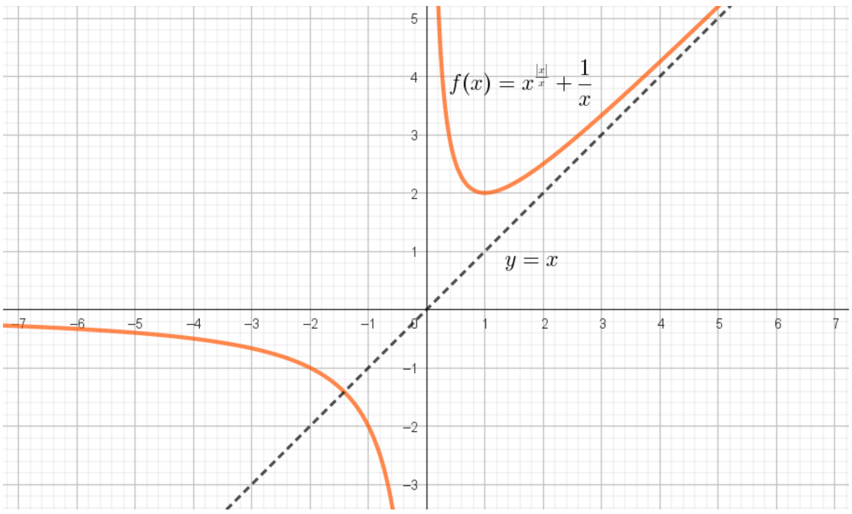

(4) Si $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ es una función racional y $\text{grado}P(x)-\text{grado}Q(x)=1$, entonces la asíntota oblicua $y=mx+n$ de $f(x)$ es el cociente de $P(x)$ entre $Q(x)$.

***Ejemplos:***

1) La función $f(x)=\sqrt{x^2-1}$ tiene dos asíntotas oblicuas, que son las rectas $y=x$ e $y=-x$.




2) La función $f(x)=x^{\frac{|x|}{x}}+\dfrac{1}{x}$ tiene una asíntota oblicua solo, por un lado, que es la recta $y=x$.

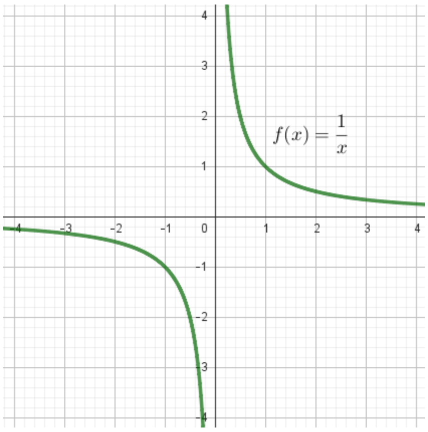


Además, es un ejemplo de función con una asíntota vertical, horizontal y oblicua.

# 8. ALGUNOS LÍMITES IMPORTANTES

Vamos a estudiar algunos límites muy sencillos, pero que aparecen muy a menudo y que por tanto es necesario tenerlos siempre presentes:

(1) $f(x)=\dfrac{1}{x}$

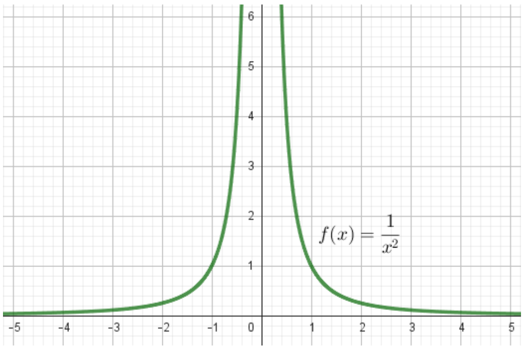



$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to0-}\frac{1}{x}=-\infty\\ \displaystyle\lim_{x\to0+}\frac{1}{x}=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow\nexists\lim_{x\to0}\frac{1}{x}$$

(2) $g(x)=\dfrac{1}{x^2}$

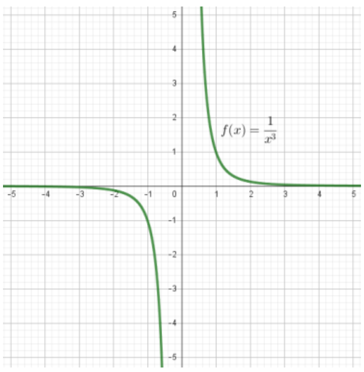



$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$$

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to0-}\frac{1}{x^2}=+\infty\\ \displaystyle\lim_{x\to0+}\frac{1}{x^2}=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow\exists\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}=+\infty$$

(3) $h(x)=\dfrac{1}{x^3}$

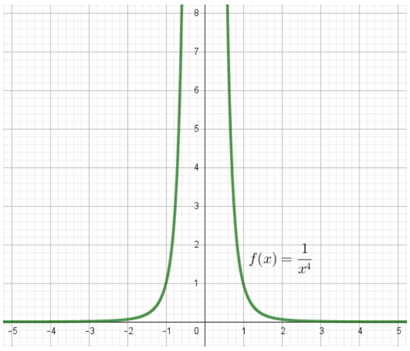



$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^3}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^3}=0$$

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to0-}\frac{1}{x^3}=-\infty\\ \displaystyle\lim_{x\to0+}\frac{1}{x^3}=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow\nexists\lim_{x\to0}\frac{1}{x^3}$$

(4) $i(x)=\dfrac{1}{x^4}$




$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^4}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^4}=0$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{1}{x^4}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{1}{x^4}=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \exists\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^4}=+\infty$$

(5) En general:

Para $n$ impar:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^n}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^n}=0$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{1}{x^n}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{1}{x^n}=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \nexists\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^n}$$

Para $n$ par:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^n}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^n}=0$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{1}{x^n}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{1}{x^n}=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \exists\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^n}=+\infty$$

**Un par de consideraciones** a tener en cuenta al calcular límites:

a) Si $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ es un polinomio, entonces

$$\lim_{x\to\pm\infty}P(x)=\pm\infty$$

y el resultado solo depende del monomio $a_nx^n$.

b) Para límites en el infinito de funciones racionales se tiene la siguiente regla práctica, donde $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ y $Q(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_1x+b_0$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\begin{cases}\pm\infty & \text{si} \quad \text{grado}(P)>\text{grado}(Q)\\ \dfrac{a_n}{b_m} & \text{si} \quad \text{grado}(P)=\text{grado}(Q)\\ 0 & \text{si} \quad \text{grado}(P)<\text{grado}(Q)\end{cases}$$

# 9. INDETERMINACIONES

Cuando al calcular el límite de una suma, un producto, un cociente o una potencia de funciones no se pueden aplicar las propiedades de los límites, es decir, hay que hacer un estudio particular de cada caso, suele decirse que estos límites presentan **una indeterminación**.

Según el profesor R. Payá en esencia solo hay dos tipos de indeterminaciones, $[\infty-\infty]$ y $[0\cdot\infty]$, que aparecen al estudiar el comportamiento de sumas y productos, respectivamente, de funciones. La segunda puede tomar además dos aspectos, $\left[\frac{0}{0}\right]$ y $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, que aparecen al estudiar cocientes, y tres aspectos más, $\left[0^0\right]$, $\left[\infty^0\right]$ y $\left[1^\infty\right]$, que surgen al estudiar potencias. Se considerará además la «indeterminación» del tipo $\left[\frac{k}{0}\right]$ con $k \in \left(\mathbb{R}-\{0\}\right)\cup\{\pm\infty\}$.

**INDETERMINACIÓN DEL TIPO $\frac{k}{0}$ CON $k \in \left(\mathbb{R}-\{0\}\right)\cup\{\pm\infty\}$**

Se calculan los límites laterales: $\lim\limits_{x\to a+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a-} f(x)$

Si existen ambos límites y coincide su valor, entonces:

$$\exists \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a-} f(x)$$

Si no existe alguno de los límites laterales o no coincide su valor, entonces, no existe $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

**INDETERMINACIÓN DEL TIPO $\left[\frac{0}{0}\right]$**

**a) <u>Para funciones racionales</u>**

Se descomponen numerador y denominador en factores y se simplifica.

**b) <u>Para funciones irracionales</u>**

Si se trata de una función con raíces cuadradas en el numerador (o en el denominador), multiplicamos numerador y denominador por la expresión conjugada del numerador (o del denominador).

**INDETERMINACIÓN DEL TIPO $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$**

a) **<u>Para funciones racionales o irracionales</u>**: se divide numerador y denominador por la mayor potencia de $x$ que aparezca en la función (basta con dividir por la mayor potencia de $x$ del denominador).

b) **<u>Para funciones exponenciales</u>**: se divide numerador y denominador por la exponencial correspondiente, ya que cuando $x \to +\infty$, la exponencial crece más rápidamente que cualquier potencia positiva de $x$.

**INDETERMINACIÓN DEL TIPO $\left[\infty-\infty\right]$**

**a) <u>La función es diferencia de dos funciones racionales</u>**

Se efectúa dicha operación.

**b) <u>La función es diferencia de funciones irracionales</u>**

Multiplicamos y dividimos por la expresión conjugada de la función.

**INDETERMINACIÓN DEL TIPO $\left[0\cdot\infty\right]$**

Transformar esta indeterminación en una de las anteriores, generalmente efectuando las operaciones.

**INDETERMINACIÓN DEL TIPO $\left[1^\infty\right]$**

La indeterminación que nos ocupa se resuelve empleando la siguiente igualdad:

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\left[f(x)-1\right]}$$

donde $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Demostración:

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to a}\left[1+f(x)-1\right]^{\frac{1}{f(x)-1}\left[f(x)-1\right]g(x)} = \lim_{x\to a}\left[1+\frac{1}{\frac{1}{f(x)-1}}\right]^{\frac{1}{f(x)-1}\left[f(x)-1\right]g(x)} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)-1\right]g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\left[f(x)-1\right]}$$ C.Q.D.

**INDETERMINACIÓN DEL TIPO** $\left[0^0 \text{ o } \infty^0 \text{ o } 0^\infty\right]$

Estos tipos de indeterminaciones se pueden resolver aplicando la siguiente fórmula:

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\log f(x)}$$

donde $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ y $\log = \ln$.

Demostración:

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} \underset{(1)}{=} e^{\lim\limits_{x\to a}\log\left[f(x)^{g(x)}\right]} \underset{(2)}{=} e^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\log f(x)}$$

donde en (1) hemos usado la definición de la función exponencial $a^b := e^{\log\left(a^b\right)}$, y en (2) la siguiente propiedad de los logaritmos: $\log a^b = b\log a$.

C.Q.D.

***Sugerencia:***

Antes de lanzarnos a la resolución de indeterminaciones hay que analizar el límite que queremos calcular:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}} = \lim_{x\to 0} 1 = 1$$

¿Realmente había que resolver la indeterminación? La respuesta es que no, ya que $\frac{x}{x}=1$ y, por tanto

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{x} = \lim_{x\to 0} 1 = 1$$

¿Qué ha ocurrido? Pues que hemos visto la palabra límite y sin pensarlo hemos sustituido y hemos resuelto la indeterminación.

Otro ejemplo más:

$$\lim_{x\to+\infty} 1^x = \left[1^\infty\right]$$

¿Y ahora nos ponemos a resolver la indeterminación? Si tenemos en cuenta que $1^x = 1$ ya tenemos resuelto el límite que nos pedían:

$$\lim_{x\to+\infty} 1^x = \lim_{x\to+\infty} 1 = 1$$

Por tanto, la ***sugerencia*** es que *antes de empezar a calcular el límite, simplifiques todo lo que puedas la función y después hagas los cálculos necesarios para calcularlo*.

***Ejercicios:***

***155.*** *Calcula los siguientes límites, resolviendo la correspondiente indeterminación, cuando ésta se presente:*

*1)* $\displaystyle\lim_{x\to3}\frac{x+5}{x-3}$

*2)* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2+5}-(x+2)\right]$

*3)* $\displaystyle\lim_{x\to-2}\frac{2x^2-8}{x^2+x-2}$

*4)* $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{3}{\sqrt{x^4-2}}$

*5)* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{-3x^4+2x^2-5}{4x^4-7}$

*6)* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+3}{x^2-1}\right)^{2x}$

***156.*** *Calcula los siguientes límites:*

*1)* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-1}{x^3-1}$

*2)* $\displaystyle\lim_{x\to3+}\frac{x^2+6x-9}{x-3}$

*3)* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-x+6}{x^2+3x+2}$

*4)* $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{2x^2+6x-3}{2x^2+5x}$

*5)* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-1}{x^2+1}$

*6)* $\displaystyle\lim_{x\to1-}\frac{2x^2-x+3}{x^2-5x+4}$

*7)* $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x^3-1}$

*8)* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}\right)$

*9)* $\displaystyle\lim_{x\to-2}\frac{x^2-x+6}{x^3+3x^2+2x}$

*10)* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)$

*11)* $\displaystyle\lim_{x\to2-}\frac{x^2-5x+6}{x^2-4x+4}$

*12)* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x}-\sqrt{2x^2+1}\right)$

*13)* $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x-1}{\sqrt{x-1}}$

*14)* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{5x+1}{5x-1}\right)^{3x+2}$

*15)* $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{2-\sqrt{4-x}}{x}$

*16)* $\displaystyle\lim_{x\to1}\left(\frac{x^3+1}{x^2+1}\right)^{\frac{3}{x-1}}$

*17)* $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$

*18)* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+2x+1}{x^2}\right)^{\frac{x^2+1}{x-1}}$

***157.*** *Calcula los siguientes límites:*

*1)* $\displaystyle\lim_{x\to2}\left(\frac{x^2-4}{x+1}\cdot\frac{x^2+4}{x^2-2x}\right)$

*2)* $\displaystyle\lim_{x\to1}\left(\frac{x+2}{x-1}-\frac{x+5}{x^2-1}\right)$

*3)* $\lim_{x\to 2}(x-1)^{\frac{3}{x-2}}$

*4)* $\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{3x^2-5}{3x^2+x}\right)^{x^2-1}$

*5)* $\lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{4x^2-5}-(2x-3)\right)$

*6)* $\lim_{x\to 2+}\frac{\sqrt{2x-4}}{x-2}$

*7)* $\lim_{x\to 1-}\frac{2x^2-2}{x^2-2x+1}$

*8)* $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{\sqrt{x+3}-3}$

*9)* $\lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}+1}$

*10)* $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2+4}{x+4}\right)^{\frac{x}{x-1}}$

*11)* $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}}$

*12)* $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{\sqrt{x+7}-3}$

**158.** *Calcula los siguientes límites, resolviendo la correspondiente indeterminación, cuando ésta se presente:*

*a)* $\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}$

*b)* $\lim_{x\to 3}\frac{2x^2-4x-6}{3-\sqrt{x+6}}$

*c)* $\lim_{x\to -1}\frac{x^3+3x^2-x-3}{2x^2-2x-4}$

*d)* $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}$

*e)* $\lim_{x\to 2}\frac{-x^2-x+6}{x(x-2)^2}$

*f)* $\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{2x^2+1}{x^2+x}\right)^{\sqrt{x^2+1}-x}$

*g)* $\lim_{x\to 2}\left(\frac{x+2}{x-2}-\frac{6x+4}{x^2-4}\right)$

*h)* $\lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{x}$

*i)* $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x+3}{x-1}\cdot\frac{x^2+x-2}{x^2-3}\right)$

*j)* $\lim_{x\to +\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x}\right)$

*k)* $\lim_{x\to \frac{1}{2}}\left(\frac{2x+1}{2x+2}\right)^{\frac{2x-1}{\sqrt{2x-1}}}$

*l)* $\lim_{x\to -1}\frac{x+\sqrt{x+2}}{x+1}$

*m)* $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x-\sqrt{x}}}$

*n)* $\lim_{x\to 0}\frac{x}{1-\sqrt{x+1}}$

**159.** *Determina, si existen, las asíntotas de cada una de las siguientes funciones:*

*a)* $f(x)=\frac{x}{x^2-1}$

*b)* $g(x)=\frac{x^2}{x+2}$

*c)* $h(x)=\frac{x^2-4}{x^2+4}$

*d)* $i(x)=\frac{2x^3-4x^2}{2x^2-1}$

*e)* $j(x)=\frac{2x^3+3}{x^3-9x}$

*g)* $k(x)=\frac{x^3+x^2-2}{x^2-3x-4}$

*f)* $l(x)=xe^{-x}$

***Ejercicios de Selectividad***

Junio de 2008, primer bloque, A, a)

Reserva 1 de 2011, propuesta B, 1, a)

Reserva 1 de 2013, propuesta B, 1, b)

Junio de 2017, propuesta B, 1, a)

Junio de 2022, 2, b)

Junio de 2023, 6, a)

Julio de 2023, 6, a)

Julio de 2024, 6, a)

# Unidad 7: CONTINUIDAD

## 1. CONCEPTO DE FUNCIÓN CONTINUA

### 1.1. Definiciones

**Definición:**

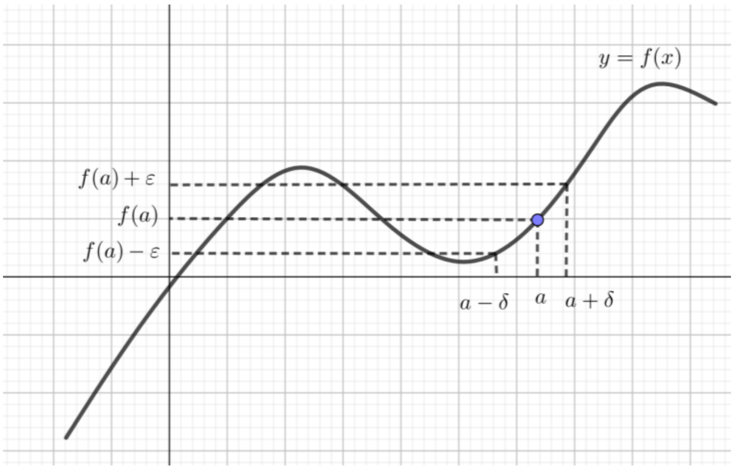
Una función $y = f(x)$, que supondremos definida en un entorno de $a$, es continua en $a$, cuando

$\forall E(f(a))$, $\exists E(a)$ tal que si $x \in E(a) \Rightarrow f(x) \in E(f(a))$ (**definición topológica**)

o equivalentemente:

$f$ continua en $a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ (que depende de $\varepsilon$ y de $a$): si $|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

(**definición métrica** o $\varepsilon - \delta$).




**Definición/Caracterización:**

Si $f$ está definida en un intervalo[6] $A$, se tiene la siguiente caracterización, que también se suele usar como definición:

$f$ es continua en $a \in A \Leftrightarrow \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ (**definición convergente**) (1)

**Aclaraciones:**

- Para que una función sea continua en un punto, ***dicho punto ha de pertenecer a su dominio de definición***. En otro caso, no tiene sentido hablar de continuidad.

  No tiene sentido decir que la función $y = \frac{1}{x}$ no es continua en $x = 0$, por que dicho punto no pertenece a su dominio.

[6] Si $A$ no es un intervalo, entonces hay que exigir que $a \in A \cap A'$ donde $A'$ es el conjunto de puntos de acumulación de $A$. (Se vio un criterio práctico en el apartado 4 de la unidad anterior).

- La condición (1) de continuidad implica:
  - $\exists f(a)$
  - $\exists \lim_{x \to a} f(x)$
  - Dichos valores coinciden: $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Una <u>función</u> es <u>continua</u> cuando lo es en todos los puntos de su dominio de definición.

Una <u>función</u> es <u>continua por la derecha en un punto</u> si existe el límite por la derecha en él y coincide con el valor que toma la función en ese punto:

$$f \text{ continua en } x = a \text{ por la derecha} \Leftrightarrow \lim_{x \to a+} f(x) = f(a)$$

Una <u>función</u> es <u>continua por la izquierda en un punto</u> si existe el límite por la izquierda en él y coincide con el valor que toma la función en ese punto:

$$f \text{ continua en } x = a \text{ por la izquierda} \Leftrightarrow \lim_{x \to a-} f(x) = f(a)$$

**<u>Caracterización:</u>**

Una función es continua en un punto cuando es continua por la izquierda y por la derecha en ese punto:

$$f \text{ es continua en } x = a \Leftrightarrow f \text{ es continua por la izquierda y por la derecha en } x = a$$

**<u>Definición:</u>**

Una <u>función</u> es <u>continua en</u> $[a,b]$ cuando:

(1) Sea continua en el intervalo abierto $(a,b)$

(2) Sea continua por la derecha en $a$

(3) Sea continua por la izquierda en $b$

No suele ser tarea fácil demostrar que una función dada es continua, aunque a nosotros nos lo pueda parecer. Generalmente, lo que se hace es descomponer la función que queremos estudiar en otras más sencillas cuya continuidad ya es conocida previamente. Es por ello interesante saber qué tipo de operaciones realizadas con funciones continuas conducen a nuevas funciones continuas.

## *1.2. <u>Amplicación: estudio de la continuidad usando la definición</u>* $\varepsilon - \delta$

**(1)** La función $f(x) = k$ con $k \in \mathbb{R}$, es continua en $\mathbb{R}$.

Para $a \in \mathbb{R}$ se verifica que $|f(x) - f(a)| = |x - a| = 0 < \varepsilon$ en cualquier entorno de $a$, por lo que la función constante es continua en $\mathbb{R}$.

**(2)** La función $f(x) = x$ es continua en $\mathbb{R}$.

Tomando $\delta = \varepsilon$, para $a \in \mathbb{R}$, si $|x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - f(a)| = |x - a| < \delta = \varepsilon$, es decir, $f$ es continua en $a$, $\forall a \in \mathbb{R}$ y, por tanto, es continua en $\mathbb{R}$.

**(3)** Demostremos la continuidad de la función $f(x) = x^2$ en $x = 3$, usando la definición métrica.

En primer lugar, vamos a demostrar, aplicando la definición de límite, que $\lim_{x\to 3} x^2 = 9$.

Dado $\varepsilon > 0$, tenemos que hallar un $\delta > 0$ tal que, si $|x-3| < \delta$, entonces $|x^2 - 9| < \varepsilon$.
Como un punto próximo a 3 se puede escribir en la forma $x = 3 + h$ con $h \neq 0$, se tiene que

$$\left|(3+h)^2 - 9\right| = |6h + h^2| = |h||6+h| < 7|h|$$

siempre que $|h| < 1$.

Por tanto, tomando $|h| < \frac{\varepsilon}{7} = \delta$ si $\frac{\varepsilon}{7} < 1$ o $|h| = 1 = \delta$ si $\frac{\varepsilon}{7} > 1$, se tiene que $\left|(3+h)^2 - 9\right| < \varepsilon$, y como consecuencia, $f(x) = x^2$ es continua en $x = 3$.

**(4)** Estudiemos la continuidad de la función $f(x) = x^2$ en $a \in \mathbb{R}$. Si $0 < \delta \leq 1$ y $|x-a| < \delta$, entonces,

$$|x^2 - a^2| = |x-a||x+a| = |x-a||x-a+2a| < |x-a|\left(2|x|+1\right)$$

y tomando

$$\delta = \min\left(1, \frac{\varepsilon}{2|a|+1}\right)$$

se tiene que $|x^2 - a^2| < \delta\left(2|x|+1\right) < \varepsilon$, siempre que $|x-a| < \delta$ y, como consecuencia, $f$ es continua en $a \in \mathbb{R}$.

**(5)** Veamos la continuidad de la función $f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$ en $x = 0$.

Sea $\varepsilon > 0$. Como

$$\left|f(x) - f(0)\right| = \left|f(x)\right| \leq x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

y queremos que sea menor que $\varepsilon$, tomamos $\delta = \sqrt{\varepsilon}$. Entonces, $|x-0| < \delta$ implica $x^2 < \delta^2 = \varepsilon$, y así,

$$|x-0| < \delta \Rightarrow \left|f(x) - f(0)\right| < \varepsilon$$

esto es, $f$ es continua en $x = 0$.

## *1.3. <u>Amplicación: continuidad en puntos aislados y en puntos de acumulación</u>*

Se dice que $a \in A \subseteq \mathbb{R}$ es un <u>punto aislado</u>, si $\exists \varepsilon > 0$ tal que $(a-\delta, a+\delta) \cap A = \{a\}$.

Una función $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua en todo punto aislado de $A$.

<u>*Demostración*</u>:
Si $a \in A - A'$ ($a$ es un punto aislado de $A$), $\exists \delta > 0$ (por definición de punto aislado) tal que $(a-\delta, a+\delta) \cap A = \{a\}$, luego dado $\varepsilon > 0$, para cada $x \in A$ con $|x-a| < \delta$, se tiene que $x = a$, y como consecuencia, $\left|f(x) - f(a)\right| = 0 < \varepsilon$. Es decir, $f$ es continua en $a$.

C.Q.D.

Un punto $a \in A$ es un <u>punto de acumulación</u> de $A \subseteq \mathbb{R}$, y escribiremos $a \in A'$, si $\forall E^*(a)$ se tiene que $E^*(a) \cap D \neq \varnothing$.

*Criterio práctico*: siempre que exista un intervalo abierto de centro $a$ contenido en $A$ se tendrá que $a \in A'$.

| |
|---|
| Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función y $a \in A \cap A'$. Son equivalentes:<br>i) $f$ es continua en $a$<br>ii) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ |

*Demostración*:
i) $\Rightarrow$ ii) Basta observar que si $\{x_n\}$ es una sucesión de puntos de $A$ distintos de $a$, con $\{x_n\} \to a$, la continuidad de $f$ en $a$ nos asegura que $\{f(x_n)\} \to f(a)$.
ii) $\Rightarrow$ i) Dado $\varepsilon > 0$, usando (ii) conseguimos un $\delta > 0$ tal que si $x \in A$ y $0 < |x-a| < \delta$, se tiene que $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Ahora bien, si $x = a$, la última desigualdad es obvia, luego dicha desigualdad es cierta para todo $x \in A$ que verifique $|x-a| < \delta$, y como consecuencia tenemos la continuidad de $f$ en $a$.

C.Q.D.

# <u>2. OPERACIONES CON FUNCIONES CONTINUAS</u>

Si $f$ y $g$ son funciones continuas en el punto $a$, entonces:

- **Suma/resta**: $f+g$ y $f-g$ son continuas en $a$

En efecto:

$$\lim_{x \to a}(f \pm g)(x) = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x) = f(a) \pm g(a) = (f \pm g)(a)$$

- **Producto**: $fg$ es continua en $a$

En efecto:

$$\lim_{x \to a}(fg)(x) = \lim_{x \to a}\left[f(x)g(x)\right] = \lim_{x \to a}(x)\lim_{x \to a} g(x) = f(a)g(a) = (fg)(a)$$

- **Cociente**: $\dfrac{f}{g}$ es continua en $a$, siempre que $g(a) \neq 0$

En efecto:

$$\lim_{x \to a}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} = \frac{f(a)}{g(a)} = \left(\frac{f}{g}\right)(a)$$

- **Composición**: Si $f$ es continua en $a$ y $g$ es continua en $b = f(a)$, entonces:

$g \circ f$ es continua en $a$

En efecto:

Dado $\varepsilon > 0$, por la continuidad de $g$ en $f(a)$, existe $\rho > 0$ tal que para todo $y \in \mathrm{Dom}(g)$ con $|y - f(a)| < \rho$ se tiene que $|g(y) - g(f(a))| < \varepsilon$. Ahora, por la continuidad de $f$ en $a$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in \mathrm{Dom}(f)$ con $|x - a| < \delta$ se tiene que $|f(x) - f(a)| < \rho$. Deducimos así que $|g(f(x)) - g(f(a))| < \varepsilon$ para todo $x \in \mathrm{Dom}(f)$ con $|x - a| < \delta$. Es decir, la función compuesta $g \circ f$ es continua en $a$.

# 3. CONTINUIDAD DE LAS FUNCIONES ELEMENTALES

Llamaremos «***funciones elementales***» a las funciones obtenidas al realizar sumas, productos, cocientes y composiciones de logaritmos, exponenciales, potencias y funciones trigonométricas.

- Las **funciones polinómicas**, $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, son continuas en todos los puntos.
- Las **funciones racionales**, $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, son continuas (en su dominio de definición).
- La **función exponencial**, $y = e^{f(x)}$, es continua siempre que lo sea la $f(x)$.
- La **función logarítmica**, $y = \log f(x)$, es continua en todo punto $x$, tal que $f(x) > 0$ y $f(x)$ sea continua.
- Las **funciones trigonométricas**, $y = \operatorname{sen} x$ e $y = \cos x$, son siempre continuas. La función $y = \operatorname{tg} x$ no es continua cuando $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.
- Las **funciones definidas a trozos** serán continuas si lo son en sus intervalos respectivos y en los puntos de unión. En estos puntos habrá que ver que la función esté definida y que los límites laterales existan, sean iguales y coincidan con el valor de la función en dicho punto. ***¡Cuidado con el dominio!***

## *Ejercicios:*

***160.*** *Estudia la continuidad de esta función según los valores de a.*

$$f(x) = \begin{cases} 2x + a & \text{si } x \le 1 \\ x^2 - ax + 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

***161.*** *Calcula a y b para que sea continua la siguiente función:* $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax & \text{si} \quad x \le -1 \\ b & \text{si} \quad -1 < x < 3 \\ 2x + 4 & \text{si} \quad x \ge 3 \end{cases}$

***162.*** *Sea* $f(x) = \begin{cases} -x - 4 & \text{si} \quad x < c \\ -3 & \text{si} \quad c \le x \le 0 \\ x^2 - 10x & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$. *¿Para qué valor de* $c$ *la función* $f(x)$ *es continua en* $x = c$*?*

**163.** *Consideremos la función* $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x} & 0<x<b \\ 1-\dfrac{1}{4}x & b\le x \end{cases}$. *Determinar el valor de b para que sea continua.*

**164.** *Dada la función:*

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+3 & \text{si} \quad x\le -1 \\ bx+a & \text{si} \quad -1<x\le 1 \\ x^2-b & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$$

*Halla a y b para que sea continua en* $\mathbb{R}$.

**165.** *Dada la función:*

$$f(x)=\begin{cases} a-x^2 & \text{si} \quad -2\le x\le 0 \\ e^x-a & \text{si} \quad 0<x\le 2 \end{cases}$$

*Halla el valor de a para que la función sea continua en* $[-2,2]$.

**166.** *Dada la función:* $f(x)=\begin{cases} 2x+5 & \text{si} \quad x\le 1 \\ x^2+k & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$*.Determina k para que* $f(x)$ *sea continua en* $x=1$.

**167.** *Calcula a y b para que* $f(x)$ *sea continua en* $x=0$ *y en* $x=1$*:*

$$f(x)=\begin{cases} e^x+a & \text{si} \quad x\le 0 \\ ax^2+2 & \text{si} \quad 0<x\le 1 \\ \dfrac{b}{2x} & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$$

**168.** *Se considera la función* $f(x)=\begin{cases} \ln x & \text{si} \quad 0<x<1 \\ ax^2+b & \text{si} \quad x\ge 1 \end{cases}$. *Determina los valores de a y b para que* $f(x)$ *sea continua y* $f(2)=3$.

**169.** *Calcula el valor de k para que la función* $f(x)$ *sea continua* $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} & \text{si} \quad x\ne 1 \\ k & \text{si} \quad x=1 \end{cases}$

**170.** *Estudia la continuidad de las siguientes funciones:*

*a)* $f(x)=\begin{cases} |x+2| & \text{si} \quad x<-1 \\ x^2 & \text{si} \quad -1\le x<1 \\ 2x+1 & \text{si} \quad x\ge 1 \end{cases}$

*b)* $g(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x-1}}{x-1} & \text{si} \quad x\neq 1\\ k & \text{si} \quad x=1\end{cases}$

**171.** *Calcula* $a,b\in\mathbb{R}$ *para que la siguiente función sea continua en* $x=0$*:*

$$f(x)=\begin{cases}\log(e+\operatorname{sen} x) & \text{si} \quad x<0\\ x^3+ax+b & \text{si} \quad x\geq 0\end{cases}$$

donde $\log$ es el logaritmo natural.

## Ejercicios de selectividad

Reserva 1 de 2003, segundo bloque, A)

Junio de 2005, primer bloque, A)

Reserva 1 de 2011, propuesta A, 1)

Septiembre de 2017, propuesta A, 2, a)

# 4. DISCONTINUIDADES: CLASIFICACIÓN

El ***criterio adoptado por la UCLM en la EvAU*** es el siguiente:

Una función es discontinua en un punto cuando falla alguna de las tres condiciones de la definición (convergente) de función continua en un punto.

**Clasificación de las discontinuidades:**

Si una función $y=f(x)$ presenta una discontinuidad en $a$ ésta puede ser:

**i)** **Evitable**

Diremos que $f$ presenta una **discontinuidad evitable** cuando

$$\begin{cases}\nexists f(a) \text{ pero } \lim\limits_{x\to a} f(x)\in\mathbb{R}\\ \text{o}\\ \lim\limits_{x\to a} f(x)\neq f(a)\end{cases}$$

**ii)** **No evitable**

ii-1) **De primera especie**

Diremos que $f$ presenta una **discontinuidad de salto** (finito o infinito) cuando $\nexists \lim\limits_{x\to a} f(x)$ ($\exists \lim\limits_{x\to a-} f(x)=L,\ \exists \lim\limits_{x\to a+} f(x)=L'$ y $L\neq L'$):

***Finito***, si $L,L'\in\mathbb{R}$. En este caso el salto es $|L-L'|$.

***Infinito***, si $\begin{cases}L=\pm\infty\\ L'\in\mathbb{R}\end{cases}$ o $\begin{cases}L\in\mathbb{R}\\ L'=\pm\infty\end{cases}$.

Diremos que $f$ tiene una **discontinuidad asintótica** en $a$ cuando $\nexists \lim\limits_{x\to a} f(x)$ porque los límites laterales son infinitos y distintos o $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\pm\infty$.

ii-2) **De segunda especie**

Diremos que $f$ presenta una **discontinuidad de segunda especie o esencial**, cuando al menos uno de los límites laterales no exista.

$$\text{Función}\begin{cases} \text{Continua} \\ \text{Discontinua}\begin{cases} \text{Evitable} \\ \text{No evitable}\begin{cases} \text{De primera especie}\begin{cases} \text{De salto}\begin{cases} \text{Finito} \\ \text{Infinito} \end{cases} \\ \text{Asintótica} \end{cases} \\ \text{De segunda especie} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

***<u>Ejemplos:</u>***

(1) La función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\begin{cases} x & \text{si} \quad x\neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x=0 \end{cases}$ tiene una discontinuidad evitable en $x=0$, ya que

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1}\left(x^2+1\right) = 2 \neq -1 = f(-1).$$

El valor verdadero de $f$ en $x=0$ es $f(0)=0$.

(2) La función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & \text{si} \quad x\neq -1 \\ -1 & \text{si} \quad x=-1 \end{cases}$ tiene una discontinuidad evitable en $x=-1$, ya que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} x = 0 \neq 1 = f(1)$.

El valor verdadero de $f$ en $x=-1$ es $f(-1)=2$.

(3) La función «signo de $x$», $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\begin{cases} 1 & \text{si} \quad x>0 \\ 0 & \text{si} \quad x=0 \\ -1 & \text{si} \quad x<0 \end{cases}$ tiene una discontinuidad de salto finito en $x=0$, ya que $\lim\limits_{x\to 0-} f(x) = -1 \neq 1 = \lim\limits_{x\to 0+} f(x)$.

(4) La función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\begin{cases} 1 & \text{si} \quad x>0 \\ 0 & \text{si} \quad x=0 \\ -1 & \text{si} \quad x<0 \end{cases}$ tiene una discontinuidad de salto finito en $x=0$, ya que $\lim\limits_{x\to 0-} f(x) = -1 \neq 1 = \lim\limits_{x\to 0+} f(x)$.

(5) La función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x>0 \\ 0 & \text{si} \quad x=0 \\ -1 & \text{si} \quad x<0 \end{cases}$ tiene una discontinuidad de salto infinito en $x=0$, ya que $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to 0-} f(x) = -1$.

(6) La función $f(x)=\frac{1}{x^2}$ tiene una discontinuidad asintótica en $x=0$, ya que

$$\lim_{x\to 0-} f(x)=+\infty=\lim_{x\to 0+} f(x)$$

(7) La función $f(x)=\frac{1}{x}$ tiene una discontinuidad asintótica en $x=0$, ya que

$$\lim_{x\to 0-} f(x)=-\infty \ \text{ y } \lim_{x\to 0+} f(x)=+\infty$$

(8) La función $f(x)=\sqrt{x^2-1}$ (cuyo dominio es $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$) tiene discontinuidades de segunda especie en $x=-1$ y, en $x=1$, ya que:

$$\lim_{x\to -1}\sqrt{x^2-1}\begin{cases}\lim\limits_{x\to -1-}\sqrt{x^2-1}\\ \nexists \lim\limits_{x\to -1+}\sqrt{x^2-1}\end{cases} \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 1}\sqrt{x^2-1}\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1+}\sqrt{x^2-1}\\ \nexists \lim\limits_{x\to 1-}\sqrt{x^2-1}\end{cases}$$

(9) La función $f(x)=\operatorname{sen}\frac{1}{x}$ tiene una discontinuidad esencial en $x=0$, ya que los límites laterales no existen.

## ***Ejercicios de selectividad***

Julio de 2019, propuesta A, 1, a)

Septiembre de 2020, 3, b)

Junio de 2021, 7, b)

Julio de 2021, 5, b)

Julio de 2022, 2, a)

Modelo 1 de 2024, 4, a)

Julio de 2024, 2, a)

# 5. TEOREMA DE BOLZANO Y DE WEIERSTRASS

**Teorema de Bolzano[7] o Teorema de los ceros de Bolzano:**

Si $f(x)$ es una función continua en $[a,b]$ y en los extremos del intervalo toma valores de signo contrario, entonces $\exists c\in\,]a,b[\,: f(c)=0$.

Demostración:

Sea $A=\{x\in[a,b]: f(x)<0\}$. Como $a\in A$, se tiene que $A\neq\varnothing$ y además está acotado superiormente por $b$, luego tiene supremo:

$$\sup A:=c$$

que verifica: $a\le c\le b$

Por otra parte, en todo intervalo de la forma $(c-\varepsilon,\varepsilon)$, $\varepsilon>0$, tiene que haber puntos en los que $f$ tome valores negativos, pues en caso contrario $c$ no podría ser el supremo de $A$.

[7] *Bernhard Bolzano*: Filósofo, lógico y matemático checo nacido en Praga. Después de ordenarse sacerdote enseñó filosofía y religión en la Universidad, aunque, en 1820, acusado de racionalista, se le expulsó. El teorema que ahora nos ocupa es de 1817, y como la mayoría de sus resultados fueron redescubiertos a finales del S. XIX.

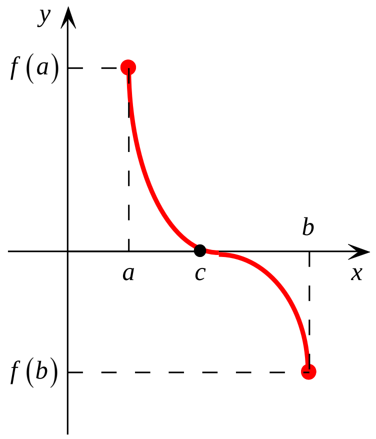
Falta demostrar que $f(c)=0$.

Supongamos que $f(c)<0$. Entonces, existirá un entorno de $c$, en el que $f$ tomará valores negativos, lo cual implicará la existencia de puntos a la derecha de $c$ en los que $f$ sería negativa !! (contradicción), ya que $c$ es el supremo de $A$.
Análogamente, si $f(c)>0$.

Por tanto, $f(c)=0$

C.Q.D.

**<u>Interpretación geométrica</u>**: Si $f(a)>0$ y $f(b)<0$, y se debe dibujar una curva desde el punto $(a, f(a))$ al punto $(b, f(b))$ sin levantar el lápiz del papel, dicha curva debe cortar, al menos una vez, al eje OX.




***<u>Ejemplos:</u>***

**1.** Demostrar que la ecuación $e^{-x}+2=x$ tiene al menos una solución real.

La función $f(x)=e^{-x}+2-x$ es continua en $\mathbb{R}$, por ser suma de funciones continuas, y en particular es continua en $[0,3]$. Como además $f(0)=3>0$ y $f(3)<0$, aplicando el Teorema de Bolzano, $\exists c\in(0,3): f(c)=0$, esto es, $\exists c\in(0,3): e^{-c}+2-x=0$ (es decir, $c$ es una solución real de la ecuación inicial).

**2.** Demostrar que existe al menos un número real $x$ tal que $\operatorname{sen} x = x$.

Consideramos la función $f(x)=\operatorname{sen} x - x$ que es continua en $\mathbb{R}$, por ser suma de funciones continuas, y en particular es continua en $[-\pi,\pi]$. Como además $f(-\pi)=\pi>0$ y $f(\pi)=-\pi<0$, aplicando el Teorema de Bolzano, $\exists c\in(-\pi,\pi): f(c)=0$, esto es, $\exists c\in(-\pi,\pi): \operatorname{sen}(c)-c=0$ (es decir, $c$ es una solución real de la ecuación inicial). Como consecuencia, $\exists x\in(-\pi,\pi)$ (que es $c$) tal que $\operatorname{sen} x = x$.

**3.** Como aplicación del Teorema de Bolzano prueba que las funciones $f(x)=\log x$ y $g(x)=e^{-x}$ se cortan en un punto.

Consideramos la función $h(x)=f(x)-g(x)=\log x-e^{-x}$ que es continua en $\mathbb{R}^{+}$, por ser diferencia de funciones continuas, y en particular es continua en $[1,2]$. Como además $f(1)<0$ y $f(2)>0$, aplicando el Teorema de Bolzano, $\exists c\in(1,2):h(c)=0$, esto es, $(c,h(c))$ es el punto de corte de ambas funciones.

**4.** ¿Se puede asegurar, utilizando el teorema de Bolzano, que la función $f(x)=\operatorname{tg} x$ tiene una raíz en el intervalo $\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$?

Aunque $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=1>0$ y $f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=-1<0$, como $f(x)=\operatorname{tg} x$ no es continua en $\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$, no podemos usar el teorema de Bolzano.

**5.** ¿Tiene la ecuación $x^5-3x=1$ alguna solución comprendida entre 1 y 2?
Consideramos la función $f(x)=x^5-3x-1$ que es continua en $\mathbb{R}$, por una función polinómica, y en particular es continua en $[1,2]$. Como además $f(1)=-3<0$ y $f(2)=25>0$, aplicando el Teorema de Bolzano, $\exists c\in(1,2): f(c)=0$, esto es, la ecuación dada tiene una solución en el intervalo pedido.

## ***Ejercicios de selectividad***

Reresva 1 de 2006, primer bloque, A)

Reserva 1 de 2007, primer bloque, A)

Junio de 2009, primer bloque, B)

Junio de 2010, propuesta A, 1A).

Junio de 2013, propuesta A, 1, a) y b)

Septiembre de 2017, propuesta A, 2, b)

Julio de 2022, 6, b)

**Teorema de Weierstrass:**

Si $f(x)$ es una función continua en $[a,b]$, entonces

$$\exists c,d\in[a,b]: f(c)\le f(x)\le f(d)\qquad \forall x\in[a,b].$$

Demostración:

Sea $B=\{f(x):x\in[a,b]\}$. Se tiene que $B\neq\varnothing$ y acotado superiormente, luego $\sup B=\alpha$.
Vamos a probar que existe al menos un punto $d\in[a,b]$ tal que $f(d)=\alpha$.
Supongamos que $\nexists d\in[a,b]$ tal que $f(d)=\alpha$, es decir, $\forall x\in[a,b]$ se tiene que $f(x)\neq d$. En esta situación consideramos la función $g(x)=\dfrac{1}{\alpha-f(x)}$, que es continua en $[a,b]$, ya que es cociente de funciones continuas y el denominador no se anula.
Ahora bien, como $\alpha=\sup\{f(x):x\in[a,b]\}$, existen números de $f(x)$ tan próximos a $\alpha$ como se quiera, lo que implica que $\alpha-f(x)$ se puede acercar a cero tanto como se quiera, por lo que

$\dfrac{1}{\alpha - f(x)}$ se puede hacer más grande que cualquier número, lo que implica que $g$ no está acotada superiormente en $[a,b]$, en contradicción con el hecho de al ser $g$ continua, $g$ está acotada en $[a,b]$

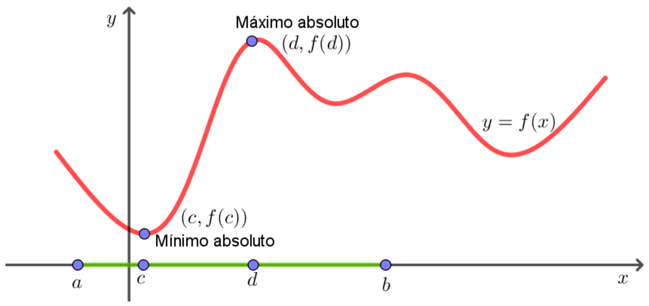
Por tanto, $\exists d \in [a,b]$ tal que $f(d)=\alpha$, es decir, $f(d)$ es el máximo valor de $f$ en $[a,b]$.

De forma análoga se demuestra que $\exists c \in [a,b]$ tal que $f(c)=f(x) \quad \forall x \in [a,b]$.

C.Q.D.

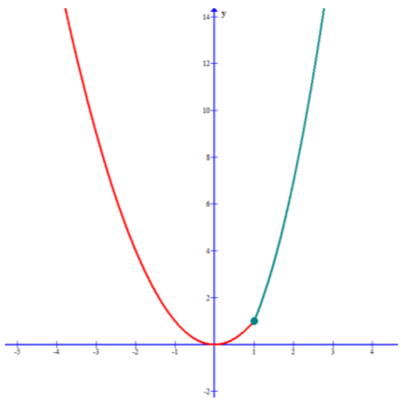
**Reformulación del Teorema de Weierstrass:**

Una función continua en un intervalo cerrado $[a,b]$ alcanza su valor máximo y su valor mínimo en dicho intervalo.

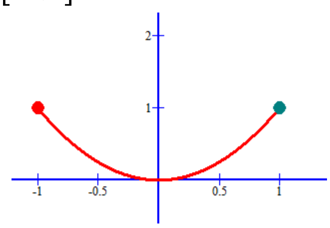



## Ejemplos:

**1.** Consideramos la función $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x<1 \\ 2x^2-2 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$ y la representamos gráficamente:



Teniendo en cuenta la representación gráfica, $f$ es continua en $\mathbb{R}$ (se puede comprobar analíticamente) y, por tanto, lo es en cualquier intervalo cerrado que consideremos, por ejemplo, en $[-1,1]$.



El teorema de Weiertrass afirma que $f$ tiene, al menos un máximo y un mínimo absolutos en dicho intervalo.

En nuestro caso, tiene:

Máximos absolutos: $(-1,1)$ y $(1,1)$

Mínimo absoluto: $(0,0)$

**2.** La función $f(x)=\dfrac{\operatorname{sen}(x^2)}{x}$ es continua en $\mathbb{R}-\{0\}$, luego verifica el teorema de Weierstrass en cualquier intervalo cerrado que no contenga al cero. Por ejemplo, en $[1,2]$.

Como consecuencia del teorema de Weierstrass, la función $f(x)=\dfrac{\operatorname{sen}(x^2)}{x}$ tiene, al menos, un máximo y un mínimo absolutos en el intervalo $[1,2]$.

***<u>Aclaración:</u>***
Hay que observar que dicho teorema nos dice que dichos extremos absolutos existen, pero no nos dice nada de dónde están.

# Unidad 8:
# DERIVADAS Y APLICACIONES

## 1. TASA DE VARIACIÓN

Muchas leyes de la Física, la Química, la Biología o la Economía, son funciones que relacionan una variable «dependiente» $y$ con otra variable «independiente» $x$, lo que suele escribirse en la forma $y = f(x)$. Si la variable independiente cambia de un valor inicial $a$ a otro $x$, la variable $y$ lo hace de $f(a)$ a $f(x)$. La *razón de cambio promedio (o tasa de variación media) de* $y = f(x)$ *con respecto a x en el intervalo* $[a, x]$ *es:*

$$\text{Razón de cambio promedio } = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \equiv \text{Tvm}[a, x]$$

Con frecuencia interesa considerar la razón de cambio en intervalos cada vez más pequeños. Esto lleva a definir lo que podemos llamar «*razón de cambio puntual* (*o instantánea*) de $y = f(x)$ *con respecto a x en el punto a» como:*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \equiv \text{Tvi}(a)$$

## 2. CONCEPTO DE DERIVADA

### *2.1. Derivada de una función en un punto*

**Definición:**

Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función y $a \in A \cap A'$. Entonces

$$f \text{ es derivable en } x = a \Leftrightarrow \exists \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \in \mathbb{R}$$

o equivalentemente, si

$$\exists \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \in \mathbb{R}$$

en cuyo dicho límite, caso de existir, se representa[8] por:

$$f'(a) = \frac{df(a)}{dx} = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=a}$$

$f'(a)$ se lee $f$ prima en $a$ (derivada de $f$ en $a$)

[8] La notación $\frac{d}{dx} f(a)$ fue introducida por Leibniz (1646-1716), y en ella se entiende que $\frac{d}{dx}$ es un operador, mientras que la notación $f'(a)$ fue introducida por Lagrange (1736-1813) y la notación $\dot{f}(a)$ se suele usar en física, ingeniería…

$\dfrac{df(a)}{dx}$ se lee derivada de $f$ respecto de $x$ en $a$

***Ejemplos:***

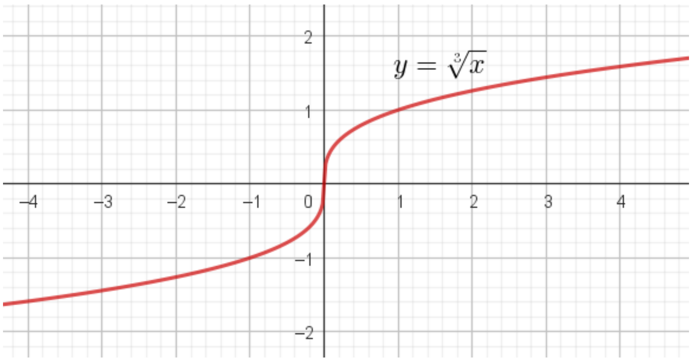
**(1)** Calculamos la derivada de $f(x)=x^2-5x$ en $x=3$:

$$f'(3)=\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(3+h)^2-5(3+h)-(9-15)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2+h}{h}=\lim_{h\to 0}(h+1)=1$$

**(2)** Calculamos la derivada de $g(x)=\sqrt[3]{x}$ en $x=0$:

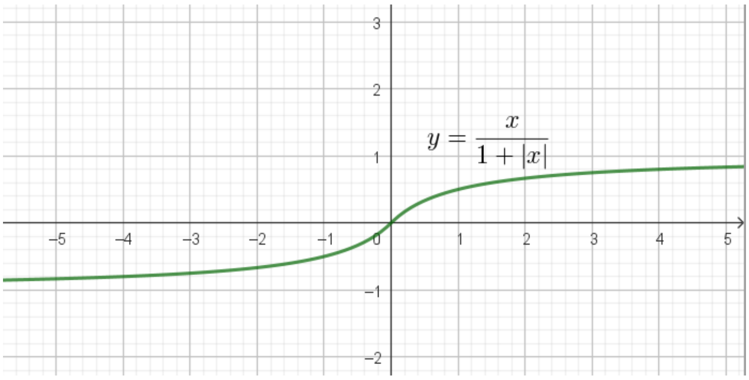
$$g'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{g(0+h)-g(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{h}-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{h^2}}=\left[\frac{1}{0^+}\right]=+\infty$$

es decir, $\nexists g'(0)$ y, por tanto, $g$ no es derivable en $x=0$.




**(3)** Calculamos $f'(0)$ para $f(x)=\dfrac{x}{1+|x|}$:

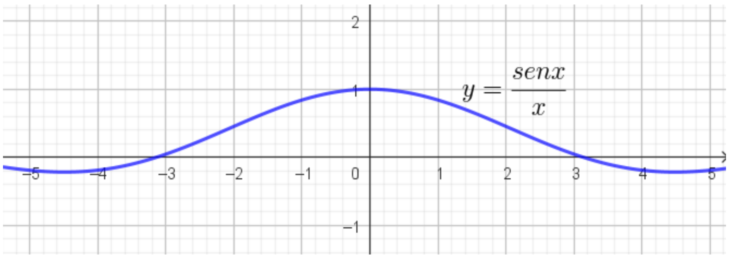
$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{1+|h|}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{1+|h|}=1$$




**(4)** Calculamos $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ para $f(x)=\cos x$:

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(\frac{\pi}{2}+h\right)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+h\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(h)-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{sen}(h)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\text{sen}(h)}{h}=1$$




## 2.2. Derivadas laterales

**Definición:**

$f$ derivable por la izquierda en $x = a \Leftrightarrow \exists f'(a-)=\lim_{x\to a-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\in\mathbb{R}$

$f$ derivable por la derecha en $x = a \Leftrightarrow \exists f'(a+)=\lim_{x\to a+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\in\mathbb{R}$

**Caracterización:**

$f$ es derivable en $x = a \Leftrightarrow \exists f'(a-), f'(a+)$ y $f'(a-)=f'(a+)$

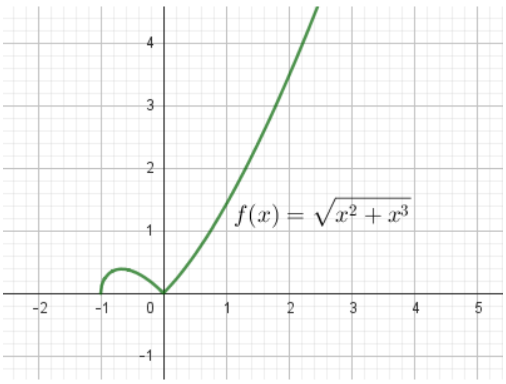
## Ejemplos:

**(1)** Estudiamos la derivabilidad de la función $f(x)=\sqrt{x^2+x^3}$ en $a=0$:

$$f_+'(0)=\lim_{h\to 0+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{\sqrt{h^2+h^3}}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{\sqrt{h^2(1+h)}}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{\cancel{h}\sqrt{1+h}}{\cancel{h}}=\lim_{h\to 0+}\sqrt{1+h}=1$$

$$f_-'(0)=\lim_{h\to 0-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{\sqrt{h^2+h^3}}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{\sqrt{h^2(1+h)}}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{|h|\sqrt{1+h}}{h}=-1$$

Por tanto, $f$ no es derivable en $a=0$.




**(2)** Estudiamos la derivabilidad de $f(x)=x-1+|4-x^2|$ en $a=-2$:

En primer lugar, escribimos la función, como una función definida a trozos:

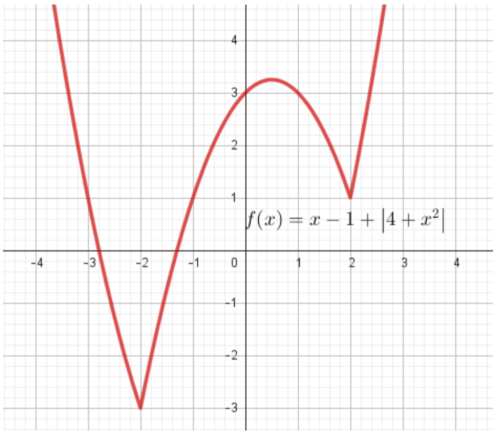
$$f(x)=x-1+|4-x^2|=\begin{cases}x-1+4-x^2 & \text{si } |x|\le 2\\ x-1-4+x^2 & \text{si } |x|>2\end{cases}=\begin{cases}-x^2+x+3 & \text{si } |x|\le 2\\ x^2+x-5 & \text{si } |x|>2\end{cases}$$

Ahora, calculamos las derivadas laterales:

$$f_+'(-2)=\lim_{h\to 0+}\frac{f(-2+h)-f(-2)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{(-2+h)^2+(-2+h)-5+3}{h}=\lim_{h\to 0+}(h-3)=-3$$

$$f_-'(-2)=\lim_{h\to 0-}\frac{f(-2+h)-f(-2)}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{-(-2+h)^2+(-2+h)+3+5}{h}=\lim_{h\to 0-}(-h+5h)=5$$

Como consecuencia, $f$ no es derivable en $a=-2$.




**(3)** Estudiamos la derivabilidad de $f(x)=x^2|x|$ en $a=0$:

Escribimos la función en forma de función definida a trozos:

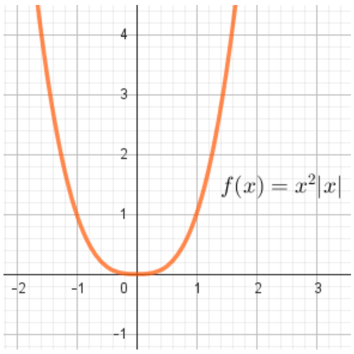
$$f(x)=x^2|x|=\begin{cases}-x^3 & \text{si} \quad x\le 0\\ x^3 & \text{si} \quad x>0\end{cases}$$

Ahora, estudiamos la derivabilidad lateral:

$$f_+'(0)=\lim_{h\to 0+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{h^3}{h}=\lim_{h\to 0+}h^2=0$$

$$f_-'(0)=\lim_{h\to 0-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{-h^3}{h}=\lim_{h\to 0-}\left(-h^2\right)=0$$

Por tanto, $f$ es derivable en $a=0$ y $f'(0)=0$




**(4)** Estudiamos la derivabilidad de $f(x)=\sqrt{x}$ en $a=0$:

$$f_+'(0)=\lim_{h\to 0+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{h^{1/2}}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{1}{h^{1/2}}=+\infty$$

Como consecuencia, $f$ no es derivable en $a=0$.

**(5)** Estudiamos la derivabilidad en $x=0$ de la siguiente función: $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & \text{si} \quad x\le 0 \\ e^x & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$

Calculamos las derivadas laterales:

- Derivada por la izquierda: $f'(x-)=-2x \Rightarrow f'(0-)=0$
- Derivada por la derecha: $f'(x+)=e^x \Rightarrow f'(0+)=e^0=1$

Existen las derivadas laterales en $x=0$ pero no son iguales y, por tanto, $f$ no es derivable en $x=0$.

## *2.3. <u>Función derivada</u>*

**<u>Definición:</u>**

Si $B\subseteq D$, diremos que $f$ <u>es derivable en</u> $B$ cuando $f$ sea derivable en todos los puntos de $B$.

Sea $C=\{a\in D: f \text{ es derivable en } a\}$. Definimos la <u>función derivada de</u> $f$ por:

$$f':C\to\mathbb{R}$$
$$a\in C\mapsto f'(a)$$

## *<u>Ejemplos:</u>*

(1) Calculamos $f'(x)$ $f(x)=x^2-8x+9$:

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\left[(a+h)^2-8(a+h)+9\right]-\left[a^2-8a+9\right]}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{a^2+2ah+h^2-8a-8h+9-a^2+8a-9}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2ah+h^2-8h}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}(2a+h-8)}{\cancel{h}}=2a-8 \quad \forall a\in\mathbb{R}\Rightarrow f'(x)=2x-8$$

(2) Calculamos $f'(x)$ para $f(x)=x^3-x$

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\left[(a+h)^3-(a+h)\right]-\left[x^3-x\right]}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{a^3+3a^2h+3ah^2+h^3-h}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}\left(3a^2+3ah+h^2-1\right)}{\cancel{h}}=3a^2-1 \quad \forall a\in\mathbb{R}\Rightarrow f'(x)=3x^2-1$$

(3) Calculamos $f'(x)$ para $f(x)=\dfrac{1-x}{2+x}$

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{1-(a+h)}{2+(a+h)}-\dfrac{1-a}{2+a}}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(1-a-h)(2+a)-(1-x)(2+x+h)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\left(2-a-2h-a^2-ah\right)-\left(2-a+h-a^2-ah\right)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-3h}{h(2+a+h)(2+a)}=-\frac{3}{(2+a)^2}\qquad \forall a\in\mathbb{R}\Rightarrow f'(x)=-\frac{3}{(2+x)^2}$$

## 2.4. Derivabilidad y continuidad

**Propiedad 1: condición necesaria de derivabilidad**

Si una función $f:D\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es derivable en un punto $a$, entonces es continua en $a$.

Demostración:

Si $f$ es derivable en $a$, de la igualdad

$$f(x)=f(a)+(x-a)\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\qquad (x\neq a)$$

se sigue que $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$, es decir, $f$ es continua en $a$.

C.Q.D.

***El recíproco es falso:***

**Contraejemplo**: La función $f(x)=|x|$ es continua en $x_0=0$ pero no es derivable en dicho punto.

Continuidad en $x_0=0$:

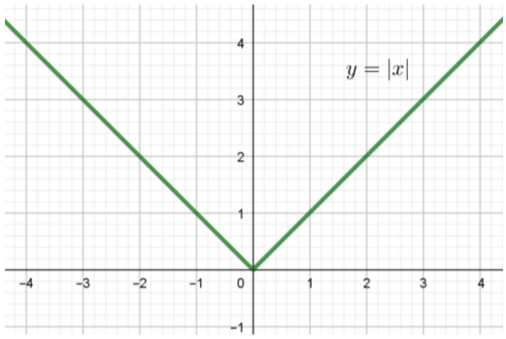
$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0-}|x|=\lim\limits_{x\to 0-}(-x)=0\\ \lim\limits_{x\to 0+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0+}|x|=\lim\limits_{x\to 0+}x=0\end{array}\right\}\Rightarrow \exists\lim_{x\to 0}|x|=0$$

y $f(0)=|0|=0$, luego $f(x)$ es continua en $x_0=0$.

Derivabilidad en $x_0=0$:

$$\left.\begin{array}{l}f'(0-)=\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{-x}{x}=-1\\ f'(0+)=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{x}{x}=1\end{array}\right\}\Rightarrow$$

no existe $f'(0)$ y, por tanto, $y=|x|$ no es derivable en $x_0=0$.




*Resumiendo:*

- *f* es continua en 0
- *f* no es derivable en 0
- La gráfica de *f* no tiene recta tangente en 0

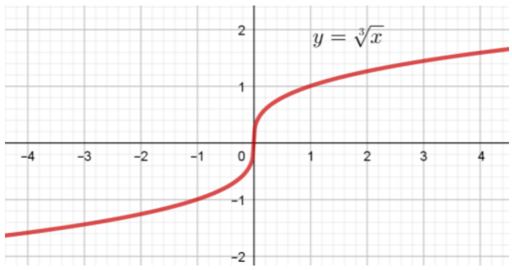
**<u>Otro contraejemplo más</u>**: La función $y=\sqrt[3]{x}=x^{1/3}$ es continua en $x_0=0$ pero no es derivable en dicho punto.

Continuidad en $x_0=0$:

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} x^{1/3}=0=f(0)$, luego $f(x)$ es continua en $x_0=0$.

Derivabilidad en $x_0=0$:

$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^{1/3}-0}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^{2/3}}=\left[\dfrac{1}{0}\right]=+\infty \Rightarrow \nexists f'(0)$, y, por tanto, $y=x^{1/3}$ no es derivable en $x_0=0$.




*Resumiendo:*

- $f$ es continua en 0
- $f$ no es derivable en 0
- La gráfica de $f$ tiene una recta tangente vertical en 0

Este resultado también se puede utilizar en *sentido negativo*:

**<u>Propiedad 1':</u>**

Si $f$ no es continua en $a$, entonces no puede ser derivable en dicho punto.

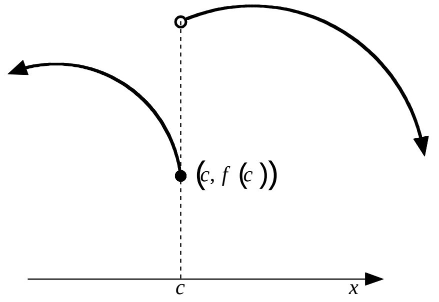
Como consecuencia, *siempre que nos pidan estudiar la derivabilidad de una función, comenzaremos por estudiar su continuidad.*

**<u>Resumen:</u>**

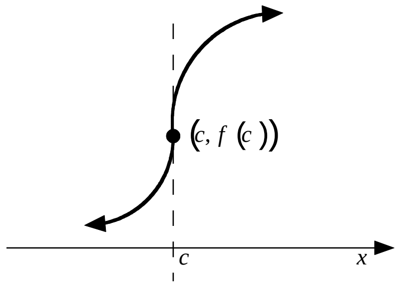
$$\boxed{f \text{ derivable en } x_0 \Rightarrow f \text{ continua en } x_0}$$

$$\boxed{f \text{ NO continua en } x_0 \Rightarrow f \text{ NO derivable en } x_0}$$

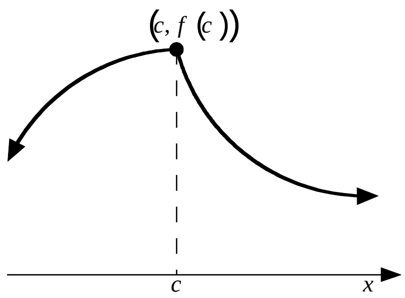
Gráficamente las *<u>situaciones en las que una función no es derivable</u>* en un punto son:




$f$ no es continua en $c \Rightarrow$
$f$ no es derivable en $c$




$f$ es continua en $c$, pero la gráfica de $f$ tiene una recta tangente vertical en c $\Rightarrow$ $f$ no es derivable en $c$




$f$ es continua en $c$, pero la gráfica de $f$ no tiene recta tangente en c (ya que tiene un pico) $\Rightarrow$ $f$ no es derivable en $c$

Los puntos en los que la gráfica de la función tiene picos se denominan **puntos angulosos**, y en ellos, se verifica:

$$f'(x_0-) \neq f'(x_0+)$$

## *2.5. Operaciones con funciones derivables*

**Suma**

La función derivada de una suma de funciones derivables es la suma de las funciones derivadas:

$$\boxed{(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)}$$

*Demostración:*

$$(f+g)'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{(f+g)(x+h)-(f+g)(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+g(x+h)-f(x)-g(x)}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = f'(x)+g'(x)$$

**Producto por un número real**

La función derivada del producto de una constante por una función derivable es la constante por la función derivada de la función:

$$\boxed{(\alpha f)'(x) = \alpha \cdot f'(x)}$$

*Demostración:*

$$(\alpha f)'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{(\alpha f)(x+h)-(\alpha f)(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\alpha f(x+h)-\alpha f(x)}{h} =$$
$$= \alpha \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \alpha f'(x)$$

**Producto de funciones**

La función derivada de un producto de funciones derivables es igual a la derivada del primer factor por el segundo sin derivar más el primer factor si derivar por la derivada del segundo factor:

$$\boxed{(f\cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)}$$

*Demostración:*

$$(f\cdot g)'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{(f\cdot g)(x+h)-(f\cdot g)(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\lim_{h\to 0} g(x+h) + \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\lim_{h\to 0} f(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

**Función recíproca de una función**

La derivada de la función recíproca de una función derivable viene dada por:

$$\boxed{\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = \frac{-f'(x)}{f(x)^2}}$$

*Demostración:*

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\left(\frac{1}{f}\right)(x+h)-\left(\frac{1}{f}\right)(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{f(x+h)}-\frac{1}{f(x)}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x)-f(x+h)}{f(x+h)f(x)}}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x)-f(x+h)}{h\big(f(x)f(x+h)\big)} = \lim_{h\to 0}\frac{-\big(f(x+h)-f(x)\big)}{h}\frac{1}{f(x+h)f(x)}$$
$$= -f'(x)\frac{1}{f(x)f(x)} = \frac{-f'(x)}{f(x)^2}$$

**Cociente de funciones**

La función derivada de un cociente de funciones derivables es igual al cociente de la derivada del numerador por el denominador sin derivar menos el numerador sin derivar por la derivada del denominador, entre el denominador al cuadrado:

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)'(x)=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}}$$

*Demostración:*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x)=\left(f\,\frac{1}{g}\right)'(x)=f'(x)\frac{1}{g}(x)+f(x)\frac{-g(x)}{g(x)^2}=\frac{f'(x)}{g(x)}-\frac{f(x)g'(x)}{g(x)^2}=$$

$$=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

**Composición de funciones: regla de la cadena**

Sean $f:A\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y $g:B\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ funciones reales de variable real con $f(A)\subseteq B$. Supongamos que *f* es derivable en *a* y que *g* es derivable en $b=f(a)$. Entonces:

$$\boxed{(g\circ f)'(a)=g'\big(f(a)\big)f'(a)}$$

*Demostración:*

Sea $h=g\circ f$. Hay que probar que $\lim\limits_{x\to a}\frac{h(x)-h(a)}{x-a}=g'(b)f'(a)$.

Por hipótesis,

$$\lim_{y\to b}\frac{g(y)-g(b)}{y-b}\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=g'(b)f'(a)$$

La idea es hacer en esta igualdad la sustitución $y=f(x)$. Definimos

$$\varphi:B\to\mathbb{R}$$

$$\varphi(y)=\begin{cases}\dfrac{g(y)-g(b)}{y-b} & y\neq b\\ g'(b) & y=b\end{cases}$$

que es una función continua.

Se tiene que $\forall x\in A$ con $x\neq a$

$$\frac{h(x)-h(a)}{x-a}=\varphi\big(f(x)\big)\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\qquad [1]$$

y como $f$ es continua en $a$ y $\varphi$ es continua en $b=f(a)$, se sigue que $\varphi\circ f$ es continua en $a$, por lo que

$$\lim_{x\to a}\varphi\big(f(x)\big)=\varphi\big(f(a)\big)=\varphi(b)=g'(b)$$

La igualdad [1] nos dice ahora que

$$\lim_{x\to a}\frac{h(x)-h(a)}{x-a}=g'(b)f'(a)\qquad \text{C.Q.D.}$$

# 3. TABLAS DE DERIVADAS

A modo de ejemplo calcularemos las funciones derivadas de algunas funciones elementales. A la vez que practicamos el cálculo de derivadas aplicando la definición, también nos sirve para construir la conocida tabla de derivadas y que esta no aparezca como por arte de magia.

1) La función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=c$ es derivable en cualquier punto $a\in\mathbb{R}$. Su derivada viene dada por:

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{c-c}{x-a}=0$$

2) La función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x$ es derivable en cualquier punto $a\in\mathbb{R}$ y su derivada es:

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{x-a}{x-a}=1$$

3) La función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^n$ es derivable en cualquier punto $a\in\mathbb{R}$. Para calcular su función derivada utilizaremos la fórmula del binomio de Newton:

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(a+h)^n-a^n}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{\binom{n}{0}a^nh^0}+\binom{n}{1}a^{n-1}h+\ldots+\binom{n}{n-1}ah^{n-1}+\binom{n}{n}a^0h^n-\cancel{a^n}}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{na^{n-1}h+\binom{n}{2}a^{n-2}h^2+\ldots+\binom{n}{n-1}ah^{n-1}+\binom{n}{n}ah^n}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}\left[na^{n-1}+\binom{n}{2}a^{n-2}h+\ldots+\binom{n}{n-1}ah^{n-2}+\binom{n}{n}ah^{n-1}\right]}{\cancel{h}}=na^{n-1}$$

4) La función $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{x}$, es derivable en cualquier $a\in(0,+\infty)$. Su derivada es:

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)}{(x-a)\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{\left(\sqrt{x}\right)^2-\left(\sqrt{a}\right)^2}{(x-a)\left(\sqrt{x}-\sqrt{a}\right)}=\lim_{x\to a}\frac{\cancel{(x-a)}}{\cancel{(x-a)}\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)}=\lim_{x\to a}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}=\frac{1}{2\sqrt{a}}$$

5) La función exponencial $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=e^x$, es derivable en cualquier $a\in\mathbb{R}$.

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^{a+h}-e^a}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^a\left(e^h-1\right)}{h}=e^a$$

teniendo en cuenta que

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1 \qquad [*]$$

Vamos a demostrar [*]:

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=\begin{bmatrix} e^h-1=t\Rightarrow h=\log(1+t) \\ h\to 0\Rightarrow t\to 0\end{bmatrix}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\log(1+t)}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\frac{1}{t}\log(1+t)}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\log(1+t)^{1/t}}=\frac{1}{\log\left[\lim_{t\to 0}(1+t)^{1/t}\right]}=\frac{1}{\log e}=\frac{1}{1}=1$$

ya que

$$\lim_{t\to 0}(1+t)^{1/t}=\left[1^{\infty}\right]=e^{\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(1+t-1)}=e^{\lim_{t\to 0}1}=e$$

6) La función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\operatorname{sen} x,$ es derivable en cualquier $a\in\mathbb{R}$.

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(a+h)-\operatorname{sen} a}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2\cos\left(a+\frac{h}{2}\right)\operatorname{sen}\frac{h}{2}}{h}=\cos a$$

donde hemos tenido en cuenta que

$$\operatorname{sen} x-\operatorname{sen} y=2\cos\frac{x+y}{2}\operatorname{sen}\frac{x-y}{2}$$

y que

$$\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}=1$$

7) La función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\cos x,$ es derivable en cualquier $a\in\mathbb{R}$. Su función derivada se puede obtener teniendo en cuenta que $\cos x=\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\quad\forall x\in\mathbb{R}$ y aplicando la regla de la cadena:

$$f'(a)=-\cos a$$

8) La función $\begin{array}{l}\operatorname{tg}:\mathbb{R}-\left\{k\pi+\frac{\pi}{2}:k\in\mathbb{Z}\right\}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto \operatorname{tg} x\end{array}$ es derivable en cualquier punto de su dominio y su derivada viene dada por:

$$\operatorname{tg}' x=\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)'(x)=\frac{\cos x\cos x-\operatorname{sen} x(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}=$$

$$=1+\operatorname{tg}^2 x=\sec^2 x$$

9) La función $\begin{array}{c}\log_a:(0,+\infty)\to\mathbb{R}\\ x\mapsto\log_a x\end{array}$ es derivable en cualquier $x_0\in(0,+\infty)$. Su función derivada viene dada por:

$$f'(x_0)=\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\log_a(x_0+h)-\log_a x_0}{h}=$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{\log_a\frac{x_0+h}{x_0}}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\log_a\left(1+\frac{h}{x_0}\right)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\frac{x_0}{x_0}\log_a\left(1+\frac{h}{x_0}\right)=$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{1}{x_0}\log_a\left(1+\frac{h}{x_0}\right)^{\frac{x_0}{h}}=\frac{1}{x_0}\log_a\left(\lim_{h\to0}\left(1+\frac{h}{x_0}\right)^{\frac{x_0}{h}}\right)=$$

$$=\frac{1}{x_0}\log_a\left(\lim_{h\to0}\left(1+\frac{1}{\frac{x_0}{h}}\right)^{\frac{x_0}{h}}\right)=\frac{1}{x_0}\log_a e$$

En particular la función $\begin{array}{c}\log:(0,+\infty)\to\mathbb{R}\\ x\mapsto\log x\equiv\ln x\end{array}$ es derivable en cualquier $x_0\in(0,+\infty)$, y su derivada viene dada por: $\ln' x=\frac{1}{x}$

10) La función $\begin{array}{c}\operatorname{arcsen}:[-1,1]\to\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\\ x\mapsto\operatorname{arcsen}x\end{array}$ es derivable en cualquier $x_0\in(-1,1)$, y como $y=\operatorname{arcsen}x$ equivale a que $x=\operatorname{sen}y$, derivando esta última igualdad (aplicando la regla de la cadena):

$$1=y'\cdot\cos y\Rightarrow y'=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

11) La función $\begin{array}{c}\arccos:[-1,1]\to[0,\pi]\\ x\mapsto\arccos x\end{array}$ es derivable en cualquier $x_0\in(-1,1)$, y como $y=\arccos x$ equivale a que $x=\cos y$, derivando esta última igualdad (aplicando la regla de la cadena):

$$-1=y'\cdot\operatorname{sen}y\Rightarrow y'=\frac{-1}{\operatorname{sen}y}=\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}}=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

12) La función $\begin{array}{c}\operatorname{arctg}:\mathbb{R}\to\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\\ x\mapsto\operatorname{arctg}x\end{array}$ es derivable en cualquier $x_0\in\mathbb{R}$, y como $y=\operatorname{arctg}x$ equivale a que $x=\operatorname{tg}y$, derivando esta última igualdad (aplicando la regla de la cadena):

$$1=\left(1+\operatorname{tg}^2 y\right)\cdot y \Rightarrow y'=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y}=\frac{1}{1+x^2}$$

## Tabla de derivadas (de funciones simples)

| **Función** | **Derivada** |
|---|---|
| $y=c\in\mathbb{R}$ | $y'=0$ |
| $y=x$ | $y'=1$ |
| $y=x^n$ | $y'=nx^{n-1}$ |
| $y=\sqrt{x}$ | $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ |
| $y=\sqrt[n]{x}$ | $y'=\dfrac{1}{n\cdot\sqrt[n]{x^{n-1}}}$ |
| $y=a^x$ con $a>0$ | $y'=a^x\ln a$ |
| $y=e^x$ | $y'=e^x$ |
| $y=\log_a x$ | $y'=\dfrac{1}{x}\log_a e$ |
| $y=\log x\equiv\ln x$ | $y'=\dfrac{1}{x}$ |
| $y=\operatorname{sen} x$ | $y=\cos x$ |
| $y=\cos x$ | $y'=-\operatorname{sen} x$ |
| $y=\operatorname{tg} x$ | $y'=1+\operatorname{tg}^2 x=\sec^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$ |
| $y=\operatorname{arcsen} x$ | $y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| $y=\arccos x$ | $y'=\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| $y=\operatorname{arctg} x$ | $y'=\dfrac{1}{1+x^2}$ |

***<u>Ejemplo de aplicación:</u>***

Vamos a calcular $\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen }x}{x}$:

Consideramos $f(x)=\text{sen }x$. Se tiene que:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen }x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=\cos 0=1$$

## <u>Ejercicio:</u>

**172.** *Calcula la derivada de las siguientes funciones:*

*1)* $f(x)=7x^5-2x^3+3x^2-4$

*2)* $f(x)=5x^4+3x^2+2x-7$

*3)* $f(x)=(3x-1)(5x^2+3x-2)$

*4)* $f(x)=\dfrac{4x^2+1}{7x+1}$

*5)* $f(x)=x-\dfrac{1}{x}+\sqrt[3]{x}$

*6)* $f(x)=(x-\sqrt{x})(x+\sqrt{x})$

*7)* $f(x)=\dfrac{(3x-1)(2x+3)}{x^2+7}$

*8)* $f(x)=(5x^2-3x+1)\dfrac{2x}{5x+3}$

*9)* $f(x)=\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt[5]{x^3}+\sqrt{x^5}$

*10)* $f(x)=\dfrac{(3x-1)^2-(3x+1)^2}{2-x^2}$

*11)* $f(x)=\dfrac{1}{3x^2-5x+2}$

*12)* $f(x)=\dfrac{1}{5x-3}(3x^2-x+2)$

*13)* $f(x)=(x^2+3x)\text{ sen }x$

*14)* $f(x)=3^x$

*15)* $f(x)=\dfrac{x\text{ tg }x}{x+1}$

*16)* $f(x)=\dfrac{(x^2-3x+2)\text{ sen }x}{1+\text{tg }x}$

*17)* $f(x)=\text{tg }x\text{ sen }x$

*18)* $f(x)=\cos x\text{ tg }x$

*19)* $f(x)=e^x\text{ tg }x$

*20)* $f(x)=2^x\ln x$

*21)* $f(x)=e^x\log_{10}x$

*22)* $f(x)=\log_5 x\ \cos x$

*23)* $f(x)=\dfrac{\text{sen }x}{\text{tg }x}$

*24)* $f(x)=\dfrac{2^x}{\ln x}$

*25)* $f(x)=\dfrac{x^2}{\ln x}$

*26)* $f(x)=\text{sen }x\cos x$

*27)* $f(x)=\text{sen }x+e^x\text{ sen }x$

*28)* $f(x)=\dfrac{\cos x}{\text{sen }x+\cos x}$

*29)* $f(x)=\dfrac{3^x\text{ sen }x}{2x+e^x}$

*30)* $f(x)=\log_5 x\ \log_7 x$

*31)* $f(x)=e^x\text{ sen }x$

*32)* $f(x)=5^x$

Aplicando la regla de la cadena, obtenemos la siguiente tabla de derivadas para funciones compuestas:

## Tabla de derivadas, para funciones compuestas

| Función | Derivada |
|---|---|
| $y=f(x)^n$ | $y'=n\cdot f(x)^{n-1}\cdot f'(x)$ |
| $y=\sqrt{f(x)}$ | $y'=\dfrac{f'(x)}{2\cdot\sqrt{f(x)}}$ |
| $y=\sqrt[n]{f(x)}$ | $y'=\dfrac{f'(x)}{n\cdot\sqrt[n]{f(x)^{n-1}}}$ |
| $y=a^{f(x)}$ con $a>0$ | $y'=f'(x)\cdot a^{f(x)}\cdot\ln a$ |
| $y=e^{f(x)}$ | $y'=f'(x)\cdot e^{f(x)}$ |
| $y=\log_a f(x)$ | $y'=\dfrac{f'(x)}{f(x)}\cdot\log_a e$ |
| $y=\ln f(x)$ | $y'=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ |
| $y=\operatorname{sen} f(x)$ | $y'=f'(x)\cdot\cos f(x)$ |
| $y=\cos f(x)$ | $y'=-f'(x)\cdot\operatorname{sen} f(x)$ |
| $y=\operatorname{tg} f(x)$ | $y'=f'(x)\cdot\left[1+\operatorname{tg}^2 f(x)\right]$ |
| $y=\operatorname{arcsen} f(x)$ | $y'=\dfrac{f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}}$ |
| $y=\arccos f(x)$ | $y'=\dfrac{-f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}}$ |
| $y=\operatorname{arctg} f(x)$ | $y'=\dfrac{f'(x)}{1+f(x)^2}$ |

## ***Ejercicios:***

**173.** *Calcula la derivada de las siguientes funciones:*

1) $f(x)=\operatorname{sen}\left(2x^2-3x\right)$
2) $f(x)=\ln(3x+1)$
3) $f(x)=e^{5x}$
4) $f(x)=\operatorname{tg}\ (2-3x)$
5) $f(x)=\left(x^2-5x+2\right)^7$

13) $f(x)=\left(x^2+1\right)^5$
14) $f(x)=\operatorname{sen}^3 x$
15) $f(x)=\operatorname{sen}\left(x^3\right)$
16) $f(x)=\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x$
17) $f(x)=\dfrac{\operatorname{sen}\ (5x+2)}{\cos\ (3x-1)}$

6) $f(x)=e^{\operatorname{sen} x}$
7) $f(x)=3^{1+\operatorname{sen} x+\cos x}$
8) $f(x)=\log_7(4+\operatorname{sen} x)$
9) $f(x)=\operatorname{sen}^2 x$
10) $f(x)=\operatorname{tg}^3 x$
11) $f(x)=3^{x^2+2}\operatorname{sen} x$
12) $f(x)=\left(3x^2-2\right)\operatorname{sen}(5x)$
18) $f(x)=e^{\operatorname{sen} x}\cos x$
19) $f(x)=\log_5(3x+1)$
20) $f(x)=\ln(\operatorname{tg} x)$
21) $f(x)=\operatorname{sen}(\cos(3x))$
22) $f(x)=\sqrt{5x^2-3x+2}$
23) $f(x)=\sqrt[3]{\left(3-2x^2\right)^2}$
24) $f(x)=\sqrt[4]{x^2-3x+1}$

**174.** Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

1) $y=\dfrac{x^2-3}{x^2+3}$
2) $y=\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{2}{3}}$
3) $y=\dfrac{\ln x}{x}$
4) $y=3^x+1$
5) $y=\sqrt[3]{(5x-3)^2}$
6) $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$
7) $y=\sqrt[3]{3x^2}$
8) $y=\dfrac{2}{x}+\dfrac{x^2}{2}$
9) $y=7e^{-x}$
10) $y=\operatorname{sen} x\cdot\cos x$
11) $y=\dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$
12) $y=\ln\left(x^2+1\right)$
13) $y=\left(2\cdot\sqrt{x}-3\right)^7$
14) $y=\operatorname{sen}^2 x$
15) $y=\operatorname{sen} x^2$
16) $y=\operatorname{arctg}\left(x^2+1\right)$
17) $y=\log_2\left(\log\dfrac{1}{x}\right)$
18) $y=\log_2\sqrt{x}$
19) $y=\operatorname{sen}^2 x^2$
20) $y=\cos^5\left(7x^2\right)$
21) $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$
22) $y=\ln(2x-1)$
23) $y=\operatorname{arcsen}\dfrac{x^2}{3}$
24) $y=\operatorname{tg}\dfrac{x^2}{2}$
25) $y=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{3}$
26) $y=\sqrt{\operatorname{tg} x}$

**175.** Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y=\ln\left(x^2-1\right)$
b) $y=\arccos\sqrt{2x}$
i) $y=2^{x^2-\frac{1}{x}}$

c) $y = \ln\sqrt{1-x}$

d) $y = e^{4x}$

e) $y = (\operatorname{arctg} x)^2$

f) $y = \log_3(7x+2)$

g) $y = \ln\left(\operatorname{tg}\frac{3}{x}\right)$

h) $y = \ln\left(\ln\frac{1}{x}\right)$

j) $y = \operatorname{arcsen}\frac{x+1}{x-1}$

k) $y = \sqrt{\operatorname{tg} x^2}$

l) $y = \sqrt[3]{\frac{x-2}{x+2}}$

m) $y = \operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

n) $y = 5\cdot\operatorname{tg}^3(3x^2+1)$

**Ejercicio curioso:**

Obtención de la regla de derivación de un producto (regla de Leibniz), a partir de la derivada de la función logarítmica:

Sabemos que $\log(fg) = \log(f) + \log(g)$. Derivando, resulta:

$$[\log(fg)]' = (\log f)' + (\log g)' \Rightarrow \frac{(fg)'}{fg} = \frac{f'}{f} + \frac{g'}{g}$$

y multiplicando por $fg$ se obtiene:

$$(fg)' = g\cdot f' + f\cdot g' = f'\cdot g + f\cdot g'$$

***<u>Ejemplo:</u>***

Calcula el valor de los parámetros $a,b\in\mathbb{R}$, para que la siguiente función sea derivable en $x=1$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{a+bx^2}{2} & \text{si} \quad 0\le x\le 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$$

Cada una de las funciones componentes es continua y derivable en su dominio, por ser una función polinómica y una función racinal bien definida.

Estudiamos la continuidad en $x=1$: ¿$\lim_{x\to1} f(x) = f(1)$?

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to1-} f(x) = \lim_{x\to1-}\dfrac{a+bx^2}{2} = \dfrac{a+b}{2} \\ \lim_{x\to1+} f(x) = \lim_{x\to1+}\dfrac{1}{x} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{a+b}{2} = 1 \text{ para que } f(x) \text{ sea continua en } x=1.$$

Estudiamos ahora la derivabilidad en $x=1$: ¿$\exists f'(1)$?

$$\left.\begin{array}{l} f'_-(x) = bx \\ f'_+(x) = -\dfrac{1}{x^2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f'_-(1) = b \\ f'_-(1) = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow b = -1$$

Resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{a+b}{2}=1\\ b=-1\end{array}\right\}\Rightarrow (a,b)=(3,-1)$$

Conclusión: para $(a,b)=(3,-1)$, la función $f(x)$ es derivable (y, por tanto, también continua).

## *Ejercicios:*

**176.** Calcula los parámetros correspondientes, para que las siguientes funciones sean continuas y derivables:

1) $f(x)=\begin{cases} x^2+ax+b & \text{si } 0\le x\le 2\\ cx+1 & \text{si } 2<x\le 4\end{cases}$

2) $f(x)=\begin{cases} ax+bx^2 & \text{si } 0\le x<2\\ c+\sqrt{x-1} & \text{si } 2\le x\le 5\end{cases}$

3) $f(x)=\begin{cases} ax+b & \text{si } x\le 1\\ \dfrac{4x}{1+x} & \text{si } x>1\end{cases}$

4) $f(x)=\begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{si } x\le -\dfrac{\pi}{2}\\ m\operatorname{sen} x+n & \text{si } -\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}\\ 2\cos x & \text{si } x\ge \dfrac{\pi}{2}\end{cases}$

**177.** Calcula $a,b,c\in\mathbb{R}$ para que la siguiente función sea continua y derivable en $x=0$:

$$f(x)=\begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{si } x\le 0\\ \left(ax^2+bx+c\right)e^{-x} & \text{si } x>0\end{cases}$$

**178.** Calcula $m\in\mathbb{R}$ para que la siguiente función sea derivable en $x=-1$:

$$f(x)=\begin{cases} 6-m(x+2)^2 & \text{si } x\le -1\\ 3+\dfrac{2}{m(x+2)} & \text{si } x>-1\end{cases}$$

## *Ejercicios de selectividad*

Junio de 2000, tercer bloque, A)

Septiembre de 2000, tercer bloque, A)

Otra propuesta 1, 2000, segundo bloque, A)

Junio de 2001, tercer bloque, A)

Septiembre de 2001, segundo bloque, A)

Otra propuesta 2 de 2001, tercer bloque, A)

Reserva 2 de 2002, cuarto bloque, A)

Septiembre de 2003, cuarto boque, A)

Reserva 1 de 2004, primer bloque, A)

Septiembre de 2009, segundo bloque, B)

Junio de 2014, propuesta A, 1, a)

Junio de 2021, 6, b)

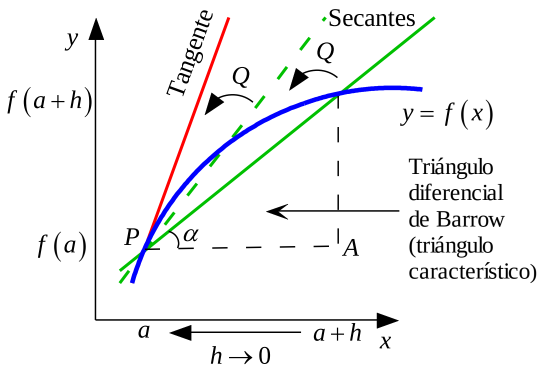
# 4. INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA

Si $f$ es continua en $x_0$, la recta tangente a la gráfica de $f$ en el punto $P\left(x_0, f(x_0)\right)$ es:

i) la recta que pasa por $P$ y tiene pendiente $m(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ si este límite existe, es decir, es un número real.

ii) la recta $x = x_0$ si $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \infty$

***Aclaración***: esta definición proviene del hecho de que la recta tangente a una función en un punto $x_0$ es el límite de la recta secante a la función, cuando el otro punto de corte de la recta secante y la función, tiende a $x_0$.




Sea $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua y

$$P = (a, f(a)),\ Q = (a+h, f(a+h))$$

dos puntos de su gráfica. Geométricamente se tiene que

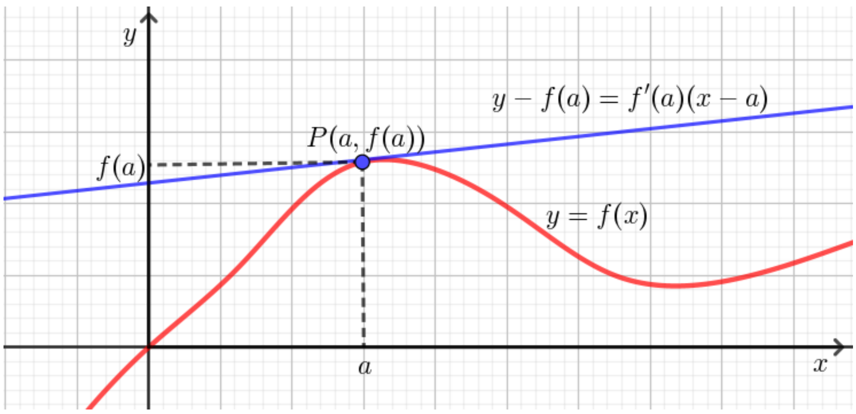
$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \operatorname{tg} \alpha = m_{\text{secantes}}$$

que es el valor que mide la pendiente de la recta secante en los puntos $P$ y $Q$ a la curva.

Tomando límites en la igualdad anterior resulta:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \operatorname{tg} \alpha = \lim_{h \to 0} m_{\text{secantes}} \Leftrightarrow \boxed{f'(a) = \operatorname{tg} \alpha = m_{\text{tangente}}}$$

es decir, *la derivada de una función en un punto es igual a la pendiente de la recta tangente a la función en ese punto*.




Como consecuencia:

Ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en $(a, f(a))$:

$$\boxed{y - f(a) = f'(a)(x - a)}$$

Ecuación de la recta normal a la curva $y = f(x)$ en $(a, f(a))$:

$$\boxed{y - f(a) = \frac{-1}{f'(a)}(x - a)}$$

***Ejemplo:***
Vamos a calcular las rectas tangente y normal a $f(x)=x^3$ en el punto de abscisa $x=1$.

En este caso $a=1$.
Calculamos los valores que necesitamos:

$$f(a)=f(1)=1$$

$$f'(x)=3x^2 \Rightarrow f'(1)=3$$

Así, la ecuación de la recta normal a $f(x)$ en $x=1$ es $y-1=3(x-1)$, y la ecuación de la recta normal a $f(x)$ en $x=1$ es $y-1=-\frac{1}{3}(x-1)$.

***Ejemplo:***
Vamos a determinar el ángulo que forman las tangentes por la derecha y por la izquierda en el punto $(0,0)$ a la función $f(x)=\sqrt{x^3+x^2}$.

Sabemos, por un ejemplo anterior, que $f_-'(0)=-1$ y $f_+'(0)=1$, luego las pendientes en $(0,0)$ de las rectas tangentes son las pendientes de las bisectrices del primer y segundo cuadrantes, respectivamente. Por tanto, el ángulo que forman es de 90º.

**Otra forma de introducir la recta tangente: interpretación geométrica de la derivada**

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \Leftrightarrow \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-f'(a)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)}{x-a}=0 \Leftrightarrow \lim_{x\to a}\frac{f(x)-\left(f(a)+f'(a)(x-a)\right)}{x-a}=0$$

es decir, la recta $y=f(a)+f'(a)(x-a)$ aproxima muy bien a la función $f$ alrededor de $a$. A dicha recta la llamaremos recta tangente a la gráfica de $f$ en $a$.

***Ejercicio:***

**179.** Calcular la ecuación de la recta tangente y de la recta normal de las siguientes funciones en el punto que se indica:

a) $f(x)=\ln x$ en $x=e$

b) $f(x)=\operatorname{sen} x+\cos x$ en $x=\frac{\pi}{4}$

c) $f(x)=(x-1)\sqrt[3]{5-x}$ en $x=4$

***Ejercicios de selectividad***

Junio de 2003, cuarto bloque, A)
Junio de 2004, cuarto bloque, A)
Junio de 2007, primer bloque, B)
Reserva 2 de 2010, propuesta A, 1)
Reserva 1 de 2013, propuesta A, 1, b)
Junio de 2014, propuesta A, 1, b)

Septiembre de 2014, propuesta A, 1, b)    Junio de 2018, propuesta B, 1, c)

# 5. INTERPRETACIÓN FÍSICA DE LA DERIVADA

Si $x(t)$ es la posición de un móvil en el instante de tiempo $t$, la velocidad media en el intervalo de tiempo $[t,t+h]$ viene dada por

$$v_m([t,t+h])=\frac{x(t+h)-x(t)}{h}$$

y la velocidad instantánea en el instante $t$ se obtiene tomando límites, cuando $h\to 0$, en la expresión anterior:

$$v(t)=\lim_{h\to 0}\frac{x(t+h)-x(t)}{h}=x'(t)$$

Además**,** la derivada de la velocidad es la aceleración:

$$a(t)=v'(t)=x''(t)$$

Si la aceleración es cero, no hay cambio de velocidad con respecto al tiempo, es decir, la velocidad es constante. En este caso, la curva de $x$ en función de $t$ es una línea recta. Si la aceleración no es nula, pero constante, la velocidad varía linealmente con el tiempo y la curva de $x$ en función de $t$ es cuadrática con el tiempo.

En general, la derivada de la función $y=f(x)$ es el ritmo de cambio («velocidad») con que varía la magnitud $y$ respecto de la magnitud $x$.

# 6. DERIVADAS SUCESIVAS

Sea $I$ un intervalo y $f$ una función derivable en $I$. Si $f'$ es derivable en $a\in I$, a la derivada $(f')'(a)$ se le llama derivada segunda de $f$ en $a$ y se designa por $f''(a)$.

Si $\forall x\in I$ existe $f''(x)$, la función $x\mapsto f''(x)$ se llama función derivada segunda de $f$ en $I$.

$$f''(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}$$

En general, definidas las funciones $f',\dots,f^{n-1)}:I\to\mathbb{R}$, de tal modo que $f^{k)}=\left(f^{k-1)}\right)'$, para $k=2,\dots,n-1$, diremos que $f^{k)}$ es la <u>función derivada *k*-ésima</u> (o derivada de orden *k*) de $f$ en $I$, que también se representa por: $f^{k)}(x)=\dfrac{d^k f}{dx^k}$

$$f^{n)}(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f^{n-1)}(x+h)-f^{n-1)}(x)}{h}$$

***Ejercicio de selectividad***

Reserva 1 de 2008, primer bloque, B)

# 7. ESTUDIO GLOBAL Y LOCAL DE FUNCIONES

## 7.1. *Monotonía de una función*

Recordemos que salvo que expresamente se diga lo contrario, el conjunto $D$ es un intervalo abierto.

**Definiciones:**

Una función $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es creciente (resp. decreciente) en $D$ cuando para cualesquiera $x, y \in D$ en la situación $x < y$, se verifica que $f(x) \leq f(y)$ (respectivamente $f(x) \geq f(y)$).

Una función $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es estrictamente creciente (resp. estrictamente decreciente) en $D$ cuando para cualesquiera $x, y \in D$ en la situación $x < y$, se verifica que $f(x) < f(y)$ (respectivamente $f(x) > f(y)$).

**Criterio de la derivada primera:**

Si $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es derivable en $D$, y:

$$f'(x_0) \begin{cases} > 0 & \forall x_0 \in D \Rightarrow f \text{ es estrictamente creciente en } D \\ < 0 & \forall x_0 \in D \Rightarrow f \text{ es estrictamente decreciente en } D \end{cases}$$

Demostración:

Si $f'(x_0) > 0 \quad \forall x \in D$, entonces $f(x)$ es derivable en $D$ y, como consecuencia, continua en $D$.

Además, si $x, y \in D$ con $x < y$, entonces $f$ es continua en $[x, y]$ y derivable en $(x, y)$, luego por el teorema del valor medio de Lagrange (que veremos más adelante) $\exists c \in (x, y)$ tal que $f'(x) = \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x}$, y como $f'(x) > 0$, resulta que $\dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} > 0$. Ahora bien, como $x < y$ se tiene que $y - x > 0$ y, por tanto, ha de ser $f(y) - f(x) > 0$, es decir, $f(x)$ es estrictamente creciente en dicho intervalo.

Análogamente se demuestra que si $f'(x_0) < 0 \quad \forall x \in D$, la función es estrictamente decreciente en $D$.

C.Q.D.

**Definiciones:**

Diremos que una función es monótona, cuando sea creciente o decreciente y estrictamente monótona, cuando sea estrictamente creciente o estrictamente decreciente.

Por tanto, **estudiar la monotonía de una función es estudiar el signo de** $f'$.

***Ejercicio:***

**180.** Estudia la monotonía de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-1}$

c) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x+1}$

b) $f(x)=\dfrac{x}{x^2-9}$

d) $f(x)=\ln\sqrt{x^2+1}$

## *7.2. Extremos relativos (extremos locales o puntos críticos)*

**Definición:**

Se dice que $f: D\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tiene un máximo (resp. mínimo) relativo en $x_0$ si $\exists E(x_0)$: $x\in E(x_0)\Rightarrow f(x)\le f(x_0)$ (resp. $f(x)\ge f(x_0)$).
Las coordenadas del máximo (resp. mínimo) relativo son $(x_0, f(x_0))$.

**Condición necesaria para la existencia de extremos relativos en funciones derivables:**

Sea $f: D\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función derivable en $x_0$ y supongamos que $f$ tiene un extremo relativo en $x_0$. Entonces, $f'(x_0)=0$

Demostración:
Supongamos que $f$ tiene un máximo relativo en $x_0$ (si fuera un mínimo relativo, se procedería de forma similar). Entonces, $\exists\delta>0$ tal que $I=(x_0-\delta, x_0+\delta)\subset D$ y $f(x_0)\ge f(x)$ $\forall x\in I$. Por tanto,

$$x_0-\delta<x<x_0\Rightarrow\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge 0\Rightarrow f'(x_0)\ge 0$$

y

$$x_0<x<x_0+\delta\Rightarrow\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le 0\Rightarrow f'(x_0)\le 0$$

Como consecuencia, $f'(x_0)=0$.

C.Q.D.

**Contraejemplo**: *El recíproco no es cierto.*
La función $f(x)=x^3$ es derivable y $f'(0)=0$, y sin embargo, no tiene un extremo relativo en el origen, ya que es siempre creciente.

Como **consecuencia** de la condición necesaria de extremo relativo se tiene:
Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$ y derivable en $(a,b)$. Entonces:

i) Teorema de Weierstrass: $f$ alcanza su máximo y su mínimo absolutos en $[a,b]$.
ii) Si los extremos absolutos no están ni en $a$, ni en $b$, son además extremos relativos (y, por tanto, la derivada se anula en ellos).

***En resumen:*** los extremos absolutos se encuentran o bien entre los puntos críticos de $f$ o bien en $a$ o en $b$.

**Condición suficiente para que una función derivable posea un extremo relativo en un punto:**

Sea $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función dos veces derivable en $x_0$. Si $f'(x_0)=0$ y $f''(x_0)\neq 0$, entonces $f(x)$ tiene un extremo relativo en $x_0$, que es un $\begin{cases} \text{máximo relativo si } f''(x_0)<0 \\ \text{mínimo relativo si } f''(x_0)>0 \end{cases}$

Demostración:

Sabemos que $f''(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f'(x_0+h)-f'(x_0)}{h}$, y como $f'(x_0)=0$, resulta que $f''(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f'(x_0+h)}{h}$. Si además, $f''(x_0)>0$, entonces $\dfrac{f'(x_0+h)}{h}>0$ para $h$ suficientemente pequeño.

A la izquierda de $x_0$, se tiene que $h<0$ y, por tanto, $f'(x_0+h)<0$. Aplicando el criterio de la derivada primera, $f$ es decreciente a la izquierda de $x_0$.

A la derecha de $x_0$, se tiene que $h>0$ y, por tanto, $f'(x_0+h)>0$. Aplicando el criterio de la derivada primera, $f$ es creciente a la derecha de $x_0$.

Así, necesariamente $f$ tiene un mínimo relativo o local en $x_0$.

Análogamente se rezona si $f''(x_0)<0$.

C.Q.D.

## ***Ejercicio:***

**181.** Halla, caso de que los tenga, los extremos relativos de las funciones del ejercicio anterior.

## ***Ejercicio resuelto:***

Vamos a determinar los extremos relativos de la función $f(x)=\dfrac{1}{e^x+e^{-x}}$.

Se tiene que:

$$f'(x)=\frac{-\left(e^x-e^{-x}\right)}{\left(e^x+e^{-x}\right)^2}=\frac{-e^x+e^{-x}}{\left(e^x+e^{-x}\right)^2}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow -e^x+e^{-x}=0 \Rightarrow -e^x+\frac{1}{e^x}=0 \Rightarrow \frac{-e^{2x}+1}{e^x}=0 \Rightarrow -e^{2x}+1=0 \Rightarrow e^{2x}=1=e^0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x=0 \Rightarrow x=0 \text{ (posible extremo relativo)}$$

$$f''(x)=\frac{\left(-e^x-e^{-x}\right)\left(e^x+e^{-x}\right)^2-\left(-e^x+e^{-x}\right)\cdot 2\cdot\left(e^x-e^{-x}\right)}{\left(e^x+e^{-x}\right)^4}$$

$$f''(0)=\frac{(-1-1)(1+1)^2-(-1+1)\cdot 2\cdot(1-1)}{(1+1)^4}=-\frac{1}{2}<0$$

Así, $f$ tiene en $x=0$ un máximo relativo de coordenadas $\left(0, f(0)\right)=\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$.

El **criterio** anterior nos servirá en la mayoría de los casos, pero hay otro más **general** que es importante conocer:

**Criterio general:**

Sea $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función $(n-1)$ – veces derivable en $x_0$. Las condiciones

1) $f'(x_0) = f''(x_0) = f'''(x_0) = \ldots = f^{n-1)}(x_0) = 0$
2) $f^{n)}(x_0) \neq 0$

equivalen a que:

iii) si $n$ es par, $f(x)$ posee un extremo relativo en $x_0$, que es un
$$\begin{cases} \text{máximo relativo si } f^{n)}(x_0) < 0 \\ \text{mínimo relativo si } f^{n)}(x_0) > 0 \end{cases}$$

iv) y si $n$ es impar, entonces $f$ no tiene un extremo relativo en el punto $x_0$.

***Ejemplo:***

Vamos a estudiar los extremos relativos de la función $f(x) = x^4$.

Como $f'(x) = 4x^3$, si la función $f(x)$ tiene extremo relativo, lo tiene en $x = 0$ (único punto en el que la derivada primera se anula). Ahora bien:

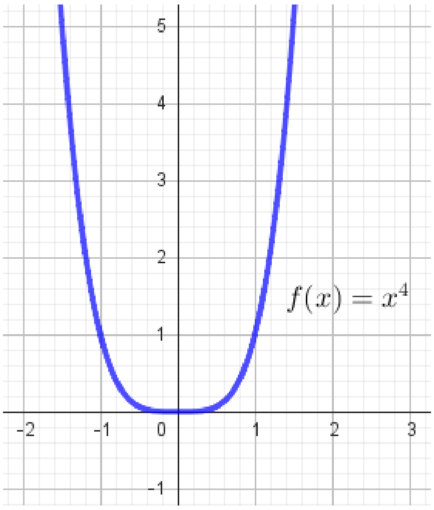
$f''(0) = 0$ ya que $f''(x) = 12x^2$

y

$f'''(x) = 0$ ya que $f'''(x) = 24x$

Sin embargo, $f^{iv)}(x) = 24 > 0$ (derivada de orden par) y, por tanto, $f(x)$ tiene un mínimo relativo en $x = 0$, de coordenadas $(0, f(0)) = (0,0)$.

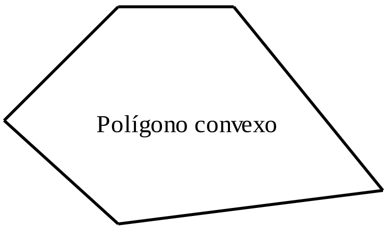
La representación gráfica de $f(x)$ nos permite visualizar este hecho.

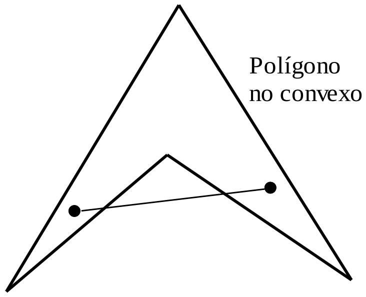



## *7.3. Curvatura de una función: puntos de inflexión*

### 7.3.1. Definición no rigurosa de convexidad

Una figura o región del plano es convexa si al tomar dos puntos cualesquiera de ella, el segmento que los une está completamente incluido en la figura. En caso contrario se dice que la figura o región es cóncava.




**Definición:**

Una <u>función</u> es <u>convexa</u>[9] en un intervalo si la tangente a dicha función en cualquier punto del intervalo queda por debajo de la gráfica; si queda por encima se dirá que la función es <u>cóncava</u>.

Los puntos en los que la tangente a la gráfica atraviesa a la función, se llaman <u>puntos de inflexión</u>.

### 7.3.2. <u>Ampliación: definición de función convexa</u>

Una <u>función</u> $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es <u>convexa</u> en $D$ sii $\forall a,b \in D$ con $a<b$ se tiene que

$$f\left(ta+(1-t)b\right) \le f(t)a + f(1-t)b \qquad \forall t \in [0,1]$$

Una <u>función</u> $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es <u>cóncava</u> en $D$ sii $-f$ es convexa en $D$.

## *Ejemplos:*

Vamos a demostrar que las funciones $f(x)=x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, $g(x)=|x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$ y las funciones afines son convexas.

**1)** $f(x)=x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Para $\forall x,y \in \mathbb{R}$ y $0 \le t \le 1$ se tiene:

$$f\left(tx+(1-t)y\right)-tf(x)-(1-t)f(y)=\left(tx+(1-t)y\right)^2-tx^2-(1-t)y^2=-t(1-t)(x-y)^2 \le 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f\left(ta+(1-t)b\right) \le f(t)a+f(1-t)b \qquad \forall t \in [0,1] \Rightarrow f \text{ es convexa en } \mathbb{R}$$

**2)** $g(x)=|x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Para $\forall x,y \in \mathbb{R}$ y $0 \le t \le 1$ se tiene:

$$g\left(tx+(1-t)y\right)=\left|tx+(1-t)y\right| \le |tx|+\left|(1-t)y\right|=|t||x|+|1-t||y|=tg(x)+(1-t)g(y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g \text{ es convexa en } \mathbb{R}$$

**3)** $h(x)=mx+n \quad \forall x \in \mathbb{R},\ \forall m,n \in \mathbb{R},\ m \neq 0$

Para $\forall x,y \in \mathbb{R}$ y $0 \le t \le 1$ se tiene:

$$h\left(tx+(1-t)y\right)=m\left(\left(tx+(1-t)y\right)\right)+n=t(mx+n)+(1-t)(my+n)=th(x)+(1-t)h(y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h \text{ es convexa en } \mathbb{R}$$

---

[9] ¡¡Ojo!! Al consultar la bibliografía es posible encontrar libros donde llaman función cóncava a lo que nosotros llamamos función convexa. Lo importante es su significado, no el nombre que se le de.
También se utiliza la nomenclatura «cóncava hacia arriba» y «cóncava hacia abajo».

### 7.3.3. Criterio de la derivada segunda

**Criterio para estudiar la curvatura de una función:**

Sea $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función dos veces derivable en $D$.

$$\text{Si } f''(x_0) \begin{cases} > 0 & \forall x_0 \in D \Rightarrow f \text{ es convexa en } D \\ < 0 & \forall x_0 \in D \Rightarrow f \text{ es cóncava en } D \end{cases}$$

**Criterio para estudiar los puntos de inflexión de una función:**

**Definición:**

Los puntos en los que una función pasa de cóncava a convexa o de convexa a cóncava se llaman *puntos de inflexión*.

Si $x_0$ es un punto de inflexión de $f$, las coordenadas de dicho punto de inflexión son $(x_0, f(x_0))$.

**Condición necesaria:**

Si $f$ es dos veces derivable en $x_0$ y $x_0$ es un punto de inflexión, entonces $f''(x_0) = 0$.

**Condición suficiente:**

Sea $f$ una función tres veces derivable en $x_0$. Si $f''(x_0) = 0$ y $f'''(x_0) \neq 0$, entonces $f$ tiene un punto de inflexión en $x_0$.

Por tanto, **estudiar la curvatura de una función es estudiar el signo de la derivada segunda, $f''$**

***Ejercicio:***

**182.** Estudia la curvatura de las funciones del ejercicio 174.

**GeoGebra**

Estudio de funciones a partir de sus derivadas
Autor: Juan Ojeda García
Tema: Derivada, Funciones
https://www.geogebra.org/m/fv26j9Tf

***Ejercicios de selectividad***

Septiembre de 2003, tercer bloque, A)
Septiembre de 2005, segundo bloque, A)
Septiembre de 2006, primer bloque, B)
Reserva 2 de 2007, primer bloque, B)
Junio de 2008, primer bloque, B)
Septiembre de 2008, primer bloque, B)
Reserva 2 de 2008, primer bloque, B)
Reserva 2 de 2010, propuesta B, 1)
Septiembre de 2011, propuesta A, 1)
Septiembre de 2012, propuesta B, 1)
Junio de 2014, propuesta B, 1)
Septiembre de 2014, propuesta B, 1)

# 8. REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE FUNCIONES

Para representar gráficamente una función seguiremos los siguientes pasos:

**1º) DOMINIO Y RECORRIDO**

*Dom ( f )* = {números *x* para los que $f(x)$ tiene sentido}

*Img ( f )* = { $y:\exists x$ de forma que $y=f(x)$ }

**2º) SIMETRÍAS**

a) **Función par**: $f(-x)=f(x)\Leftrightarrow f(x)$ es simétrica respecto del eje *OY*

b) **Función impar**: $f(-x)=-f(x)\Leftrightarrow f(x)$ es simétrica respecto del origen, es decir, si giramos 180º la gráfica obtenemos la misma función.

**3º) PERIODICIDAD**

$y=f(x)$ es periódica de período $T$ $\Leftrightarrow f(x+T)=f(T)$ y $T$ es el menor de los números que cumplen dicha condición.

**4º) PUNTOS DE CORTE CON LOS EJES**

a) **Corte(s) con el eje *OX*:** $y=0\Rightarrow f(x)=0$ → Ninguno, uno o más puntos

b) **Corte con el eje *OY*:** $x=0\Rightarrow f(0)=y$ → Ninguno o un punto

**5º) REGIONES DE EXISTENCIA**

**a) Intervalos de positividad**

$f(x)>0\Rightarrow$ gráfica por encima del eje *OX*

**b) Intervalos de negatividad**

$f(x)<0\Rightarrow$ gráfica por debajo del eje *OX*

Para determinar las regiones de existencia de la función $y=f(x)$ hay que estudiar el signo de $f(x)$

**6º) ASÍNTOTAS**

**a) Asíntotas verticales**

La recta $x=a$ es una asíntota vertical de $y=f(x)$ si existe alguno de los siguientes límites:

$$\lim_{x\to a} f(x)=\pm\infty \qquad \lim_{x\to a+} f(x)=\pm\infty \qquad \lim_{x\to a-} f(x)=\pm\infty$$

**Observaciones:**

(1) Una función puede tener infinitas asíntotas verticales.

(2) La gráfica de la función no puede cortar a las asíntotas verticales.

**b) Asíntotas horizontales**

La recta $y=k$ es una asíntota horizontal de $f(x)$ si existe alguno de los siguientes límites:

$$\lim_{x\to -\infty} f(x)=k \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x)=k$$

**Observaciones:**

(1) Una función tiene como máximo dos asíntotas horizontales.

(2) La gráfica de la función puede cortar a las asíntotas horizontales.

**c) <u>Asíntotas oblicuas</u>**

La recta $y = mx + n$, $m \neq 0$, es una asíntota oblicua de $f(x)$, si existe alguno de los siguientes límites:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x) - mx - n\right) = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty}\left(f(x) - mx - n\right) = 0$$

en cuyo caso $m = \lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ y $n = \lim_{x\to\infty}\left(f(x) - mx\right)$

**Observaciones:**

(1) Una función puede tener como máximo dos asíntotas oblicuas.
(2) Si una función tiene asíntota oblicua no tiene asíntota horizontal y recíprocamente.
(3) La gráfica de la función puede cortar a las asíntotas oblicuas en uno o varios puntos.

## 7º) <u>PUNTOS DE DISCONTINUIDAD</u>

$f(x)$ es continua en $x = a \in Dom(f)$ cuando $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, y por tanto, la función $y = f(x)$ presenta una discontinuidad en un punto cuando la función no sea continua en él.

## 8º) <u>MONOTONÍA</u>

a) **<u>Intervalos de crecimiento</u>**: $f'(x) > 0$ para todos los *x* del intervalo

b) **<u>Intervalos de decrecimiento</u>**: $f'(x) < 0$ para todos los *x* del intervalo

c) **<u>Puntos críticos: extremos relativos</u>**

Se buscan entre los puntos que anulan a la derivada primera: $f'(a) = 0$

$x = a$ es un posible máximo o mínimo relativo de $f(x)$

Si $f''(a) > 0$ entonces $f(x)$ tiene en $(a, f(a))$ un mínimo relativo

Si $f''(a) < 0$ entonces $f(x)$ tiene en $(a, f(a))$ un máximo relativo

Para determinar la monotonía de la función hay que estudiar el signo de $f'(x)$.

## 9º) <u>CURVATURA</u>

a) **<u>Intervalos de convexidad</u>**: $f''(a) > 0$ para todos los *x* del intervalo

b) **<u>Intervalos de concavidad</u>**: $f''(a) < 0$ para todos los *x* del intervalo

c) **<u>Puntos de inflexión</u>**:

Se buscan entre los puntos que anulan a la derivada segunda $f''(a) = 0$:

$x = a$ es un posible punto de inflexión de $f(x)$

Si $f'''(a) > 0$, entonces $f(x)$ tiene en $x = a$ un punto de inflexión cóncavo-convexo, de coordenadas $(a, f(a))$

Si $f'''(a) < 0$, entonces $f(x)$ tiene en $x = a$ un punto de inflexión convexo-cóncavo, de coordenadas $(a, f(a))$

Para determinar la curvatura de la función hay que estudiar el signo de $f''(x)$.

# 9. OPTIMIZACIÓN DE FUNCIONES

***Optimizar*** una función es obtener el valor o valores de la variable independiente que maximizan o minimizan la función objeto de estudio.

## *9.1. Problemas resueltos de optimización de funciones*

**1.** Halla dos números que sumados den 20 y que su producto sea máximo.

Sean $x$ e $y$ los números buscados. El problema a resolver es el siguiente:

$$\begin{cases} x+y=20 \\ xy \text{ máximo} \end{cases}$$

Llamamos $p$ al producto de los dos números, esto es, $p=xy$ [*]

Como $x+y=20 \Rightarrow y=20-x$ y sustituyendo en [*] resulta:

$$p = x(20-x) = 20x - x^2$$

Vamos a calcular el (o los) máximo(s) de la función $p(x)$:

$p'(x) = 20 - 2x$

$p'(x) = 0 \Leftrightarrow 20 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 10$

$p''(x) = -2$

$p''(10) < 0 \Rightarrow x = 10$ es un máximo

Por tanto, los números buscados son:

$$\begin{cases} x=10 \\ y=20-10=10 \end{cases}$$

**2.** Halla dos números tales que el cuadrado de uno multiplicado por el otro sea máximo, si la suma de dichos números es 40.

Sean $x$ e $y$ los números buscados. El problema a resolver es el siguiente:

$$\begin{cases} x+y=40 \\ x^2y \text{ máximo} \end{cases}$$

Llamamos $p=x^2y$. Como $x+y=40$ se tiene que $y=40-x$ y, por tanto:

$$p = x^2(40-x) = 40x^2 - x^3$$

Vamos a maximizar la función $p(x)$:

$p'(x) = 80x - 3x^2$

$$p'(x)=0 \Leftrightarrow 80x-3x^2=0 \Leftrightarrow x(80-3x)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ 80-3x=0 \Rightarrow x=\dfrac{80}{3} \end{cases}$$

$p''(x) = 80 - 6x$

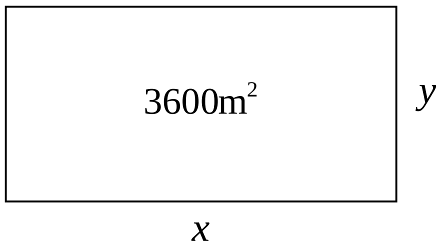
$p''(0) = 80 > 0 \Rightarrow x = 0$ es un máximo (no nos interesa)

$p''\left(\dfrac{80}{3}\right) = -80 < 0 \Rightarrow x = \dfrac{80}{3}$ es un mínimo relativo

Los números buscados son:

$$\begin{cases} x = \dfrac{80}{3} \\ y = 40 - \dfrac{80}{3} = \dfrac{40}{3} \end{cases}$$

**3.** Cuáles son las dimensiones de un campo rectangular de 3 600 m$^2$ de superficie, para poderlo cercar con una valla de longitud mínima.




Por la fórmula del área del rectángulo se tiene:

$$xy = 3600$$

Por otro lado, la superficie que tenemos que vallar es $2x + 2y$

Así, el problema a resolver es:

$$\begin{cases} xy = 3600 \\ 2x + 2y \text{ mínima} \end{cases}$$

Como $xy = 3600 \Rightarrow y = \dfrac{3600}{x}$

Llamando $f = 2x + 2y$ y sustituyendo $y = \dfrac{3600}{x}$ obtenemos: $f(x) = 2x + 2\dfrac{3600}{x} = \dfrac{2x^2 + 7200}{x}$

Vamos a minimizar *f*:

$$f'(x) = \frac{4x^2 - 2x^2 - 7200}{x^2} = \frac{2x^2 - 7200}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 7200 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 60$$

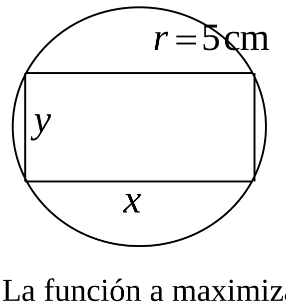
$$f''(x) = \frac{14400}{x^3}$$

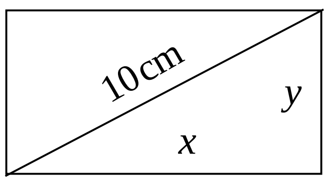
$f''(-60) < 0 \Rightarrow x = -60$ es un máximo (no nos interesa)

$f''(60) > 0 \Rightarrow x = 60$ es un mínimo

Por tanto, las dimensiones del campo son: $\begin{cases} x = 60 \text{ m} \\ y = \dfrac{3600}{60} = 60 \text{ m} \end{cases}$

**4.** Halla las dimensiones del rectángulo de área máxima que se puede inscribir en una circunferencia de radio 5 cm.




$A = xy$ máxima

Por el teorema de Pitágoras:

$$x^2 + y^2 = 10^2$$

de donde

$$y = \sqrt{100 - x^2}$$

La función a maximizar es: $f(x) = x\sqrt{100 - x^2}$

$$f(x) = x\sqrt{100 - x^2} = \sqrt{x^2\left(100 - x^2\right)} = \sqrt{100x^2 - x^4} = \left(100x^2 - x^4\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(100x^2 - x^4\right)^{-\frac{1}{2}}\left(200x - 4x^3\right) = \frac{200x - 4x^3}{2 \cdot \sqrt{100x^2 - x^4}}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 200x - 4x^3 = 0 \Leftrightarrow x(200 - 4x^2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 200 - 4x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{50} \end{cases}$$

El único posible extremo que nos interesa es $x = \sqrt{50}$

$$f'(x) = \frac{100 - 2x^2}{\sqrt{100 - x^2}}$$

$$f''(x) = \frac{-4x\sqrt{100-x^2} - \left(100 - 2x^2\right)\dfrac{-x}{\sqrt{100-x^2}}}{\left(\sqrt{100-x^2}\right)^2} = \frac{-4x\left(\sqrt{100-x^2}\right)^2 + \left(100-2x^2\right)x}{\left(100-x^2\right)\sqrt{100-x^2}} =$$

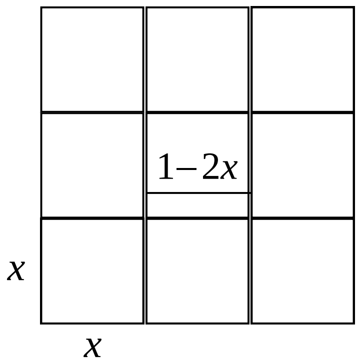
$$= \frac{-300x + 2x^3}{\left(100-x^2\right)\sqrt{100-x^2}}$$

$f''\left(\sqrt{50}\right) < 0 \Rightarrow x = \sqrt{50}$ es un máximo

Calculamos el valor de $y$: $y = \sqrt{100 - \left(\sqrt{50}\right)^2} = \sqrt{50}$

Por tanto, las dimensiones del rectángulo para que el área sea máxima son: $\begin{cases} x = \sqrt{50} \text{ cm} \\ y = \sqrt{50} \text{ cm} \end{cases}$

**5.** Con 1 m$^2$ de cartón cómo construirías una caja del mayor volumen posible.




Teniendo en cuenta el dibujo, tenemos que maximizar la función

$$v(x) = (1-2x)^2\, x = 4x^3 - 4x^2 + x$$

Calculamos las derivadas:

$$v'(x) = 12x^2 - 8x + 1$$

$$v'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{16}}{24} = \frac{8 \pm 4}{24} = \begin{cases} \dfrac{8+4}{24} = \dfrac{12}{24} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{8-4}{24} = \dfrac{4}{24} = \dfrac{1}{6} \end{cases}$$

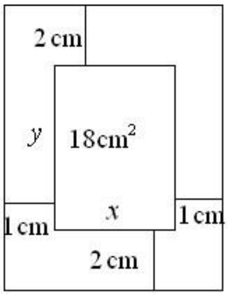
$v''(x) = 24x - 8$

$v''\left(\frac{1}{2}\right) = 12 - 8 > 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$ es un mínimo (no nos interesa)

$v''\left(\frac{1}{6}\right) = 4 - 8 < 0 \Rightarrow x = \frac{1}{6}$ es un máximo

Por tanto, como $1 - 2x = 1 - 2\dfrac{1}{6} = 1 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$, las dimensiones de la caja son: $\dfrac{2}{3} \times \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{6}$ (m)

**6.** Una hoja de papel debe contener 18 cm$^2$ de texto impreso. Los márgenes superior e inferior deben ser de 2 cm y los laterales de 1 cm. ¿Cuáles deben ser las dimensiones para que resulten hojas con un coste mínimo?




Teniendo en cuenta el dibujo, la función a minimizar es:

$$(x+2)(y+4)$$

Por otra parte, teniendo en cuenta la fórmula del área de un rectángulo, se tiene que:

$$xy=18$$

Así, tenemos que resolver el siguiente problema:

$$\begin{cases} xy=18 \\ (x+2)(y+4) \end{cases}$$

Como $xy=18$ se tiene que $y=\dfrac{18}{x}$ y sustituyendo

$$S(x)=(x+2)\left(\frac{18}{x}+4\right)=\frac{4x^2+18x+8x+36}{x}=\frac{4x^2+26x+36}{x}=4x+26+\frac{36}{x}$$

Vamos a minimizar $S(x)$:

$$S'(x)=4-\frac{36}{x^2}=\frac{4x^2-36}{x^2}$$

$$S'(x)=0\Rightarrow 4x^2-36=0\Rightarrow x=\sqrt{\frac{36}{4}}=3 \text{ (posible mínimo)}$$

$$S''(x)=\frac{8x\cdot x^2-\left(4x^2-36\right)\cdot 2x}{x^4}=\frac{8x^3-8x^3+72x}{x^4}=\frac{72}{x^3}$$

$$S''(3)>0\Rightarrow x=3 \text{ es un mínimo}$$

Así las dimensiones de la zona que contiene el texto impreso son:

$$\begin{cases} x=3 \text{ cm} \\ y=\dfrac{18}{3}=6 \text{ cm} \end{cases}$$

y las dimensiones de la hoja de papel son: $5\times 10$ cm.

**7.** Un agricultor sabe que si vende hoy su cosecha podrá recoger 50 000 kg, que le pagarán al precio de 20 céntimos por kg. Por cada día que espere, la cosecha disminuirá en 800 kg, pero el precio aumentará en 3 céntimos por kg. ¿Cuántos días deberá esperar para obtener el mayor beneficio?

Sea $x$ = número de días que espera el agricultor.
Recoge una cosecha de $50000-800x$ (kg), que vende al precio de $20+3x$ cent/kg. La ganancia que obtiene es: (kilos producidos) $\cdot$(precio por kg)

$$g(x)=(50\ 000-800x)(20+3x)$$

que es la función que tenemos que maximizar:

$$g'(x)=-800\cdot(20+3x)+(50000-800x)\cdot 3=-4800x+134000$$

$$g'(x)=0\Leftrightarrow -4800x+134000=0\Leftrightarrow x=\frac{134000}{4800}=\frac{335}{12}$$

$$g''(x)=-4800$$

$$g''\left(\frac{335}{12}\right)<0\Rightarrow x=\frac{335}{12} \text{ es un máximo}$$

Por tanto, el agricultor deberá esperar $\frac{335}{12} \simeq 27{,}917 \simeq 28$ días para que su ganancia sea máxima.

**8.** Un vendedor de bolígrafos ha observado que, si vende sus bolígrafos a 15 céntimos, es capaz de vender 1 000 unidades diarias, pero que por cada céntimo que aumente el precio, disminuye en 100 unidades la venta diaria de bolígrafos. Por otra parte, a él le cuesta 7,5 céntimos fabricar un bolígrafo. Averiguar qué precio ha de poner para obtener el máximo beneficio.

Sea $x$ el precio de cada bolígrafo. El número de bolígrafos vendidos al día es $n = 1000 - 100x$, y en cada bolígrafo obtiene un beneficio igual a $x - 5$.
El beneficio total es: $b(x) = (1000 - 100x)(x - 5)$
que es la función que tenemos que maximizar:

$$b'(x) = -100(x-5) + (2000 - 100x) = -100x + 500 + 2000 - 100x = -200x + 2500$$

$$b'(x) = 0 \Rightarrow -200x + 2500 = 0 \Rightarrow x = \frac{2500}{200} = 12{,}5$$

$$b''(x) = -200$$

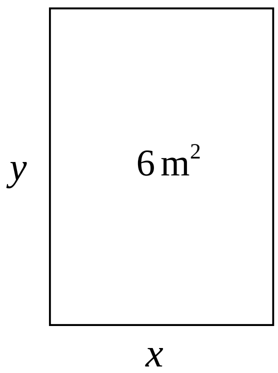
$$b''(12{,}5) < 0 \Rightarrow x = 12{,}5 \text{ es un máximo para } b(x)$$

Por tanto, el precio del bolígrafo para que el beneficio sea máximo es de 12,5 céntimos.

**9.** Se desea construir el marco para una ventana rectangular de 6 m$^2$ de superficie. El metro lineal de tramo horizontal cuesta 20 euros y el tramo vertical 30 euros.

a) Calcula las dimensiones de la ventana para que el coste del marco sea mínimo.
b) Determinar el coste del marco.

El problema a resolver es: $\begin{cases} xy = 6 \\ M \equiv 2x \cdot 20 + 2y \cdot 30 = 40x + 60y \end{cases}$




Como $xy = 6 \Rightarrow y = \frac{6}{x}$ y sustituyendo en la expresión de $M$:

$$M = 40x + 60\frac{6}{x} = \frac{40x^2 + 360}{x} = M(x)$$

Calculamos $M'(x)$ e igualamos a cero:

$$M'(x) = \frac{80x \cdot x - (40x^2 + 360)\cdot 1}{x^2} = \frac{80x^2 - 40x^2 - 360}{x^2} = \frac{40x^2 - 360}{x^2}$$

$$M'(x) = 0 \Leftrightarrow 40x^2 - 360 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{360}{40} = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$$

Comprobamos que la solución positiva que es la que tiene sentido corresponde a un mínimo:

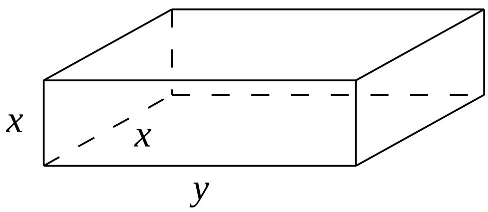
$$M''(x) = \frac{80x \cdot x^2 - (40x^2 - 360)\cdot 2x}{x^4} = \frac{80x^3 - 80x^3 + 720x}{x^4} = \frac{720x}{x^4} = \frac{720}{x^3}$$

$$M''(3) = \frac{720}{3^3} > 0 \Rightarrow x = 3 \text{ es un mínimo}$$

Por tanto, las dimensiones del marco son: $\begin{cases} x = 3 \text{ m} \\ y = 2 \text{ m} \end{cases}$

Así, el coste del marco es: $40 \cdot 3 + 60 \cdot 2 = 120 + 120 = 240$ €.

**10.** En una oficina de correos sólo admiten paquetes con forma de paralelepípedo rectangular, tales que la anchura sea igual a la altura y, además, la suma de sus tres dimensiones debe ser de 72 cm. Halla las dimensiones del paralelepípedo para que el volumen sea máximo.




El problema a resolver es:

$$\begin{cases} x+x+y=72 \\ v\equiv x^2y \ \text{ máximo} \end{cases}$$

Como $2x+y=72 \Rightarrow y=72-2x$ ý sustituyendo en la expresión de *v*:

$$v=x^2\left(72-2x\right)=72x^2-2x^3=v\left(x\right)$$

Maximizamos $v\left(x\right)$

$$v'\left(x\right)=144x-6x^2$$

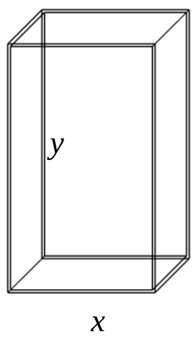
$$v'\left(x\right)=0 \Leftrightarrow x\left(144-6x\right)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \ \text{ (No vale)} \\ x=\dfrac{144}{6}=24 \end{cases}$$

$v''(x) = 144 - 12x$

$v''(24) = -144 < 0 \Rightarrow x = 24$ es un máximo

Por tanto, las dimensiones de la caja son: $24 \times 24 \times 24$ (cm).

**11.** Queremos diseñar un envase cuya forma sea un prisma regular de base cuadrada y capacidad 80 cm$^3$. Para la tapa y la superficie lateral usamos un determinado material; pero para la base debemos emplear un material un 50 % más caro. Halla las dimensiones de este envase (longitud del lado de la base y altura) para que su precio sea el menor posible.




Si suponemos que el precio del material para la tapa y los laterales es de una unidad por cm$^2$, el precio para 1 cm$^2$ de la base será de 1.5 unidades. El precio del envase, que es la función que debemos minimizar, es:

$$p = x^2 + 4xy + 1{,}5x^2 = 2{,}5x^2 + 4xy$$

Esta función depende de dos variables, pero como sabemos que el volumen es de 80 cm$^3$, se tiene:

$$V=x^2y=80 \Rightarrow y=\frac{80}{x^2}$$

Sustituyendo en la función:

$$p=2{,}5x^2+4x\frac{80}{x^2}=2{,}5x^2+\frac{320}{x}=p\left(x\right)$$

Derivamos e igualamos a cero:

$$p'\left(x\right)=5x-\frac{320}{x^2}$$

$p'(x) = 0 \Leftrightarrow 5x^3 - 320 = 0 \Leftrightarrow x^3 = 64 \Leftrightarrow x = 4$ cm

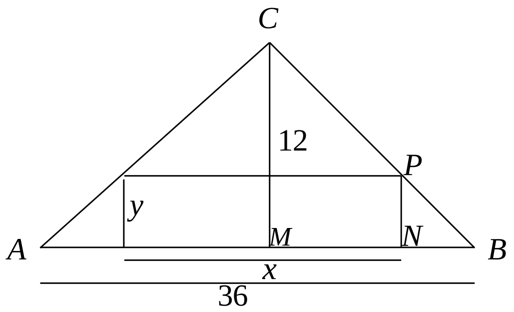
Para comprobar que se trata del precio mínimo, calculamos la derivada segunda y sustituimos:

$$p''\left(x\right)=5+\frac{640}{x^3}$$

$p''(4) > 0 \Rightarrow x = 4$ es un mínimo

El envase de precio mínimo tiene una base cuadrada de 4 cm de lado y una altura de 5 cm.

**12.** Halla las dimensiones del rectángulo de área máxima que puede inscribirse en un triángulo isósceles cuya base es el lado desigual y mide 36 cm y la altura correspondiente mide 12 cm. Supón que un lado del rectángulo está en la base del triángulo.




La función que debemos hacer máxima es el área del rectángulo: $A = xy$
Como esta función depende de dos variables, debemos buscar una relación entre ellas.
Los triángulos *CMB* y *PNB* son semejantes, por tanto:

$$\frac{MB}{CM} = \frac{BN}{PN} \Leftrightarrow \frac{18}{12} = \frac{18 - \frac{x}{2}}{y} \Leftrightarrow 3y = 36 - x$$
$$\Rightarrow x = 36 - y^2$$

Sustituimos en la función a maximizar:

$$A = 36y - 3y^2 = A(y)$$

Derivamos e igualamos a cero:

$A'(y) = 36 - 6y$

$A'(y) = 0 \Leftrightarrow 36 - 6y = 0 \Leftrightarrow y = 6$

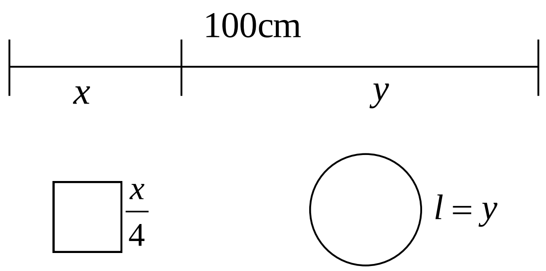
Sustituimos en la derivada segunda:

$A''(6) = -6 < 0 \Rightarrow y = 6$es un máximo

Por tanto, las dimensiones del rectángulo son: $\begin{cases} y = 6 \text{ cm} \\ x = 18 \text{ cm} \end{cases}$

**13.** Un hilo de 100 cm se divide en dos trozos de longitudes *x* e *y*; con el primero se forma un cuadrado y con el segundo un círculo. Razonadamente:

a) Halla *x* e *y* para que la suma de las áreas del cuadrado y del círculo sea máxima.
b) Halla *x* e y para que la suma de las áreas del cuadrado y del círculo sea mínima.




La longitud de la circunferencia es $2\pi\ r = y$, y por tanto el radio es $r = \frac{y}{2\pi}$.

La función que tenemos que maximizar y minimizar es la suma de las áreas:

$$S = \frac{x^2}{16} + \frac{\pi\ y^2}{4\pi^2} = \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4\pi}$$

Además, sabemos que $x + y = 100$, es decir, $y = 100 - x$ Sustituyendo:

$$S = \frac{x^2}{16} + \frac{(100 - x)^2}{4\pi} = S(x)$$

Derivamos e igualamos a cero:

$$S'(x)=\frac{x}{8}+\frac{-(100-x)}{2\pi}=\frac{x}{8}-\frac{100-x}{2\pi}$$

$$S'(x)=0\Leftrightarrow \frac{x}{8}-\frac{100-x}{2\pi}=0\Leftrightarrow 2\pi\ x=800-8x\Leftrightarrow x(2\pi+8)=800\Rightarrow x=\frac{800}{2\pi+8}=\frac{400}{\pi+4}$$

Calculamos la derivada segunda y sustituimos:

$$S''(x)=\frac{1}{8}+\frac{1}{2\pi}>0\Rightarrow x=\frac{400}{\pi+4} \text{ es un mínimo}$$

Por tanto, el valor hallado corresponde a un mínimo. Es decir, cuando $x=\frac{400}{\pi+4}$ e $y=100-\frac{400}{\pi+4}=\frac{100\pi}{\pi+4}$ la suma de las áreas es **mínima**.

El área será máxima en uno de los extremos del intervalo $[0,100]$ en el que toma valores la variable *x*.

Si $x=0$ e $y=100$, el radio del círculo es $r=\frac{100}{2\pi}$, el área del cuadrado es 0 y el área del círculo es:

$$A_{círculo}=\pi\cdot\frac{100^2}{4\pi^2}=\frac{10000}{4\pi}\approx 795.8\ \text{cm}^2$$

Si $x=100$ e $y=0$, el lado del cuadrado es 25 cm y el área del cuadrado es:

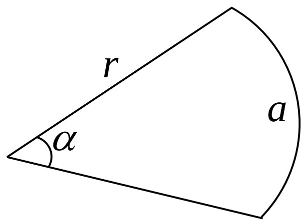
$$A_{cuadrado}=25^2=625\ \text{cm}^2$$

Así, la función se hace **máxima** cuando $x=0$, es decir, cuando todo el hilo se utiliza en hacer un círculo.

**14.** Un jardinero quiere hacer un parterre[10] en forma de sector circular y que tenga de perímetro 20 m. Se pregunta acerca del radio que debe tomar para lograr que el área del parterre sea máxima.

a) Expresa el área del parterre, *S*, como función del radio *r*.
b) Determina el valor del radio que maximiza *S*.
c) ¿Cuál es la amplitud de este sector de máxima superficie?
d) ¿Qué criterio se utilizará para garantizar que la solución encontrada corresponde ciertamente a un máximo?

Consideramos un sector circular de radio *r*, arco *a* y ángulo $\alpha$.




Deducimos la fórmula del área de dicho sector a partir de la fórmula del área de círculo y de la longitud de la circunferencia.

$$A=\pi\cdot r^2 \ \text{ y } \ L=2\cdot\pi\cdot r$$

Si llamamos S al área del sector circular, se tiene:

$$\frac{2\cdot\pi\cdot r}{a}=\frac{\pi\cdot r^2}{S}\Rightarrow S=\frac{\pi\cdot r^2\cdot a}{2\cdot\pi\cdot r}=\frac{ra}{2}$$

a) Para expresar el área S en función del radio utilizamos la relación que proporciona el perímetro del parterre, $2r+a=20$, de donde:

$$a=20-2r$$

Sustituimos en la fórmula de *S*:

[10] Jardín o parte de él con césped, flores y anchos paseos.

$$S=\frac{r\left(20-2r\right)}{2}=10r-r^2=S\left(r\right)$$

b) Derivamos e igualamos a cero:

$S'(r)=10-2r$

$S'(r)=0 \Leftrightarrow 10-2r=0 \Leftrightarrow r=5\text{m}$

Calculamos la derivada segunda y sustituimos:

$S''(r)=-2<0 \Rightarrow r=5$ es un máximo

c) Para calcular el valor de la amplitud, $\alpha$, correspondiente a esta solución, calculamos primero el valor de $a$:

$$a=20-2\cdot 5=10\text{ m}$$

y el ángulo correspondiente a este arco (expresado en radianes) se obtiene mediante una regla de tres:

$$\frac{2\cdot\pi\cdot r}{10}=\frac{2\pi}{\alpha}\Rightarrow \alpha=\frac{20\pi}{2\cdot\pi\cdot r}=\frac{10}{5}=2\text{ radianes}$$

d) Para garantizar que la solución corresponde a un máximo, hemos calculado la derivada segunda y hemos visto que tiene signo negativo.

**15.** El valor de un rubí es proporcional al cuadrado de su peso. Divide un rubí de 2 gramos en dos partes de $x$ gramos y de $2-x$ gramos, de forma que los dos rubíes formados sea mínima.

El valor de dos rubíes será, en función del peso de uno de ellos:

$$V(x)=k(x^2+(x-2)^2)=k(2x^2-4x+4)$$

Calculamos la deriva e igualamos a cero:

$V'(x)=k(4x-4)$

$V'(x)=0 \Leftrightarrow k(4x-4)=0 \Leftrightarrow x=1$

Calculamos la derivada segunda y sustituimos:

$V''(x)=4x$

$V''(1)=4>0 \Rightarrow x=1$ es un mínimo

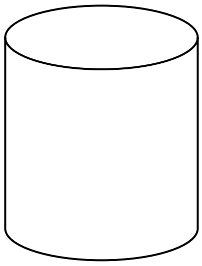
Así, ambos rubíes deben pesar 1 gramo cada uno.

**16.** Se quieren construir depósitos cilíndricos como el de la figura, con la condición de que la altura y el perímetro de la circunferencia sumen 100 m.

Comprueba que el volumen de los depósitos viene dado por la expresión:

$$V(r)=100\pi\cdot r^2-2\pi^2r^3$$

y determina las dimensiones del que tiene volumen máximo.



La función que queremos hacer máxima es el volumen del cilindro:

$$V=\pi\cdot r^2h$$

La condición dada en el enunciado relaciona las dos variables que aparecen en la fórmula del volumen:

$$h+2\pi\cdot r=100\Rightarrow h=100-2\pi\cdot r$$

Sustituyendo en $V$:

$$V(r)=\pi\cdot r^2(100-2\pi\cdot r)=100\pi\cdot r^2-2\pi^2r^3$$

Derivamos e igualamos a cero:

$V'(r)=200\pi\cdot r-6\pi^2r^2$

$$V'\left(r\right)=0\Leftrightarrow 200\pi\cdot r-6\pi^2r^2=0\Leftrightarrow r=\begin{cases}0\\ \dfrac{100}{3\pi}\end{cases}$$

La solución $r=0$ corresponde a un cilindro degenerado de volumen 0. Estudiamos la solución no nula, y para ello calculamos la derivada segunda:

$$V''(r) = 200\pi - 12\pi^2 r$$

$$V''\left(\frac{100}{3\pi}\right) = 200\pi - 12\pi^2 \frac{100}{3\pi} = 200\pi - 400\pi < 0 \Rightarrow r = \frac{100}{3\pi} \text{ es un máximo}$$

El cilindro de volumen máximo tiene por dimensiones $r=\frac{100}{3\pi}$ m y $h=\frac{100}{3}$ m.

## ***Ejercicios de selectividad***

| | |
|---|---|
| Septiembre de 2001, primer bloque, A) | Otra propuesta 1 de 2001, primer bloque, A) |
| Junio de 2002, segundo bloque, A) | Septiembre de 2002, primer bloque, A) |
| Junio de 2003, primer bloque, A) | Septiembre de 2003, primer bloque, A) |
| Reserva 2 de 2004, segundo Bloque, A) | Reserva 1 de 2004, tercer Bloque, A) |
| Septiembre de 2004, tercer Bloque, A) | Junio de 2004, segundo Bloque, A) |
| Reserva 2 de 2005, primer Bloque, A) | Septiembre de 2005, primer Bloque, A) |
| Junio de 2005, segundo Bloque, A) | Reserva 2 de 2006, primer Bloque, A) |
| Reserva 1 de 2006, primer Bloque, B) | Reserva 1 de 2007, primer Bloque, B) |
| Septiembre de 2007, primer Bloque, A) | Reserva 1 de 2009, primer Bloque, A) |
| Junio de 2009, primer bloque, A) | Septiembre de 2009, primer Bloque, A) |

# Unidad 9:
# PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES DERIVABLES

## 1. TEOREMA DE ROLLE

Los resultados más útiles del cálculo diferencial se refieren a funciones derivables en todos los puntos de un intervalo y en esta categoría entran los teoremas que aparecen en esta unidad.

**Michel Rolle** (1652 - 1719) fue miembro de la Académie des Sciences y en 1691, estudiando un método para resolver ecuaciones, estableció, sin demostrar, el teorema que ahora lleva su nombre que es esencialmente equivalente al teorema del valor medio. Dicho teorema aparece en un texto de geometría y álgebra llamado “*Démonstration d’une Méthode pour resoudre les Egalitez de tous les degrez (Demostración de un método para resolver las Igualdades de todos los grados)*[11]”, publicado en 1691. Como curiosidad decir que Michel Rolle estaba en contra de los métodos infinitesimales defendidos entre otros por L’Hôpital y de hecho estaba enzarzado en un acalorado debate sobre los fundamentos de dichos métodos, y sostenía que esos métodos conducían a paralogismos. Además de por L’Hôpital fue refutado también por John Bernouilli, quien mantuvo que Rolle no entendía el Cálculo.

El teorema del valor medio es frecuentemente atribuido a **Joseph Louis Lagrange**; no obstante, fue publicado por vez primera en 1806 por el físico **André Marie Ampére** que justificaba el resultado usando ideas de Lagrange y suponiendo que la función derivada era continua; lo cual, como se verá enseguida, es innecesario. Quince años más tarde **Augustin Cauchy** volvió a probar el teorema con las mismas hipótesis. También es digno de mención que en ese mismo artículo Ampére alegó haber demostrado un resultado que hoy se sabe que es falso, a saber, que una función continua es derivable excepto, posiblemente, en un número de puntos excepcionales.

El Teorema del Valor Medio relaciona los valores de la función en los extremos de un intervalo con el valor de la derivada en un punto intermedio del mismo y su demostración se basa en aplicar el Teorema de Rolle a una función adecuada. Además de una sencilla prueba, este teorema se interpreta geométricamente de una forma fácil, como se verá a continuación.

**Teorema de Rolle:**

Si $f(x)$ es una función continua en $[a,b]$, derivable en $(a,b)$ y tal que $f(a)=f(b)$, entonces $\exists c\in(a,b): f'(c)=0$

Demostración:

Si $f(x)=f(a)\ \forall x\in[a,b]$, es decir, si $f$ es constante, entonces $f'\equiv 0$ en $[a,b]$, y la conclusión es trivial.

[11] En lenguaje moderno: «Demostración de un método de análisis numérico para obtener las raíces (reales) de polinomios de cualquier grado»

Supongamos que $\exists x_0 \in [a,b]$ tal que $f(x_0) \neq f(a) = f(b)$ y consideremos que $f(x_0) > f(a) = f(b)$.

Como $f$ es continua en $[a,b]$, aplicando el teorema de Weierstrass, $\exists x_1 \in [a,b]$ tal que $f(x) \leq f(x_1) \quad \forall x \in [a,b]$, luego en particular $f(a) = f(b) < f(x_0) \leq f(x_1)$.

Así, $f(a) = f(b) < f(x_1)$ y, por tanto, $x_1 \neq a$ y $x_1 \neq b$, luego $x_1 \in (a,b)$.

Tomando $x_1 = c$, se tiene que $f'(c) = 0$ (ya que $f$ tiene en $x_1$ un máximo).

Análogamente, si $f(x_0) < f(a) = f(b)$. C.Q.D.

***<u>Ejemplo:</u>***

La función $f(x) = x^2 + x + 2$ verifica las hipótesis del teorema de Rolle en $[-2,1]$ pues es continua y derivable en $\mathbb{R}$ (por ser una función polinómica), luego en particular es continua en $[-2,1]$ y derivable en $(-2,1)$ . Además, $f(-2) = 4 = f(1)$.

Como consecuencia, $\exists c \in (-2,1)$ tal que $f'(c) = 0$.

Ahora bien, como $f'(x) = 2x + 1$ y $f'(x) = 0$, se tiene que $x = -\frac{1}{2}$, luego $c = -\frac{1}{2} \in (-2,1)$ es el valor cuya existencia asegura el teorema.

***<u>Ejemplo:</u>***

Vamos a ver que no podemos aplicar el teorema de Rolle a la función

$$f(x) = \begin{cases} 1+2x & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \\ 1-2x & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

en el intervalo $[-1,1]$.

Cada una de las ramas de la función es continua en su dominio, por ser funciones polinómicas y constante, luego tenemos que ver si es continua en $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0} f(x) \quad \left. \begin{cases} \lim\limits_{x \to 0-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0-} (1+2x) = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0+} (1-2x) = 1 \end{cases} \right\} \Rightarrow \exists \lim_{x \to 0} f(x) = 1 \text{ y } \lim_{x \to 0} f(x) = 1 = f(0)$$

y, por tanto, $f$ es continua en $\mathbb{R}$, luego en particular, en $[-1,1]$.

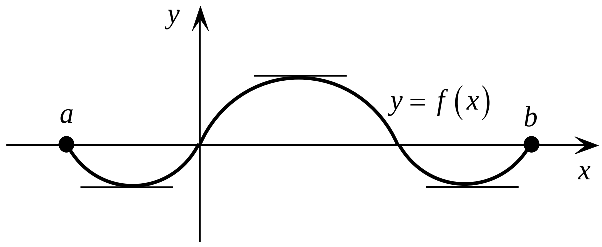
Cada una de las ramas de la función es derivable en su dominio, por ser funciones polinómicas y constante, luego tenemos que ver si es derivable en $x = 0$:

$$f'(0) \quad \left. \begin{cases} f'_+(x) = 2 \Rightarrow f'_+(0) = 2 \\ f'_-(x) = -2 \Rightarrow f'_-(0) = -2 \end{cases} \right\} \Rightarrow \nexists f'(0)$$

y, por tanto, $f$ no es derivable en $x = 0$, luego no es derivable en $(-1,1)$.

Ya sabemos que no podemos aplicar el teorema de Rolle, ya que la función no es deivable en $(-1,1)$.

***Interpretación geométrica:*** Este teorema afirma la existencia de, al menos un punto $c$ de $(a,b)$, tal que la recta tangente a $f(x)$ en $(c, f(c))$ sea paralela al eje OX.




Aplicando de forma conjunta los teoremas de Bolzano y de Rolle se pueden determinar intervalos donde la ecuación $f(x)=0$, tiene, a lo sumo, una solución.

Para ello hay que tener en cuenta el siguiente **teorema**:
*«Entre cada dos raíces de una función derivable, existe al menos una raíz de la función derivada».*

Combinando los teoremas de Bolzano y Rolle, obtenemos el siguiente resultado, que es muy útil para demostrar la unicidad de la solución,

**Teorema:**

Si $f'(x) \neq 0$ en $(a,b)$, entonces la ecuación $f(x)=0$ tiene, como mucho, una única solución en el intervalo $[a,b]$.

Demostración:
Supongamos que $f(x)=0$ tiene dos soluciones distintas en $[a,b]$, que llamaremos $x_1$ y $x_2$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $x_1 < x_2$.
Como $f'(x) \neq 0$ en $(a,b)$, entonces $f'(x)>0$ en $(a,b)$ o $f'(x)<0$ en $(a,b)$.
Supongamos que $f'(x)>0$ en $(a,b)$. Entonces, $f$ es estrictamente creciente en $(a,b)$, y como $f(x_1)=0=f(x_2)$, entonces necesariamente $x_1 = x_2$, lo que contradice nuestra hipótesis inicial.
Análogamente se demuestra si $f'(x)<0$ en $(a,b)$.

C.Q.D.

***Ejemplo:***
Vamos a ver que la ecuación $\cos x = 2x$ tiene una única solución en $\mathbb{R}$.
Consideramos la función $f(x)=\cos x - 2x$ que es continua y derivable en $\mathbb{R}$, luego en particular lo es en $[0,1]$ y $(0,1)$ respectivamente.
Como además $f(0)=1>0$ y $f(1)=\cos 1 - 2 < 0$, aplicando el teorema de Bolzano $\exists c \in (0,1)$ tal que $f(c)=0$, esto es, $\cos(c)=2c$.
Vamos a demostrar que dicha solución es única. Supongamos que $d$ es otra solución. Entonces, $f(d)=0=f(c)$, y aplicando el teorema de Rolle a $f$ en $[c,d]$ si $d>c$, o en $[d,c]$ si $d<c$, se tiene que $\exists e \in (c,d)$ tal que $f'(e)=0$.

Ahora bien, $f'(x) = -\operatorname{sen} x - 2 < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, lo que es contradictorio con que $f'(e) = 0$ y, como consecuencia, la ecuación solo tiene una solución real.

***Ejemplo:***

Vamos a ver que la ecuación $e^{-x} = x$ tiene una única solución en $\mathbb{R}$.

a) Existencia (teorema de Bolzano): $f(x) = e^{-x} - x$

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ es continua en } [0,1] \text{ y derivable en } (0,1) \\ f(0) = e^0 - 0 = 1 > 0 \\ f(1) = e^{-1} - 1 < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Por el teorema de Bolzano, } \exists c \in (0,1) : f(c) = 0$$

.

b) Unicidad (teorema de Rolle)

$f'(x) = -e^{-x} - 1 < 0 \Rightarrow f$ es estrictamente decreciente y, por el teorema de Rolle, tiene como máximo una única raíz.

***Ejercicios de Selectividad***

Septiembre de 2011, propuesta B, 1)

Septiembre de 2012, propuesta A, 1)

Junio de 2016, propuesta B, 1)

Junio de 2018, propuesta A, 1)

Junio de 2023, 2)

# 2. TEOREMA DEL VALOR MEDIO (LAGRANGE)

El teorema del valor medio es uno de los resultados más útiles del Cálculo. Su utilidad se debe principalmente a que dicho teorema permite acotar el incremento de una función cuando se conoce una cota de su derivada.

**Teorema del valor medio (de Lagrange):**

Si $f(x)$ es una función continua en $[a,b]$ y derivable en $(a,b)$, entonces $\exists c \in (a,b)$ tal que:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

(igualdad que puede escribirse en la forma:

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

y que se conoce con el nombre de **fórmula de los incrementos finitos**).

Demostración:

Considermos la función $f$ menos la recta que pasa por $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$, esto es,

$$g(x) = f(x) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)\right]$$

Es inmediato que $g$ cumple las hipótesis del teorema de Rolle, luego $\exists c \in (a,b)$ tal que $g'(c) = 0$.

Ahora bien,

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

y, como consecuencia,

$$0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \Rightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

C.Q.D.

***Ejemplo:***

La función $f(x) = x^3 - 6x$ es continua y derivable en $\mathbb{R}$ (por ser una función polinómica), luego en particular en $[-2,1]$ y, por tanto, $\exists c \in (-2,1)$ tal que $\frac{f(1) - f(-2)}{1-(-2)} = f'(c)$.

En efecto, $\frac{-5-4}{1-(-2)} = 3x^2 - 6 \Rightarrow -3 = 3x^2 - 6 \Rightarrow x = \pm 1$. El valor que cumple el teorema es $c = -1$.

***Ejemplo:***

Vamos a comprobar si la función $f(x) = \sqrt[3]{x^4}$ verifica el teorema del valor medio de Lagrange en el intervalo $[-1,1]$. En caso afirmativo, vamos a determinar, de forma razonada, el punto (o puntos) cuya existencia afirma dicho teorema.

Se tiene que:

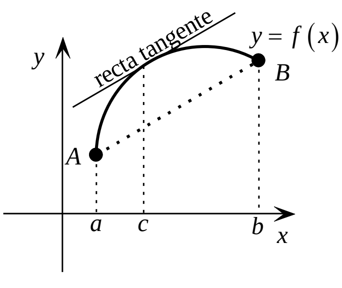
- $f$ es continua en $\mathbb{R}$ (por ser composición de funciones continuas) $\Rightarrow f$ continua en $[-1,1]$
- $f$ es derivable en $\mathbb{R}$ (por ser composición de funciones derivables) $\Rightarrow f$ derivable en $(-1,1)$

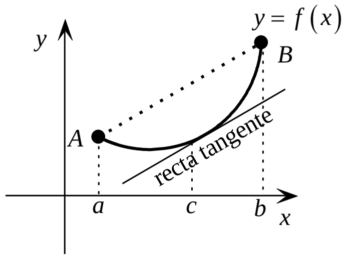
Así, por el teorema del valor medio de Lagrange, $\exists c \in (-1,1)$ tal que

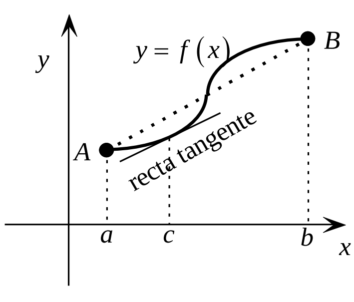
$$f'(c) = \frac{f(1) - f(-1)}{1-(-1)} = \frac{\sqrt[3]{1^3} - \sqrt[3]{(-1)^3}}{2} = 0$$

Ahora bien, como $f'(x) = \frac{4}{3}x^{1/3}$ se anula en $x = 0$, se tiene que $c = 0$.

***Interpretación geométrica:*** Si se cumplen las hipótesis del teorema en el intervalo $[a,b]$, existe al menos un punto $c \in (a,b)$ en el que su recta tangente es paralela al segmento determinado por los puntos $A(a, f(a))$ y $B(b, f(b))$.



***Interpretación física:*** Si $x$ representa el tiempo y $f(x)$ la posición de un móvil sobre una recta, entonces $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ representa la velocidad media en el intervalo de tiempo $[a,b]$, y $f'(c)$ la velocidad instantánea en el instante $c$. El teorema afirma que la velocidad media es alcanzada al menos en un instante del tiempo transcurrido entre $a$ y $b$.

## *Ejemplo:*

¿Verifica la función $f(x)=x^2-2x$ las hipótesis del teorema de Lagrange en el intervalo $[0,6]$? En caso afirmativo, hallar el punto en el que la recta tangente a la gráfica de $f$ es paralela a la recta que pasa por los puntos $A(0,0)$ y $B(6,24)$.

Como $f$ es una función polinómica, es derivable en $\mathbb{R}$, luego es continua en $[0,6]$ y derivable en $(0,6)$, por lo que, aplicando el teorema de Lagrange,

$$\exists c\in(0,6) \text{ tal que } f'(c)=\frac{f(6)-f(0)}{6-0}$$

Ahora bien, $f'(c)=2c-2$ y $\dfrac{f(6)-f(0)}{6-0}=\dfrac{24}{6}=4$, luego $2c-2=4\Rightarrow c=3\in(0,6)$.
Así, el punto buscado es $C(3,f(3))=(3,3)$.

## *Ejercicios de Selectividad*

Reserva 2 de 2007, primer bloque, A) | Reseva 1 de 2008, primer bloque, A)
Reserva 1 de 2012, propuesta A, 1) | Reserva 2 de 2013, propuesta B, 1)

**Consecuencias:**

**(1)** ***Caracterización de las funciones constantes***

Si $f(x)$ es una función continua en $[a,b]$, derivable en $(a,b)$, y $\exists c\in(a,b)$ tal que $f'(c)=0 \quad \forall c\in(a,b)$, entonces la función $y=f(x)$ es constante en $[a,b]$.

Demostración:

Sea $x\in[a,b]$. Como $f'(c)=0 \quad \forall c\in(a,b)$, aplicando el TVM a $f(x)$ en el intervalo $[a,x]$, se tiene que $f(x)-f(a)=f'(c)(x-a)$ con $c\in(a,x)$, pero como $f'(c)=0$, resulta que $f(x)=f(a)$ para cualquier $x\in[a,b]$. Como consecuencia, la función es constante en el intervalo $[a,b]$. C.Q.D.

**(2)** ***Diferencia de dos funciones con igual derivada***

Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones continuas en $[a,b]$ y derivables en $(a,b)$, tales que $f'(x)=g'(x) \quad \forall x\in(a,b)$, entonces las funciones $f(x)$ y $g(x)$ se diferencian en una constante, esto es: $f(x)=g(x)+cte$

Demostración:

Consideramos la función $h(x)=f(x)-g(x)$, que es continua en $[a,b]$, derivable en $(a,b)$ y tal que

$$h'(x)=f'(x)-g'(x)=0 \quad \forall x\in(a,b)$$

Aplicando la consecuencia (1), se tiene que

$$h(x)=c\in\mathbb{R}$$

y, como consecuencia,

$$h(x)=f(x)-g(x)=c$$

C.Q.D.

# 3. TEOREMA DE CAUCHY

El teorema de Cauchy del valor medio generalizado aparece en su «*Cours d'Analyse*» (1821) y, permite, entre otros, demostrar la regla de L´Hôpital, que usaremos para resolver indeterminaciones en el cálculo de límites.

**Teorema de Cauchy (o del valor medio generalizado):**

Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones continuas en $[a,b]$ y derivables en $(a,b)$, entonces $\exists c\in(a,b)$ tal que:

$$g'(c)\left[f(b)-f(a)\right]=f'(c)\left[g(b)-g(a)\right]$$

Demostración:

Consideramos la función $h:[a,b]\to\mathbb{R}$ definida por

$$h(x)=\begin{vmatrix}1 & f(x) & g(x)\\ 1 & f(a) & g(a)\\ 1 & f(b) & g(b)\end{vmatrix}$$

que verifica:

v) $h$ es continua en $[a,b]$ y derivable en $(a,b)$.

vi) $h(a)=h(b)=0$

Entonces, por el teorema de Rolle, $\exists c\in(a,b)$ tal que $h'(c)=0$, y como

$$h'(c)=\left(f(b)-f(a)\right)g'(c)-\left(g(b)-g(a)\right)f'(c)=0$$

Resulta que

$$\left(f(b)-f(a)\right)g'(c)=\left(g(b)-g(a)\right)f'(c)$$

C.Q.D.

***Ejemplo:***

¿Verifican las funciones $f(x)=x^2+2x+1$ y $g(x)=x^3-2x-1$ el teorema de Cauchy en el intervalo $[-2,1]$? En caso afirmativo, determinar el punto en el que se verifica.

Las funciones $f$ y $g$ son derivables en $\mathbb{R}$, luego son continuas en $[-2,1]$ y derivables en $(-2,1)$. Además, $g(-2) \neq g(1)$, luego por el teorema de Cauchy,

$$\exists c \in (a,b) \text{ tal que } g'(c)\left[f(b)-f(a)\right]=f'(c)\left[g(b)-g(a)\right]$$

Vamos a determinar $c$:

$$\left\{\begin{array}{l} f'(x)=2x+2 \to f'(c)=2c+2 \\ g'(x)=3x^2-2 \to g'(c)=3c^2-2 \\ f(1)=4 \text{ y } f(-2)=1 \\ g(1)=-2 \text{ y } g(-2)=-5 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} g'(c)\left[f(b)-f(a)\right]=f'(c)\left[g(b)-g(a)\right] \\ \text{que escribimos en la forma} \\ \dfrac{f'(c)}{g'(c)}=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \end{array}\right. \Rightarrow$$

$\Rightarrow \dfrac{4-1}{-2-(-5)}=\dfrac{2c+2}{3c^2-2} \Rightarrow 3c^2-2c-4=0 \Rightarrow c=\dfrac{1\pm\sqrt{3}}{3}$, pero la única solución que está en el intervalo dado es $c=\dfrac{1-\sqrt{3}}{3} \in (-2,1)$

# 4. REGLAS DE L'HÔPITAL

En este apartado aplicaremos el teorema del valor medio generalizado de Cauchy para dar un método muy poderoso para calcular límites indeterminados conocido como «Regla de L'Hôpital».
**Guillaume François Antoine de L'Hôpital** (1661-1704), publicó anónimamente en 1696 el primer libro de texto sobre cálculo diferencial, el cual tuvo gran éxito e influencia durante el siglo XVIII. En él aparecen los resultados que hoy llevan su nombre, que permiten resolver en muchos casos indeterminaciones de la forma $0:0$ o $\infty:\infty$, que se presentan frecuentemente al estudiar el límite de un cociente de dos funciones. Si bien L'Hôpital era un escritor excepcionalmente claro y eficaz, las llamadas «reglas de L'Hôpital» no se deben a él sino a su maestro **Jean Bernouilli** (1667-1748) quien las incluyó en el primer texto de Cálculo Diferencial que se conoce (impreso en 1724). Sin embargo, L'Hôpital ya las había publicado en su «*Analyse des infiniment petits*», publicado por él en París en 1696.

**REGLA DE L'HÔPITAL PARA $\frac{0}{0}$:**

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones derivables en un entorno $E$ de $a$ y tales que:

1) $f(a)=g(a)=0$
2) $g'$ no se anula en $E$

Si existe el límite finito $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, entonces existe también $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, y, además:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Demostración:

Como $f(a)=g(a)=0$, podemos elegir $x\in E$ y escribir, $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}$, por lo que podemos aplicar el teorema de Cauchy al intervalo $[a,x]$ (o al $[x,a]$, según se tome $x$). Como en particular $g(x)-g(a)\neq 0$, ya que si no $g(x)=g(a)$, y por el teorema de Rolle, $g'$ se anularía en algún punto de $(a,x)$, en contra de las hipótesis de la regla de L'Hôpital.
Así, $\exists c_x\in(a,x)$ tal que

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} \qquad [1]$$

Ahora bien, por hipótesis, $\exists\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=L$. Demostremos que $\exists\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=L$.

En efecto, para cualquier $\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$ tal que $\forall x:|x-a|<\delta$, se verifica que

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)}-L\right|<\varepsilon \qquad [2]$$

Como $c_x\in(a,x)$, siempre que $|x-a|<\delta$, se tiene que $|c_x-a|<\delta$, y teniendo en cuenta [2], se verifica que $|x-a|<\delta$ y, por tanto,

$$\left|\frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}-L\right|<\varepsilon$$

Lo que prueba que $\exists\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(c_x)}{g'(c_x)}=L$. Así, teniendo en cuenta [1], resulta que

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} \qquad \text{C.Q.D.}$$

## ***Ejemplos:***

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{1}=\dfrac{1}{1}=1$

2) $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{4}}\dfrac{3\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg} x-2}{2\operatorname{tg}^2 x+5\operatorname{tg} x+3}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{4}}\dfrac{6\operatorname{tg} x\left(1+\operatorname{tg}^2 x\right)+1+\operatorname{tg}^2 x}{4\operatorname{tg} x\left(1+\operatorname{tg}^2 x\right)+5\left(1+\operatorname{tg}^2 x\right)}=\dfrac{-10}{2}=-5$

***Otras formas de la regla de L'Hôpital***:
El esquema

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

es válido para $x\to a$, $x\to a+$, $x\to a-$, $x\to+\infty$ y $x\to-\infty$, tanto si la indeterminación es del tipo $\dfrac{0}{0}$, como si es de la forma $\dfrac{\infty}{\infty}$, e independientemente de que el límite sea finito o infinito.

## ***Ejemplos:***

**1)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{e^x+e^{-x}}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{e^x-e^{-x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{e^x+e^{-x}}=\left[\dfrac{2}{+\infty+0}\right]=\left[\dfrac{2}{\infty}\right]=0$

**2)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\log x}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ ($\log$ es el logarimo natural)

**3)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{e^x}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{e^x}=\left[\dfrac{2}{\infty}\right]=0$

**4)** $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\log x}{x-\sqrt{x}}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$

**Indeterminación** $[0\cdot\infty]$: para transformarla en una de la forma $\dfrac{0}{0}$ o $\dfrac{\infty}{\infty}$ tendremos en cuenta que:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)g(x)\right]=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$$

***Ejemplos:***

$$\lim_{x\to0}(1-\cos x)\operatorname{cotg}x=[0\cdot\infty]=\lim_{x\to0}(1-\cos x)\frac{1}{\operatorname{tg}x}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\operatorname{tg}x}=\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{sen}x}{1+\operatorname{tg}^2x}=\frac{0}{1}=0$$

$$\lim_{x\to0+}x\log x=[0\cdot\infty]=\lim_{x\to0+}\frac{\log x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0+}x=0$$

***Indeterminación*** $[\infty-\infty]$: puede resolverse utilizando la regla de L' Hôpital; para ello, se suelen realizar las operaciones indicadas, obteniéndose indeterminaciones de la forma $\dfrac{0}{0}$ o $\dfrac{\infty}{\infty}$.

***Ejemplo:***

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x}\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to0}\frac{x-e^x+1}{x(e^x-1)}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to0}\frac{1-e^x}{xe^x+e^x-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to0}\frac{-e^x}{xe^x+2e^x}=-\frac{1}{2}$$

***Indeterminaciones*** $\left[\infty^0,\ 0^0 \text{ y } 1^\infty\right]$: para aplicar la regla de L'Hôpital, las transformamos en la forma $0\cdot\infty$ teniendo en cuenta que:

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to a} e^{g(x)\cdot \log f(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\cdot \log f(x)}$$

donde $\log$ representa el logaritmo natural.

## ***Ejemplos:***

**1)** $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(x^2+4\right)^{\frac{1}{\ln x}} = \left[\infty^0\right] = \lim\limits_{x\to +\infty} e^{\frac{1}{\ln x}\ln\left(x^2+4\right)} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\ln x}\ln\left(x^2+4\right)} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(x^2+4\right)}{\ln x}} = e^{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x}{x^2+4}}{\frac{1}{x}}} =$

$= e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{x^2+4}} = e^{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4x}{2x}} = e^2$

**2)** $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x = \left[0^0\right] = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x^x} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x^x} = e^{[0\cdot\infty]} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}} = e^{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+}(-x)} = e^0 = 1$

$\lim\limits_{x\to 0^+} x^x = \left[0^0\right] = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{x\log x} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} x\log x} = e^0 = 1$ (donde hemos usado que $\lim\limits_{x\to 0+} x\log = 0$)

**3)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} = e^{[\infty\cdot 0]} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}} = e^{\left[\frac{0}{0}\right]} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{\frac{-1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x^2}}} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x}}} =$

$= e^1 = e$

## ***Ejemplos: (Límites que no se puede resolver por L´Hôpital)***

**a)** El siguiente límite no puede resolverse aplicando la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \left(\text{aplicando L'Hôpital}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

$$= \left(\text{aplicando L'Hôpital}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$$

que es el límite que queríamos resolver.

Sin embargo, este límite se calcula como sigue:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}}{\frac{x}{x}} = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{1+x^2}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{1}{x^2}+1} = \sqrt{0+1} = 1$$

**b)** Este otro límite tampoco puede resolverse aplicando la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\operatorname{sen}\frac{1}{x}}{\log x}$$

Este límite presenta una indeterminación del tipo $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, pero la utilización de la regla de L'Hôpital no la resuelve (¡¡Inténtalo!!). Sin embargo, su resolución no es difícil:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\operatorname{sen}\frac{1}{x}}{\log x}=\lim_{x\to+\infty}\left(x\operatorname{sen}\frac{1}{x}\right)\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\log x}=+\infty$$

ya que $\lim_{x\to+\infty}\left(x\operatorname{sen}\frac{1}{x}\right)=1$ y $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\log x}=+\infty$.

**c)** Calcular $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+\operatorname{sen}x}{e^x+\cos x}$

Se presenta una inderteminación del tipo $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, pero aplicando la regla de L'Hôpital se entra en un bucle infinito. Sin embargo, dividiendo numerador y denominador por $e^x$ obtenemos:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+\operatorname{sen}x}{e^x+\cos x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{e^x+\operatorname{sen}x}{e^x}}{\frac{e^x+\cos x}{e^x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{\operatorname{sen}x}{e^x}}{1+\frac{\cos x}{e^x}}=1$$

ya que $\lim_{x\to+\infty}\frac{\operatorname{sen}x}{e^x}=0=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cos x}{e^x}$.

**d)** Para calcular $\lim_{x\to 0}x\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ no se puede aplicar L'Hôpital, y sin embargo, dicho límite no es difícil de calcular, ya que $\lim_{x\to 0}x=0$ y $\left|\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right|\le 1$ (es una función acotada), luego

$$\lim_{x\to 0}x\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)=0$$

***Ejemplo:***

Calculamos las asíntotas de la siguiente función: $f(x)=\frac{2xe^x}{e^x-1}$

Asíntotas verticales:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2xe^x}{e^x-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{2e^x+2xe^x}{e^x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x(2+2x)}{e^x}=\lim_{x\to 0}(2+2x)=2\Rightarrow f \text{ no tiene A.V.}$$

Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2xe^x}{e^x-1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{2e^x+2xe^x}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x(2+2x)}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}(2+2x)=+\infty\Rightarrow f \text{ no tiene A.H. en } +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2xe^x}{e^x-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{2x}{e^{-x}}}{e^x-1}=\frac{0}{-1}=0\Rightarrow f \text{ tiene una A.H. en } -\infty\text{, que es } y=0$$

Asíntotas oblicuas:

a) $$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2xe^x}{e^x-1}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2e^x}{e^x-1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{2e^x}{e^x}=2$$

$$n=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2e^x}{e^x-1}-2x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2e^x-2x\left(e^x-1\right)}{e^x-1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2xe^x-2xe^x+2x}{e^x-1}\right)=$$

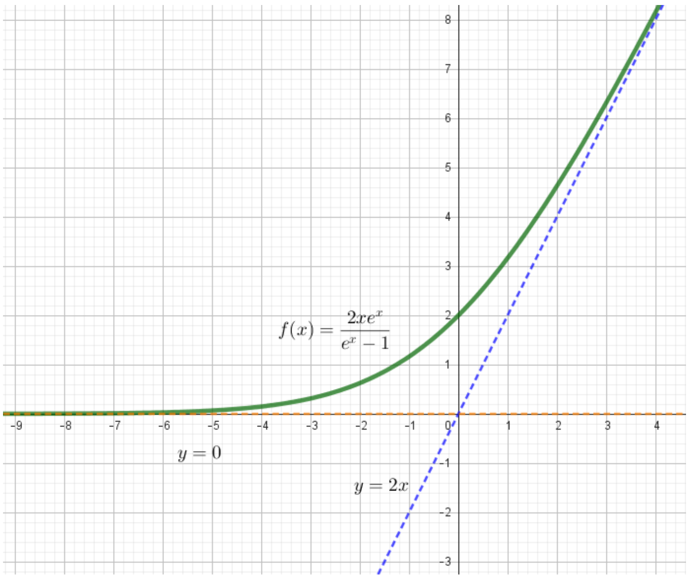
$$=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x}=0$$

Por tanto, la recta $y=2x$ es una A.O.

b) $$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{2xe^x}{e^x-1}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2e^x}{e^x-1}=0$$

$$n=\lim_{x\to-\infty}\frac{2xe^x}{e^x-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{2x}{e^{-x}}}{e^x-1}=\frac{0}{-1}=0$$

Por tanto, la recta $y=0$ es una A.H. en $-\infty$.




## ***Ejercicio:***

**183.** Calcula el valor de los parámetros para que las siguientes funciones sean continuas en $x=0$, y para dichos valores, estudia su derivabilidad en dicho punto:

a) $$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x\cos x-a\,\text{sen}\,x}{x^3} & \text{si} \quad x<0\\ b\cos x.1 & \text{si} \quad x\geq 0\end{cases}$$

b) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x - xe^x}{x^2-2\cos x+2} & \text{si} \quad x\neq 0 \\ a & \text{si} \quad x=0 \end{cases}$

## *Ejercicios de Selectividad de las reglas de L'Hôpital*

Junio de 2003, segundo bloque, A)
Junio de 2005, segundo bloque, B)
Junio de 2008, primer bloque, A, b)
Reserva 1 de 2011, propuesta B, 1, b)
Septiembre de 2015, propuesta A, 1)
Junio de 2017, propuesta B, 1, b)
Junio de 2019, propuesta B, 1)
Julio de 2020, 3, b)
Septiembre de 2020, 3, a)
Junio de 2021, 7, a)
Julio de 2021, 5, a)
Junio de 2024, 4, a)

## *Ejercicios de Selectividad de continuidad (uso de las reglas de L'Hôpital)*

Reserva 2 de 2003, tercer bloque, A)
Septiembre de 2006, primer bloque, A)
Junio de 2007, primer bloque, A)
Septiembre de 2010, propuesta A, 1)
Septiembre de 2013, propuesta A, 1a)
Julio de 2020, 3)

***Curiosidad:***

$$V_{\text{esfera}}(r)=\frac{4}{3}\pi r^3 \xrightarrow{\frac{d}{dr}} V'_{\text{esfera}}(r)=\frac{4}{3}3\pi r^2=4\pi r^2=A_{\text{esfera}}(r)$$

$$A_{\text{círculo}}(r)=\pi r^2 \xrightarrow{\frac{d}{dr}} A'_{\text{círculo}}(r)=2\pi r=L_{\text{circunferencia}}(r)$$

Mates Mike: ¿Por qué la derivada del volumen de una esfera es su área?
https://www.youtube.com/watch?v=5Ri2vx4MVQc

# Unidad 10:
# PRIMITIVAS E INTEGRALES INDEFINIDAS

## 1. CONCEPTO DE PRIMITIVA

### PRIMITIVAS

**Definición:**

Sean $f: D \to \mathbb{R}$ y $F: D \to \mathbb{R}$ funciones reales de variable real. Se dice que $F$ es una **primitiva** de $f$ cuando

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in D.$$

### *Ejemplos:*

1) $F(x) = 5x$ es una primitiva de $f(x) = 5$, ya que, $F'(x) = 5 = f(x)$
2) $F(x) = \frac{x^2}{2}$ es una primitiva de $f(x) = x$, ya que, $F'(x) = \frac{1}{2}2x = x = f(x)$

### *Ejercicios:*

***184.*** *Comprueba, en cada caso, que F es una primitiva de f:*

1) $F(x) = \sqrt[4]{x^4 - 2} - 287$ $\qquad f(x) = \frac{x^3}{\sqrt[4]{(x^4-2)^3}}$

2) $F(x) = \frac{1}{x+1} + \ln\left(\frac{1}{x+1}\right)$ $\qquad f(x) = \frac{-x-2}{(1+x)^2}$

3) $F(x) = \frac{(x^2+1)^6}{6}$ $\qquad f(x) = 2x(x^2+1)^5$

***185.*** *Calcula una primitiva de las siguientes funciones:*

1) $y = x$
2) $y = x^2$
3) $y = x^3$
4) $y = 5x^4 - 2$
5) $y = \text{sen } x$
6) $y = e^{2x}$
7) $y = \frac{1}{x}$
8) $y = -\cos x$

***186.*** *Halla la primitiva de* $f(x) = e^{2x}$ *que valga e para* $x = 0$.

Nótese que si una función $f$ tiene una primitiva $F$ también $F + k$ (siendo $k \in \mathbb{R}$) es una primitiva de $f$.

Al conjunto de todas las primitivas de una función dada $f$, lo representaremos por

$$\int f(x)\,dx = \{F : F \text{ es una primitiva de } f\} = \{F : F'(x) = f(x)\}$$

y se lee: **integral indefinida de *f***.

$$\boxed{\int f(x)\,dx = F(x) \text{ significa que } F'(x) = f(x)}$$

El signo $\int$ (S de «suma») fue propuesto por Leibniz en una carta a Henry Oldenburg, secretario de la Royal Society, escrita en 1675. «Será útil, sugería Leibniz, escribir dicho signo en lugar de omn, que se usaba hasta entonces para indicar la integración»:

$$\text{omn } x^2 = \int x^2 \text{ d}x$$

Posteriormente, en 1690, Jacques Bernoulli (Jacques I) sugirió el nombre de «integral» a Leibniz.

## ***Ejercicio resuelto:***

Halla una función $f$ sabiendo que

$$\int f(x)\,dx = \ln\frac{(x-1)^2}{(x+2)^2} + K$$

Lo que nos están diciendo es que $F(x) = \ln\frac{(x-1)^2}{(x+2)^2} + K$ es una primitiva de $f(x)$ y, por tanto, $F'(x) = f(x)$:

$$f(x) = \left[\ln\frac{(x-1)^3}{(x+2)^2} + K\right]' = \frac{1}{\frac{(x-1)^3}{(x+2)^2}} \cdot \frac{(x+8)(x-1)^2}{(x+2)^3} = \frac{(x+2)^2(x+8)(x-1)^2}{(x-1)^3(x+2)^3} = \frac{x+8}{(x-1)(x+2)}$$

Esta derivada también se puede calcular aplicando las propiedades de los logaritmos:

$$f(x) = \left[\ln\frac{(x-1)^3}{(x+2)^2} + K\right]' = \left[\ln(x-1)^3 - \ln(x+2)^2 + K\right]' = \left[3\ln(x-1) - 2\ln(x+2) + K\right]' =$$

$$= 3\frac{1}{x-1} - 2\frac{1}{x+2} = \frac{3(x+2) - 2(x-1)}{(x-1)(x+2)} = \frac{x+8}{(x-1)(x+2)}$$

**<u>Propiedades inmediatas:</u>**

(1) $\left[\int f(x)\,dx\right]' = f(x)$

La derivada de la integral indefinida es la función integrando, esto es, la derivada y la integral indefinida son operaciones inversas.

(2) $\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

La integral de una suma es igual a la suma de las integrales de los sumandos.

*En efecto:*
Si $F$ y $G$ son primitivas de $f$ y $g$, respectivamente, entonces $F' = f$ y $G' = g$, y como $(F+G)' = F' + G'$, resulta que

$$\int \left( f(x) + g(x) \right) dx = (F+G)(x) + k = F(x) + k_1 + G(x) + k_2 = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

(3) $\int c \cdot f(x)\,dx = c \cdot \int f(x)\,dx \quad$ con $c \in \mathbb{R}$

La integral de un número real por una función es igual al número real por la integral de la función.

*En efecto:*
Si $F$ es una primitiva de $f$, se tiene que $F' = f$, y como $(c \cdot f)' = c \cdot f'$, resulta que

$$\int c \cdot f(x)\,dx = \left( cF(x) \right) + k = cF(x) + k = c\left( F(x) + k_1 \right) = c \cdot \int f(x)\,dx \quad \text{con } c \in \mathbb{R}$$

donde $ck_1 = k$.

## 2. TABLAS DE INTEGRALES

La siguiente tabla de integrales inmediatas se obtiene calculando la correspondiente primitiva de la función, por lo que es muy importante no perder nunca de vista de dónde han salido esas integrales, esto es, el concepto de primitiva de una función. Ahora bien, como se suelen usar mucho y son la base para calcular otras integrales más complejas es conveniente memorizar dicha tabla.

**Funciones simples**

| | **Forma simple** |
|---|---|
| **Potencial** $n \neq -1$ | $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + k$ |
| **Logarítmico** | $\int \dfrac{1}{x} dx = \ln\lvert x\rvert + k$ |
| **Exponencial** | $\int e^x dx = e^x + k$<br>$\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + k$ |
| **Seno** | $\int \cos x dx = \operatorname{sen} x + k$ |
| **Coseno** | $\int \operatorname{sen} x dx = -\cos x + k$ |
| **Tangente** | $\int \sec^2 x dx = \operatorname{tg} x + k$<br>$\int \left(1 + \operatorname{tg}^2 x\right) dx = \operatorname{tg} x + k$<br>$\int \dfrac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + k$ |

| | |
|---|---|
| **Cotangente** | $\int \text{cosec}^2 x dx = -\text{cotg } x + k$<br>$\int \left(1+\text{cosec}^2 x\right) dx = -\text{cotg } x + k$<br>$\int \frac{1}{\text{sen}^2 x} dx = -\text{cotg } x + k$ |
| **Arco seno**<br>**= – arco coseno** | $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \text{arcsen } x + k$ |
| **Arco tangente**<br>**= – Arco cotangente** | $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \text{arctg } x + k$<br>$\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a} \text{arctg} \frac{x}{a} + k$ |

<u>**Funciones compuestas**</u>

| | **Forma compuesta** |
|---|---|
| **Potencial**<br>$n \neq -1$ | $\int f'(x) f(x)^n dx = \frac{f(x)^{n+1}}{n+1} + k$ |
| **Logarítmico** | $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln\left\|f(x)\right\| + k$ |
| **Exponencial** | $\int e^{f(x)} f'(x) dx = e^{f(x)} + k$<br>$\int a^{f(x)} f'(x) dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + k$ |
| **Seno** | $\int \cos f(x) \cdot f'(x) dx = \text{sen } f(x) + k$ |
| **Coseno** | $\int \text{sen } f(x) \cdot f'(x) dx = -\cos f(x) + k$ |
| **Tangente** | $\int \sec^2 f(x) \cdot f'(x) dx = \text{tg } f(x) + k$<br>$\int \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)} dx = \text{tg } f(x) + k$ |
| **Cotangente** | $\int \text{cosec}^2 f(x) \cdot f'(x) dx = -\text{cotg } f(x) + k$<br>$\int \left(1+\text{cosec}^2 f(x)\right) f'(x) dx = -\text{cotg } f(x) + k$<br>$\int \frac{f'(x)}{\text{sen}^2 f(x)} dx = -\text{cotg } f(x) + k$ |
| **Arco seno**<br>**= arco coseno** | $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}} dx = \text{arcsen } f(x) + k$ |

| | |
|---|---|
| **Arco tangente = – Arco cotangente** | $\int \frac{f'(x)}{1+f(x)^2}dx = \text{arctg } f(x)+k$<br>$\int \frac{f'(x)}{a^2+f(x)^2}dx = \frac{1}{a}\text{arctg}\frac{f(x)}{a}+k$ |
| **Arcotangente** | $\int \frac{1}{ax^2+c}dx = \frac{1}{\sqrt{ac}}\text{arctg}\left(\sqrt{\frac{a}{c}}x\right)+k$<br>$ax^2+bx+c$ irreducible |
| **Arcotangente** | $\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx = \text{arcotangente}+k$<br>$ax^2+bx+c$ irreducible<br>El objetivo es expresar el denominador en la forma $(mx+n)^2+1$ |
| **Neperiano + Arco tangente** | $\int \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}dx = \text{neperiano}+\text{arco tangente}+k$<br>$M\neq 0,\quad ax^2+bx+c$ irreducible<br>El objetivo es utilizar el término $Mx$ para obtener una expresión semejante a la derivada del denominador. |

## *Ejercicio:*

***187.*** *Calcula las siguientes integrales inmediatas:*

1) $\int (x^3+2x-1)dx$

2) $\int \frac{2}{x}dx$

3) $\int \frac{1}{2}e^x dx$

4) $\int (x+1)^2 dx$

5) $\int \frac{1}{x^3}dx$

6) $\int \frac{1}{2+2x^2}dx$

7) $\int \frac{x^3+5x^2+x-4}{x}dx$

8) $\int 10^x dx$

9) $\int \left(\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{\text{sen}^2 x}\right)dx$

12) $\int \frac{1}{6+6x^2}dx$

13) $\int \frac{9}{9x^2+9}dx$

14) $\int \sqrt[6]{x}dx$

15) $\int \sqrt[3]{x^2}dx$

16) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx$

17) $\int \frac{1}{\sqrt[6]{x^5}}dx$

18) $\int \frac{1}{\sqrt{8x}}dx$

19) $\int \sqrt[3]{5x^2}dx$

20) $\int \left(\frac{1}{x}+\frac{7}{x^2}-8\right)dx$

10) $\int \left(2^x - x^2\right) \, \mathrm{d}x$

11) $\int \dfrac{4}{1-\operatorname{sen}^2 x} \, \mathrm{d}x$

21) $\int \dfrac{4}{\sqrt{1-x^2}} \, \mathrm{d}x$

22) $\int \dfrac{2^x}{3^x} \, \mathrm{d}x$

## ***Ejemplos (de tipo arco):***

1) $\displaystyle\int \frac{1}{3x^2+3}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{3}\operatorname{arctg} x + C$

2) $\displaystyle\int \frac{dx}{6x^2+3} = \int \frac{dx}{\frac{6}{3}x^2+\frac{3}{3}} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\frac{6}{3}x^2+1} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\left(\sqrt{\frac{6}{3}}x\right)^2+1} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\left(\sqrt{2}x\right)^2+1} = \frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}x\right) + C =$

$\displaystyle= \frac{\sqrt{2}}{6}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}x\right) + C$

3) $\displaystyle\int \frac{5}{2+x^2}\,dx = \frac{5\sqrt{2}}{2}\int \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}\,dx = \frac{5\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C$

4) $\displaystyle\int \frac{3x}{4+x^2}\,dx = 3\int \frac{x}{4+\left(\frac{x^2}{2}\right)^2}\,dx = \frac{3}{4}\int \frac{x}{1+\left(\frac{x^2}{2}\right)^2}\,dx = \frac{3}{4}\operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{2}\right) + C$

5) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-4x+13} = \int \frac{1}{(x-2)^2+9}\,dx = \int \frac{\frac{1}{9}}{\left(\frac{x-2}{3}\right)+1}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{\frac{1}{3}}{\left(\frac{x-2}{3}\right)+1}\,dx = \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{x-2}{3}\right) + C$

6) $\displaystyle\int \frac{3dx}{4x^2-2x^2+1} = \int \frac{3dx}{(2x-1)^2+4} = \frac{3}{4}\int \frac{dx}{\left(\frac{2x-1}{2}\right)^2+1} = \frac{3}{4}\int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+1} = \frac{3}{4}\operatorname{arctg}\left(x-\frac{1}{2}\right) + C$

7) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-5x+11}\,dx = \int \frac{dx}{\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\left(11-\frac{25}{4}\right)} = \int \frac{dx}{\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{19}{4}} = \frac{1}{\frac{19}{4}}\int \frac{dx}{\left(\frac{x-\frac{5}{2}}{\sqrt{\frac{19}{4}}}\right)^2+1} =$

$\displaystyle= \frac{4}{19}\sqrt{\frac{19}{4}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x-5}{\sqrt{19}}\right) + C$

8) $\int \frac{2x+7}{x^2-5x+11}dx = \int \frac{(2x-5)+(5+7)}{x^2-5x+11}dx = \int \frac{2x-5}{x^2-5x+11}dx + \int \frac{12}{x^2-5x+11}dx =$

$= \ln\left|x^2-5x+11\right| + 12\frac{2\sqrt{19}}{19}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x-5}{\sqrt{19}}\right) + C$

9) $\int \frac{5}{\sqrt{9-x^2}}dx = \int \frac{\frac{5}{3}}{\sqrt{1-\frac{4x^2}{9}}}dx = \frac{5}{3}\cdot\frac{3}{2}\int \frac{\frac{2}{3}}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{3}\right)^2}}dx = \frac{5}{2}\operatorname{arcsen}\left(\frac{2x}{3}\right) + C$

# 3. MÉTODOS DE INTEGRACIÓN

## 3.1. Integración por cambio de variable

**Integración por cambio de variable:**

Siempre que en un integrando reconozcamos una expresión del tipo $g'(f(x))f'(x)$ el cambio de variable proporcionará buenos resultados. El cambio que hay que hacer es: $\begin{cases} t = f(x) \\ dt = f'(x)dx \end{cases}$

***Ejemplos:***

**1)** $\int \frac{\log(x^2)}{x}dx = \begin{bmatrix} t = \log(x^2) \\ dt = \frac{2}{x}dx \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\int t\,dt = \frac{1}{2}t^2 = \frac{1}{2}\log^2(x^2) + C$, donde $\log = \ln$

**2)** $\int \frac{x^2}{x^3+1}dx = \begin{bmatrix} t = x^3+1 \\ dt = 3x^2dx \Rightarrow \frac{1}{3}dt = x^2dx \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\int \frac{1}{t}dt = \frac{1}{3}\log|t| = \frac{1}{3}\log\left|x^3+1\right| + C$

**3)** $\int \frac{3^x}{\sqrt{1-9^x}}dx = \begin{bmatrix} t = 3^x \\ dt = 3^x\log 3dx \Rightarrow 3^x dx = \frac{dt}{\log 3} \end{bmatrix} = \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\frac{1}{\log 3}dt = \frac{1}{\log 3}\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt =$

$= \frac{1}{\log 3}\operatorname{arcsen} t = \frac{1}{\log 3}\operatorname{arcsen} 3^x + C$

**4)** $\int \frac{\log(\log x)}{x\log x}dx = \begin{bmatrix} t = \log x \\ dt = \frac{1}{x}dx \end{bmatrix} = \int \frac{\log t}{t}dt = \frac{\log^2 t}{2} = \frac{\log^2(\log x)}{2} + k$

***Ejercicio:***

**188.** *Calcula las siguientes integrales, por cambio de variable:*

1) $\int \sqrt[3]{5x^2-10x}\cdot(10x-10)\,dx$

2) $\int \sqrt{x^2+1}\cdot x\,dx$

3) $\int \operatorname{tg} x\,dx$

4) $\int x\sqrt{1+3x^2}\,dx$

5) $\int x^2 e^{x^3}\,dx$

6) $\int (5x+1)^4\,dx$

7) $\int (e^x+1)^3 e^x dx$

8) $\int \frac{x}{(x^2+1)^2}dx$

9) $\int x\operatorname{sen}(x^2+4)\,dx$

10) $\int \frac{x^2}{x^3+2}dx$

11) $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$

12) $\int \frac{x}{1+(x^2+4)^2}dx$

13) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-(x^3-1)^2}}dx$

14) $\int e^{\ln x}\frac{1}{x}dx$

15) $\int e^{-3x}dx$

16) $\int x^2 \operatorname{sen} x^3 dx$

17) $\int \frac{2x}{1+x^4}dx$

18) $\int \frac{1}{1+(x+1)^2}dx$

19) $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$

20) $\int \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

## 3.2. <u>Integración por partes</u>

**<u>Teorema (fórmula de integración por partes):</u>**

Sean $D\subseteq\mathbb{R}$ un intervalo y $f$ y $g$ dos funciones con derivadas continuas en $D$. Entonces:

$$\int fg' = fg - \int f'g$$

<u>Demostración:</u>
Partiendo de la fórmula de la derivada de un producto,

$$(fg)' = f'g + fg'$$

e integrando ambos miembros, se obtiene que:

$$\int (fg)' = \int f'g + \int fg' \Rightarrow fg = \int f'g + \int fg' \Rightarrow$$

y despejando:

$$\int fg' = fg - \int f'g$$

C.Q.D.

Sin embargo, la fórmula de integración por partes se suele escribir como sigue:

**<u>Fórmula de integración por partes:</u>**

En los cálculos se procede como sigue:

$$u = f(x) \xrightarrow{\text{derivando}} du = f'(x)dx$$
$$dv = g'(x)dx \xrightarrow{\text{integrando}} v = g(x)$$

$$\boxed{\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du \quad \text{Fórmula de integración por partes}}$$

Para tomar la función *u* seguiremos la siguiente regla ordenada (→): ALPES

A: arco
L: logaritmos
P: polinomios
E: exponenciales
S: seno, coseno, …

## ***Ejemplos:***

**1)** $$\int \log(x+1)dx = \left[\begin{array}{l} u = \log(x+1) \xrightarrow{\text{derivando}} du = \dfrac{1}{x+1}dx \\ dv = dx \xrightarrow{\text{integrando}} v = x \end{array}\right] = x\log(x+1) - \int \frac{x}{x+1}dx =$$
$$= x\log|x+1| - \int dx + \int \frac{dx}{x+1}dx = x\log|x+1| - x + \log|x+1| + C$$

**2)** $$\int x^3 \log x dx = \left[\begin{array}{l} u = \log x \xrightarrow{\text{derivando}} du = \dfrac{1}{x}dx \\ dv = x^3 dx \xrightarrow{\text{integrando}} v = \dfrac{x^4}{4} \end{array}\right] = \frac{x^4}{4}\log x - \frac{1}{4}\int x^4 \frac{1}{x}dx = \frac{x^4}{4}\log x - \frac{1}{4}\int x^3 dx =$$
$$= \frac{x^4}{4}\log x - \frac{1}{16}x^4 + C$$

**3)** $$\int \sqrt{x}\log x dx = \left[\begin{array}{lll} u = \log x & \to & du = \dfrac{1}{x}dx \\ dv = \sqrt{x}dx & \to & v = \displaystyle\int \sqrt{x}dx = \dfrac{2\sqrt{x^3}}{3} \end{array}\right] = \log x \cdot \frac{2\sqrt{x^3}}{3} - \int \frac{2\sqrt{x^3}}{3}\frac{1}{x}dx =$$
$$= \frac{2}{3}\sqrt{x^3} \cdot \log x - \frac{2}{3}\int x^{1/2}dx = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} \cdot \log x - \frac{2}{3}\frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} \cdot \log x - \frac{4}{9}\sqrt{x^3} + C$$

**4)** $$\int \frac{x}{\cos^2 x}dx = \left[\begin{array}{lll} u = x & \to & du = dx \\ dv = \dfrac{1}{\cos^2 x}dx & \to & v = \displaystyle\int \dfrac{1}{\cos^2 x}dx = \operatorname{tg} x \end{array}\right] = x\operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg} x dx =$$
$$= x\operatorname{tg} x - \log|\cos x| + C$$

**5)** $$\int \frac{\log(\log x)}{x\log x}dx = \left[\begin{array}{l} t = \log x \Rightarrow x = e^t \\ dx = e^t dt \end{array}\right] = \int \frac{\log t}{\cancel{e^t}\log e^t}\cancel{e^t}dt = \int \frac{\log t}{t}dt = I$$

$$I=\begin{bmatrix} u=\log t\to du=\frac{1}{t}dt \\ dv=\frac{1}{t}dt\to v=\log t\end{bmatrix}=\log t\log t-\int\frac{\log t}{t}dt=\log^2 t-I\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2I=\log^2 t+C_1\Rightarrow I=\frac{1}{2}\log^2 t+\frac{C_1}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\int\frac{\log(\log x)}{x\log x}dx=\frac{1}{2}\log^2(\log x)+C$$

**6)** $$\int\frac{\ln x}{x^3}dx=\begin{bmatrix} u=\log x & \to & du=\frac{1}{x}dx \\ dv=x^{-3}dx & \to & v=-\frac{1}{2x^2}\end{bmatrix}=(\log x)\left(-\frac{1}{2x^2}\right)-\int\frac{-1}{2x^2}\frac{dx}{x}=-\frac{\log x}{x^2}-\frac{1}{4x^2}+k$$

## ***Ejercicio resuelto:***

Halla una función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $f''(x)=x\cos x$ y cuya gráfica pase por los puntos $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ y $(\pi,2\pi)$.

Aplicando la propiedad (1) a $f''(x)$, se tiene que:

$$f'(x)=\int f''(x)dx=\int x\cos x dx=\begin{bmatrix} u=x & \Rightarrow & du=dx \\ dv=\cos x dx & \Rightarrow & v=\operatorname{sen} x\end{bmatrix}=x\operatorname{sen} x-\int\operatorname{sen} x dx=$$

$$=-x\operatorname{sen} x-\cos x+C_1$$

Aplicamos otra vez la propiedad (1) a $f'(x)$, resulta:

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(x\operatorname{sen} x-\cos+C_1)dx=\int x\operatorname{sen} x dx-\int\cos x dx+C_1\int dx=$$

$$=-x\cos x+\operatorname{sen} x+\operatorname{sen} x+C_1x+C_2=-x\cos x+2\operatorname{sen} x+C_1x+C_3$$

donde

$$\int x\operatorname{sen} x dx=\begin{bmatrix} u=x & \Rightarrow & du=dx \\ dv=\operatorname{sen} x dx & \Rightarrow & v=-\cos x\end{bmatrix}=-x\cos x+\int\cos x dx=$$

$$=-x\cos x+\operatorname{sen} x+C_2$$

Imponemos ahora que $f(0)=\frac{\pi}{2}$ y que $f(\pi)=2\pi$:

$$\begin{cases} f(0)=2\operatorname{sen} 0+C_3=0+C_3=\frac{\pi}{2}\Rightarrow C_3=\frac{\pi}{2} \\ f(\pi)=-\pi\cos\pi+2\operatorname{sen}\pi+\pi C_1+\frac{\pi}{2}=2\pi\Rightarrow C_1=\dfrac{2\pi-\frac{\pi}{2}-\pi}{\pi}=\frac{1}{2}\end{cases}$$

Como consecuencia:

$$f(x)=-x\cos x+2\operatorname{sen} x+\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{2}$$

**Ejercicio:**

**189.** *Calcula las siguientes integrales, aplicando la fórmula de integración por partes:*

1) $\int x\cos x dx$
2) $\int xe^x dx$
3) $\int x^2e^x dx$
4) $\int x^2 \operatorname{sen} x dx$
5) $\int x^2 \cos x dx$
6) $\int e^x \operatorname{sen} x dx$
7) $\int \ln x dx$
8) $\int x\ln x dx$
9) $\int x^2 \ln x dx$
10) $\int \operatorname{arctg} x dx$
11) $\int \operatorname{arcsen} x dx$
12) $\int \arccos x dx$
13) $\int x\sqrt{1+x} dx$

## 3.3. Integración de funciones racionales

**Integración de funciones racionales:**

Integrales del tipo

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

donde $P$ y $Q$ son funciones polinómicas.

Supondremos que $\text{grado}P < \text{grado}Q$, pues si no lo fuese, haríamos la división entera de $P$ y $Q$, y podríamos escribir:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

con $\text{grado}R < \text{grado}Q$.

***Caso 1: El polinomio $Q(x)$ tiene solo raíces reales simples:***

Calcula $\int \frac{4}{x^2-1} dx$

1) Descomponemos el denominador, obteniendo sus raíces:

$$x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

2) Descomponemos la función $\frac{4}{x^2-1}$ en suma de fracciones que tienen por numerador una constante y por denominador cada uno de los factores:

$$\frac{4}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

3) Determinamos los valores de $A$ y $B$ operando, igualando los numeradores y dando valores a $x$:

$4 = A(x+1) + B(x-1)$ que para $x = 1$ es $A = 2$ y para $x = -1$ es $B = -2$

4) Integramos:

$$\int \frac{4}{x^2-1}dx = \int \left( \frac{2}{x-1} + \frac{-2}{x+1} \right) dx = 2\ln|x-1| - 2\ln|x+1| + C$$

***Caso 2: Que el polinomio*** $Q(x)$ ***tenga una raíz real múltiple***

Calcula $\int \frac{4x^2-3x+2}{x^3-3x^2+3x-1}dx$

1) Factorizamos el denominador, obteniendo sus raíces:

$$x^3-3x^2+3x-1 = (x-1)^3$$

2) Descomponemos $\frac{4x^2-3x+2}{x^3-3x^2+3x-1}$ en suma de tres fracciones que tienen por numerador una constante y por denominador $x-1$ elevado a 1, 2 y 3:

$$\frac{4x^2-3x+2}{x^3-3x^2+3x-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3}$$

3) Determinamos los valores de las constantes $A$, $B$ y $C$:

$$4x^2-3x+2 = A(x-1)^2 + B(x-1) + C$$

Para $x=1$ obtenemos $C=3$

Derivando: $8x-3 = 2A(x-1)+B$ que para $x=1$ resulta $B=5$

Volvemos a derivar: $8 = 2A \Rightarrow A = 4$

4) Integramos:

$$\int \frac{4x^2-3x+2}{x^3-3x^2+3x-1}dx = \int \frac{4}{x-1}dx + \int \frac{5}{(x-1)^2}dx + \int \frac{3}{(x-1)^3}dx =$$

$$= 4\ln|x-1| - \frac{5}{x-1} - \frac{3}{2(x-1)^2} + C$$

***Caso 3: Que el polinomio*** $Q(x)$ ***tenga raíces reales simples y múltiples***

Se trata de combinar lo visto en los casos 1 y 2.

Calcula $\int \frac{3x+7}{x^3-x^2-x+1}dx$

1) Factorizamos el denominador, obteniendo sus raíces:

$$x^3-x^2-x+1 = (x+1)(x-1)^2$$

2) Descomponemos $\frac{3x+7}{x^3-x^2-x+1}$ en suma de tres fracciones que tienen por numerador una constante y por denominador $x+1$ y $x-1$ elevado a 1 y a 2:

$$\frac{3x+7}{x^3-x^2-x+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$$

3) Determinamos los valores de las constantes $A$, $B$ y $C$:

$$3x+7 = A(x-1)^2 + B(x+1)(x-1) + C(x+1)$$

$$x=1\rightarrow 2C=10\rightarrow C=5$$
$$x=-1\rightarrow 4A=4\rightarrow A=1$$
$$x=0\rightarrow B=A+C-7\rightarrow B=-1$$

4) Integramos:

$$\int\frac{3x+7}{x^3-x^2-x+1}dx=\int\left(\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}\right)dx=$$
$$=\int\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1}+\frac{5}{(x-1)^2}\right)dx=\ln|x+1|-\ln|x-1|-\frac{5}{x+1}+C$$

***Caso 4: Que el polinomio*** $Q(x)$ ***tenga raíces complejas conjugadas***

Calcula $\int\frac{2x+1}{x^3+2x^2+5x}dx$

1) Factorizamos el denominador, obteniendo sus raíces:
$$x^3+2x^2+5x=x\left(x^2+2x+5\right)$$

2) Descomponemos la fracción en suma de dos fracciones. La primera con numerador $A$ y denominador $x$, y la segunda con numerador $Mx+N$ y denominador el polinomio irreducible (en $\mathbb{R}$) $x^2+2x+5$:
$$\frac{2x+1}{x\left(x^2+2x+5\right)}=\frac{A}{x}+\frac{Mx+N}{x^2+2x+5}$$

3) Determinamos las constantes $A,\ M$ y $N$:
$$2x+1=A\left(x^2+2x+5\right)+(Mx+N)x\Rightarrow A=\frac{1}{5},\ M=-\frac{1}{5},\ N=\frac{8}{5}$$

4) Integramos:
$$\int\frac{2x+1}{x^3+2x^2+5x}dx=\int\frac{\frac{1}{5}}{x}dx+\int\frac{-\frac{1}{5}x+\frac{8}{5}}{x^2+2x+5}dx=\frac{1}{5}\ln|x|-\frac{1}{5}\int\frac{x-8}{x^2+2x+5}dx=$$
$$=\frac{1}{5}\ln|x|-\frac{1}{10}\ln\left|x^2+2x+5\right|-\frac{9}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{2}\right)+C$$

## ***Ejercicio:***

***190.*** *Calcula las siguientes integrales racionales:*

1) $\int\frac{4x^3+7x+2}{2x+1}dx$

2) $\int\frac{2x^3+3x^2-2x+3}{x^2+x-2}dx$

3) $\int\frac{x^2+1}{x^3-4x^2+5x-2}dx$

4) $\int\frac{2x-1}{x^2-7x+10}dx$

11) $\int\frac{x}{\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{3}{4}\right)}dx$

12) $\int\frac{1}{x^2-4}dx$

13) $\int\frac{3x+2}{x^3-x}dx$

14) $\int\frac{1}{(x-2)\left(x^2-9\right)}dx$

5) $\int \frac{x^3 - x^2 + 1}{x^2 - 5x + 6} dx$

6) $\int \frac{x+1}{x-1} dx$

7) $\int \frac{x^3 + x^2 + x - 1}{x^2 - 4} dx$

8) $\int \frac{x^4 - x^2}{x - \frac{1}{2}} dx$

9) $\int \frac{x^2 + 1}{x(x+1)(x+3)} dx$

10) $\int \frac{1}{x^2 + x - 6} dx$

15) $\int \frac{x-2}{(x+2)(x^2+3x+2)} dx$

16) $\int \frac{2x-1}{x^2 - 7x + 10} dx$

17) $\int \frac{x^3 - x^2 + 1}{x^2 - 5x + 6} dx$

18) $\int \frac{x^2 + 1}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2} dx$

19) $\int \frac{3x-1}{(x-1)(x^2-1)} dx$

## 3.4. Integración de funciones circulares

***Ejemplos:***

1) Sabiendo que $\operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen} x \cos x$, calcula: $\int \frac{\operatorname{sen}(2x)}{1+\cos^2 x} dx$

$$\int \frac{\operatorname{sen}(2x)}{1+\cos^2 x} dx = \int \frac{2\operatorname{sen} x \cos x}{1+\cos^2 x} dx = -\log\left|1+\cos^2 x\right| + C$$

ya que el numerador es la derivada del denominador, menos el signo.

2) Sabiendo que $\operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen} x \cos x$, calcula: $\int \frac{\operatorname{sen}(2x) + \cos x}{\cos x} dx$

$$\int \frac{\operatorname{sen}(2x)+\cos x}{\cos x} dx = \int \frac{2\operatorname{sen} x \cos x}{\cos x} dx + \int \frac{\cos x}{\cos x} dx = 2\int \operatorname{sen} x dx + \int 1 dx = -2\cos x + x + C$$

3) Calcula $\int \cos^3 x \operatorname{sen} x dx$ (El cambio de variable $t = \cos x$ te puede resultar útil).

$$\int \cos^3 x \operatorname{sen} x dx = \begin{bmatrix} t = \cos x \\ dt = -\operatorname{sen} x dx \end{bmatrix} = -\int t^3 dt = -\frac{1}{4}t^4 = -\frac{1}{4}\cos^4 x + C$$

4) Sabiendo que $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$, calcula $\int \operatorname{sen}^2 x dx$:

$$\int \operatorname{sen}^2 x dx = \int \frac{1-\cos(2x)}{2} dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x) + C$$

5) $\int \operatorname{tg}^2 x dx = \int \left(\operatorname{tg}^2 x + 1 - 1\right) dx = \int \left(\operatorname{tg}^2 x + 1\right) dx - \int 1 dx = \operatorname{tg} x - x + C$

6) $$\int\frac{1+\operatorname{sen}x}{1-\operatorname{sen}x}dx=\int\frac{(1+\operatorname{sen}x)(1+\operatorname{sen}x)}{(1-\operatorname{sen}x)(1+\operatorname{sen}x)}dx=\int\frac{(1+\operatorname{sen}x)^2}{1-\operatorname{sen}^2x}dx=\int\frac{1+\operatorname{sen}^2x+2\operatorname{sen}x}{1-\operatorname{sen}^2x}dx=$$
$$=\int\frac{1+\operatorname{sen}^2x+2\operatorname{sen}x}{\cos^2x}dx=\int\frac{1}{\cos^2x}dx+\int\frac{\operatorname{sen}^2x}{\cos^2x}dx+2\int\frac{\operatorname{sen}x}{\cos^2x}dx=\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}x-x+\frac{2}{\cos x}=$$
$$=2\operatorname{tg}x-x+\frac{2}{\cos x}+C$$

## Integración de funciones circulares:

Las primitivas del tipo $\int\operatorname{sen}^m x\cos^n x\,dx$ con $m,n\in\mathbb{Z}$, se resuelven dependiendo de la paridad de los exponentes $m$ y $n$.

- Si $m$ es impar y $n$ es par, hacemos el cambio $\cos x=t$.
- Si $m$ es par y $n$ es impar, hacemos el cambio $\operatorname{sen}x=t$.
- Si $m$ y $n$ son impares, hacemos el cambio $\cos x=t$ o bien $\operatorname{sen}x=t$.
- Si $m$ y $n$ son pares, hacemos el cambio $\operatorname{tg}x=t$, con el que se obtienen las siguientes relaciones:

$$\operatorname{sen}x=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\qquad \cos t=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\qquad dx=\frac{dt}{1+t^2}$$

Para calcular la primitiva $\int\operatorname{sen}^m x\cos^n x\,dx$ y antes de hacer el cambio correspondiente, utilizaremos las siguientes fórmulas, para transformarla en otra más sencilla:

$$\operatorname{sen}^2x+\cos^2x=1\qquad \cos^2x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x)$$
$$\operatorname{sen}^2x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)\qquad \operatorname{sen}x\cos x=\frac{1}{2}\operatorname{sen}2x$$

## ***Ejemplos:***

**1)** $\int\operatorname{sen}x\cos^3x\,dx$

$$\int\operatorname{sen}x\cos^3x\,dx=\left[\begin{array}{lcl}\operatorname{tg}x=t\Rightarrow dx=\dfrac{dt}{1+t^2} & & \\ \operatorname{sen}x=\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}} & \wedge & \cos x=\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}\end{array}\right]=\int\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)^3\frac{1}{1+t^2}dt=$$
$$=\int\frac{t}{(1+t^2)^3}dt=-\frac{1}{4}\frac{1}{(1+t^2)^2}+C=-\frac{1}{4}\frac{1}{(1+\operatorname{tg}^2x)^2}+C$$

**2)** $\int\operatorname{sen}^3x\cos^4x\,dx$

$$\int\operatorname{sen}x\operatorname{sen}^2x\cos^4x\,dx=\int\operatorname{sen}x(1-\cos^2x)\cos^4x\,dx=\left[\begin{array}{l}\cos x=t\\ -\operatorname{sen}x\,dx=dt\end{array}\right]=$$

$$= -\int(1-t^2)t^4dt = -\int(t^4-t^6)dt = -\frac{t^5}{5}+\frac{t^7}{7}+C = -\frac{\cos^5 x}{5}+\frac{\cos^7 x}{7}+C$$

**3)** $\int \operatorname{sen}^4 x\cos^5 x dx$

$$\int \operatorname{sen}^4 x\cos^5 x dx = \int \operatorname{sen}^4 x\cos^4 x\cos x dx = \int \operatorname{sen}^4 x\left(1-\operatorname{sen}^2 x\right)^2\cos x dx =$$

$$= \begin{bmatrix} \operatorname{sen} x = t \\ \cos x dx = dt \end{bmatrix} = \int t^4(1-t^2)^2 dt = \int t^4(1-2t^2+t^4)dt = \int(t^4-2t^6+t^8)dt =$$

$$= \frac{t^5}{5}-\frac{2t^7}{7}+\frac{t^9}{9}+C = \frac{\operatorname{sen}^5 x}{5}-\frac{2\operatorname{sen}^7 x}{7}+\frac{\operatorname{sen}^9 x}{9}+C$$

**4)** $\int \operatorname{sen}^5 x\cos^3 x dx$

$$\int \operatorname{sen}^5 x\cos^2 x\cos x dx = \int \operatorname{sen}^5 x\left(1-\operatorname{sen}^2 x\right)\cos x dx = \begin{bmatrix} \operatorname{sen} x = t \\ \cos x dx = dt \end{bmatrix} =$$

$$= \int t^5(1-t^2)dt = \int(t^5-t^7)dt = \frac{t^6}{6}-\frac{t^8}{8}+C = \frac{\operatorname{sen}^6 x}{6}-\frac{\operatorname{sen}^8 x}{8}+C$$

Cuando en el integrando aparezcan funciones trigonométricas genéricas, realizaremos el cambio $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$. A partir de él se obtienen las siguientes relaciones:

$$\operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

***Ejemplo:***

$$\int \frac{dx}{1+\cos x} = \begin{bmatrix} \operatorname{tg}\frac{x}{2} = t \to \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \end{bmatrix} = \int \frac{1}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{2}{1+t^2+1-t^2}dt = \int \frac{2}{2}dt = t+C = \operatorname{tg}\frac{x}{2}+C$$

## 3.5. Integración de funciones irracionales

**Integración de funciones irracionales:**

Las primitivas del tipo $\int R\left(x,\sqrt[n]{x^m},\ldots,\sqrt[p]{x^q}\right)dx$, se resuelven haciendo el cambio de variable $x = t^M$, donde $M = m.c.m.(n,\ldots,p)$. Con este cambio nos aseguramos que desaparezcan las raíces de la integral.

***Ejemplo:***

$$\int \frac{\sqrt[4]{x}}{1+\sqrt{x}}dx = \begin{bmatrix} x = t^4 \\ dx = 4t^3dt \end{bmatrix} = \int \frac{t}{1+t^2}4t^3dt = 4\int \frac{t^4}{1+t^2}dt =$$

$$=4\int\left(t^2-1+\frac{1}{1+t^2}\right)dt=4\left[\frac{t^3}{3}-t+\operatorname{arctg}t\right]=4\left[\frac{\sqrt[4]{x^3}}{3}-\sqrt[4]{x}+\operatorname{arctg}\sqrt[4]{x}\right]+C$$

**Integración de funciones irracionales:**

Las primitivas del tipo $\int R\left(x,\sqrt[n]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^m},\ldots,\sqrt[p]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^q}\right)dx$, se resuelven haciendo el cambio de variable $\frac{ax+b}{cx+d}=t^M$, donde $M=m.c.m.(n,\ldots,p)$. Con este cambio nos aseguramos que desaparezcan las raíces de la integral.

## *Ejercicios de Selectividad*

Otra propuesta 2 de 2000 – Segundo Bloque, A)
Otra propuesta 1 de 2000 – Cuarto Bloque, A)
Septiembre de 2000 – Cuarto Bloque – A)
Junio de 2000 – Segundo Bloque – A)
Otra propuesta 2 de 2001 – Segundo Bloque, A)
Septiembre de 2001 – Cuarto Bloque – A)
Junio de 2001 – Segundo Bloque – A)
Reserva 1 de 2002 – Primer Bloque – A)
Septiembre de 2002 – Segundo Bloque – A)
Reserva 1 de 2003 – Tercer Bloque – A)
Septiembre de 2005 – Segundo Bloque – B)
Septiembre de 2006 – Segundo Bloque – A)
Junio de 2006 – Segundo Bloque – A)
Reserva 2 de 2007 – Segundo Bloque – B)
Septiembre de 2007 – Segundo Bloque – A)
Junio de 2007 – Segundo Bloque – A)
Reserva 2 de 2008 – Segundo Bloque – B)
Reserva 1 de 2008 – Segundo Bloque – B)
Junio de 2008 – Segundo Bloque – A)
Reserva 2 de 2009 – Segundo Bloque – A)
Reserva 1 de 2009 – Segundo Bloque – A)
Septiembre de 2009 – Segundo Bloque – A)
Junio de 2009, Segundo Bloque, A)

# 4. APLICACIÓN: PROBLEMAS DE VALORES INICIALES

La integral indefinida nos permite hallar una función $f(x)$ conocida su derivada $f'(x)$, pues

$$f(x)=\int f'(x)\,dx=F(x)+c$$

Pero $f(x)$ queda indefinida, pues la constante $c$ no se conoce. Para determinar $c$ es necesario dar un dato adicional; por ejemplo, el punto $(a,f(a))$ de la función. A este dato se le llama **valor inicial**. Por lo dicho, de $f(a)=F(a)+c$ se obtiene que

$$c=f(a)-F(a).$$

***Ejercicios de Selectividad***

Reserva 2 de 2012, Propuesta A, 2A)

Junio de 2015, Propuesta B, 2B, b)

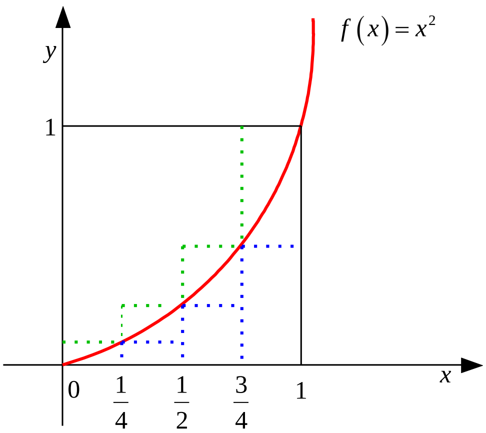
Septiembre de 2016, Propuesta A, 2A)

# Unidad 11:
# INTEGRAL DEFINIDA Y APLICACIONES

## 1. INTEGRAL DEFINIDA

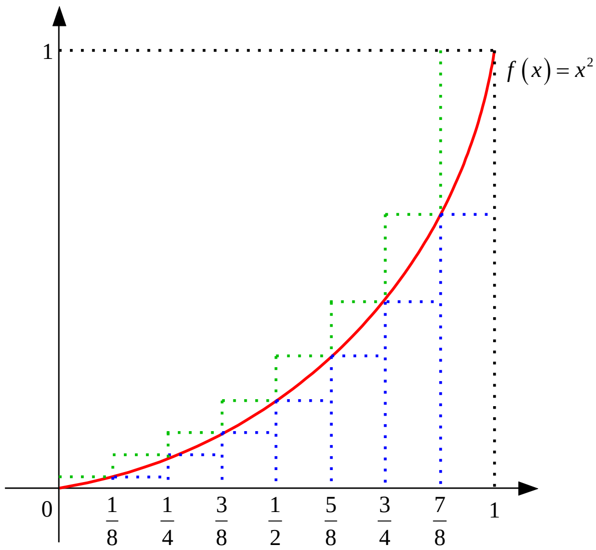
El problema geométrico de la determinación del área de ciertas superficies planas es el origen y la base del Cálculo Integral. Se atribuye a Eudoxo (ca. 370 a.C.) la invención del método de *exhaución*, una técnica para calcular el área de una región aproximandola por una sucesión de polígonos de forma que en cada paso se mejora la aproximación anterior. Arquímedes (287-212 A.C.) perfeccionó este método y, entre otros resultados, calculó el área de un segmento de parábola y el volumen de un segmento de paraboloide, así como el área y el volumen de una esfera.

Las ideas expuestas por Arquímedes (en carta a Dositeo) son fundamentalmente las siguientes: se desea medir el área encerrada por el siguiente segmento parabólico (entre 0 y 1), que representaremos por *S*:




$$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{4}\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\frac{9}{16}<S<\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^2+\frac{1}{4}1^2$$

$$\frac{7}{32}<S<\frac{15}{32}\Leftrightarrow 0,22<S<0,47$$



$$\frac{1}{8}0^2+\frac{1}{8}\left(\frac{1}{8}\right)^2+\frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{8}\left(\frac{3}{8}\right)^2+\frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{8}\left(\frac{5}{8}\right)^2+\frac{1}{8}\left(\frac{3}{4}\right)^2+\frac{1}{8}\left(\frac{7}{8}\right)^2<S<$$

$$<\frac{1}{8}\left(\frac{1}{8}\right)^2+\frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{8}\left(\frac{3}{8}\right)^2+\frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{8}\left(\frac{5}{8}\right)^2+\frac{1}{8}\left(\frac{3}{4}\right)^2+\frac{1}{8}\left(\frac{7}{8}\right)^2+\frac{1}{8}1^2$$

$$\frac{35}{128}<S<\frac{51}{128}\Leftrightarrow 0,27<S<0,40$$

Haciendo cada vez rectángulos de base más pequeña y aplicando la fórmula para sumar los primeros $n$ cuadrados[12], se tiene que:

$$\frac{1}{n}\left(\frac{n(n-1)\frac{2n-1}{6}}{n^2}\right)<S<\frac{1}{n}\left(\frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{n^2}\right)$$

$$\frac{2n^3+3n^2+n}{6n^3}<S<\frac{2n^3+3n^2+n}{6n^3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3+3n^2+n}{6n^3}\leq S\leq\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3+3n^2+n}{6n^3}$$

$$\frac{1}{3}\leq S\leq\frac{1}{3}\Rightarrow S=\frac{1}{3}$$

Como consecuencia de lo anterior, podemos dar la siguiente definición:

**Definición:**

Representaremos por $\int_a^b f(x)dx$ el área del recinto limitado por la función positiva $y=f(x)$ y las rectas verticales $x=a$ y $x=b$. Se lee «**integral definida de $f(x)$ entre *a* y *b***». La función $y=f(x)$ se denomina *integrando*, el intervalo $[a,b]$ se denomina *intervalo de integración* y los valores $a$ y $b$ se llaman *límites de integración* ($a$ se denomina límite inferior y $b$ límite superior, de la integral). Además, la notación $\int_a^b f(x)dx$ (debida a Leibniz) también indica el valor $f(x)$ que toma la función $f$ en un punto genérico $x\in[a,b]$ y $dx$ indica la *variable de integración*, que como puede ser cualquier letra, se denomina variable muda.

Si dejamos *a* fijo y hacemos que *b* sea variable, la expresión $\int_a^x f(t)dt$ para un *x* dado representa el área limitada por la función, la recta vertical $t=a$ y la vertical que pasa por *x*. Es, por tanto, una función de *x* que llamaremos **función área**.

Cuando existe la integral $\int_a^b f(t)dt$, se dice que la **función $f(t)$** es (Riemann) **integrable en el intervalo $[a,b]$**.

[12] La fórmula para sumar los *n* primeros cuadrados es: $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

**Geogebra**

Integral and Riemann sums
Autor: Daniel Mentrard
Tema: Cálculo, Integral Definida, Funciones, Gráfica de Funciones, Cálculo integral
https://www.geogebra.org/m/qbqdtxvq?s=08

## 2. PROPIEDADES INMEDIATAS

(1) $\int_a^a f(x)dx = 0$

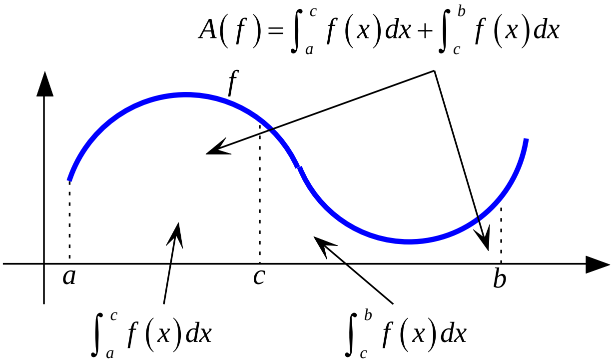
Es lo mismo que decir que un segmento tiene área cero.

(2) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

Para nosotros va a ser un simple convenio.

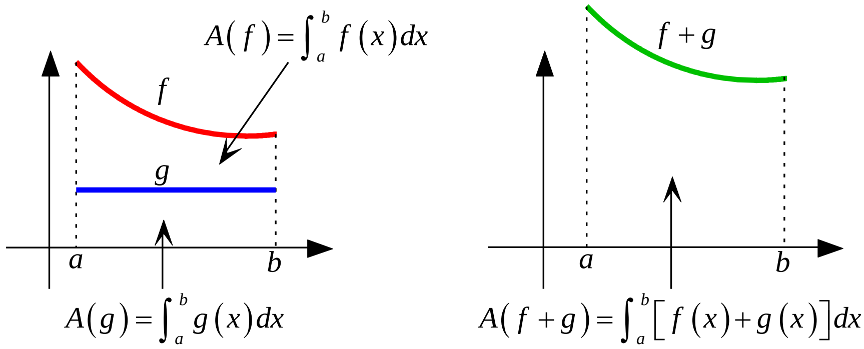
(3) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ para $a < c < b$

Si dividimos el área a calcular en dos trozos, el área total será igual a la suma de las áreas de cada uno de los trozos.



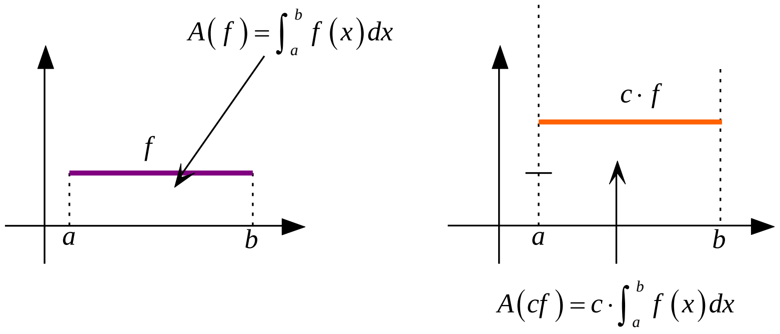

(4) $\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

La situación es la misma que en la propiedad 3, aunque un poco más delicada.




(5) $\int_a^b cf(x)dx = c\cdot\int_a^b f(x)dx$

La diferencia entre las gráficas de $f$ y $c\cdot f$, es que cambiamos la escala de altura (en la segunda) en un factor $c$, y, por tanto, el área también debe variar en dicho factor.




# 3. TEOREMAS IMPORTANTES

**Teorema Fundamental del Cálculo (TFC):**

Si $f(x)$ es una función continua en $[a,b]$ y $F(x)=\int_a^x f(t)dt$, entonces:

1) $F(x)$ es derivable
2) $F'(x)=f(x) \quad \forall x\in[a,b]$

Demostración:

$$F'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\int_a^{x_0+h} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt}{h}=f(x_0) \qquad \forall x_0\in D$$

pues si $h\to 0$ la altura tiende a ser $f(x_0)$. C.Q.D.

## *Ejercicio resuelto:*

Dada la función $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $F(x)=\int_0^x \operatorname{sen}(t^2)dt$, calcular $\lim_{x\to 0}\frac{xF(x)}{\operatorname{sen}(x^2)}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{xF(x)}{\operatorname{sen}(x^2)}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{F(x)+xF'(x)}{2x\cos(x^2)}\underset{(1)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \operatorname{sen}(t^2)dt+x\operatorname{sen}(x^2)}{2x\cos(x^2)}\underset{(2)}{=}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x^2)+\operatorname{sen}(x^2)+2x^2\operatorname{sen}(x^2)}{2\cos(x^2)-4x\operatorname{sen}(x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{(2+2x^2)\operatorname{sen}(x^2)}{2\cos(x^2)-4x\operatorname{sen}(x^2)}=\frac{0}{2}=0$$

donde en (1) se ha tenido en cuenta que la derivada y la integral indefinida son operaciones inversas (teorema fundamental del Cálculo) y en (2) se ha usado la regla de L`Hôpital.

**Regla de Barrow (2º TFC):**

Si $f(x)$ es una función continua en $[a,b]$ y $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$, entonces

$$\int_a^b f(x)dx=\left[F(x)\right]_a^b=F(b)-F(a)$$

Demostración:

Si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$ se verifica que $F'(x)=\dfrac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$

Supongamos que $G(x)$ es otra primitiva de $f(x)$. Entonces: $F(x)=G(x)+k$

Vamos a determinar $k$:

$$\left.\begin{array}{l} F(a)=0 \\ F(a)=G(a)+k \end{array}\right\} \Rightarrow G(a)+k=0 \Rightarrow k=-G(a)$$

Por otro lado

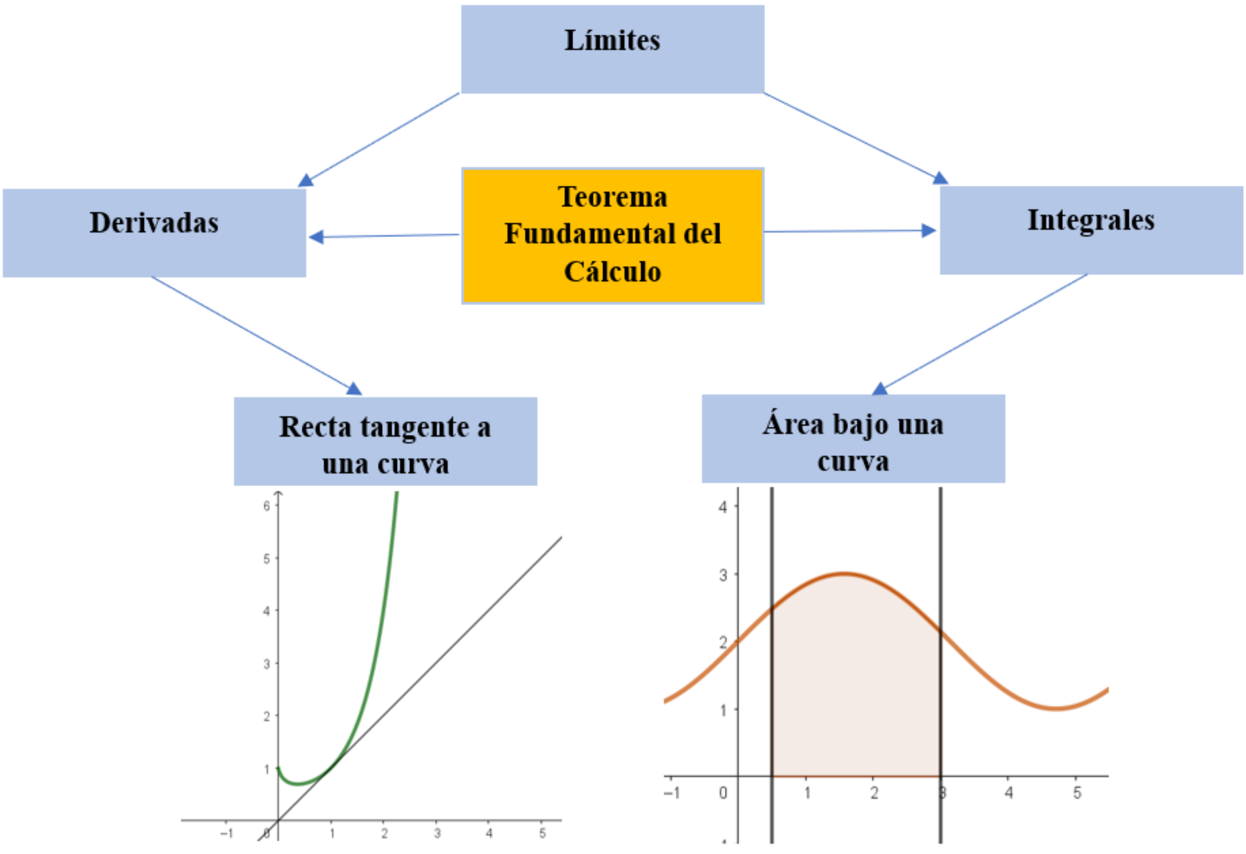
$$F(b)=\int_a^b f(t)\,dt$$

luego

$$F(b)=G(b)+k=G(b)-G(a)$$

de donde se deduce que

$$\int_a^b f(t)\,dt = G(b)-G(a)$$ C.Q.D.




## ***Ejemplos:***

1) Calculamos $\int_1^e \dfrac{1}{x}\,dx$

$$\int_1^e \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|\Big|_1^e = \ln e - \ln 1 = 1-0=1$$

2) Calculamos $\int_0^{\pi} \cos x dx$

$$\int_0^{\pi} \cos x dx = \operatorname{sen} x\Big|_0^{\pi} = \operatorname{sen}\pi - \operatorname{sen} 0 = 0 - 0 = 0$$

2) Calculamos $\int_{\pi/2}^{\pi} \cos^2 x dx$

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \cos^2 x dx = \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{1+\cos(2x)}{2} dx = \frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{\pi} 1 dx + \frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{\pi} \cos(2x) dx = \frac{1}{2} x\Big|_{\pi/2}^{\pi} + \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x)\Big|_{\pi/2}^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\pi - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{4}\left(\operatorname{sen}(2\pi) - \operatorname{sen}\left(2\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{4}$$

2) Calculamos $\int_0^1 \frac{e^{4x}}{e^{4x}+5} dx$

$$\int_0^1 \frac{e^{4x}}{e^{4x}+5} dx = \begin{bmatrix} t = e^{4x}+5 \\ dt = 4e^{4x}dx \Rightarrow \frac{1}{4}dt = e^{4x}dx \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{1}{t} dt = \frac{1}{4}\log|t| = \frac{1}{4}\log\left|e^{4x}+5\right|\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\log\left(e^4+5\right) - \log 6\right] = \frac{1}{4}\log\left(\frac{e^4+5}{6}\right)$$

2) Vamos a calcular ahora $\int_e^{e^2} \frac{\log(\log x)}{x} dx$.

En primer lugar, calculamos una primitiva:

$$\int \frac{\log(\log x)}{x} dx = \begin{bmatrix} t = \log x \\ dt = \frac{1}{x}dx \end{bmatrix} = \int \log t dt = \begin{bmatrix} u = \log t & \Rightarrow & du = \frac{1}{t}dt \\ dv = dt & \Rightarrow & v = t \end{bmatrix} = t\log t - \int t\frac{1}{t}dt = t\log t - t =$$

$$= \log x \cdot \log(\log x) - \log x + C$$

Ahora, aplicando la regla de Barrow:

$$\int_e^{e^2} \frac{\log(\log x)}{x} dx = \log x \cdot \log(\log x) - \log x\Big|_e^{e^2} =$$

$$= \log e^2 \cdot \log(\log e) - \log e^2 - \left[\log e \cdot \log(\log e) - \log e\right] = 2\log 2 - 2 - (0-1) = 2\log 2 - 1$$

**¡Cuidado!**

$$\int_{-1}^{3} \frac{1}{x^2} dx = \int_{-1}^{3} x^{-2} dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1}\Big|_{-1}^{3} = -\frac{1}{3} - \left(-\left(\frac{1}{-1}\right)\right) = -\frac{1}{3} - 1 = -\frac{4}{3}$$

¿Dónde está el error?

El error está en que no podemos aplicar la regla de Barrow, ya que $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ es continua en $\mathbb{R}-\{0\}$ y, por tanto, presenta una discontinuidad en $[-1,3]$. Como consecuencia:

$$\nexists \int_{-1}^{3} \frac{1}{x^2}\,dx$$

**Teorema del Valor Medio para integrales:**

Si $f(x)$ es una función continua en un intervalo cerrado $[a,b]$, entonces, existe un punto $c\in(a,b)$ tal que

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$$

Demostración:

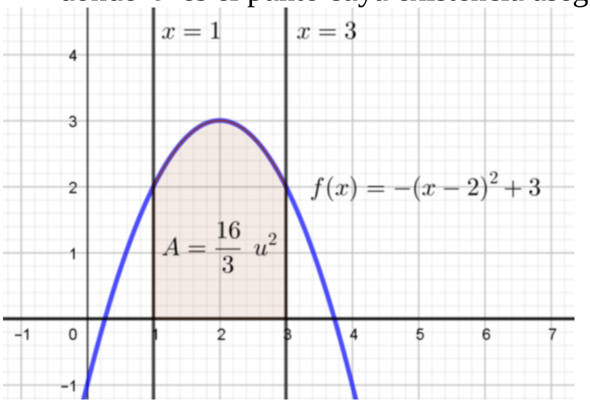
Sea $G(x)=\int_a^x f(t)\,dt$. Se tiene que $G$ es continua en $[a,b]$ y derivable en $(a,b)$, luego por el teorema del valor medio para derivadas, $\exists c\in(a,b)$ tal que

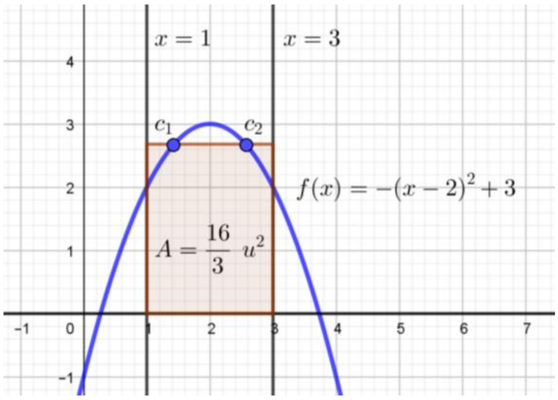
$$G(b)-G(a)=G'(c)(b-a)$$

es decir, $\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$ C.Q.D.

**Interpretación geométrica:**

El área limitada por la gráfica de la función, el eje *OX* y las rectas verticales $x=a$ y $x=b$ coincide con el área del rectángulo de base la longitud del intervalo, $b-a$, y altura $f(c)$, donde $c$ es el punto cuya existencia asegura el teorema.




## *Ejemplos:*

(1) Determina el punto $c$, cuya existencia asegura el TVM para integrales, de la función $f(x)=-(x-2)^2+3$, en el intervalo $[1,3]$.

Por una parte, $f(x)$ es continua en $[1,3]$, por ser una función polinómica, y

$$\int_1^3 f(x)\,dx=\int_1^3\left[-(x-2)^2+3\right]dx=-\frac{x^3}{3}+\frac{4x^2}{2}-x\Big|_1^3=\frac{16}{3}\;u^2$$

Y, por otra,

$$\frac{16}{3}=f(c)-(3-1)\Rightarrow\frac{16}{3}=\left(-(c-2)^2+3\right)\cdot 2\Rightarrow c=\begin{cases}2-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\\[2mm] 2+\dfrac{\sqrt{3}}{3}\end{cases}$$

y ambos puntos están en $(1,3)$

(2) Sabiendo que el área que encierra la función $f(x)=2x+1$ con el eje OX, en el intervalo $[1,4]$ es de 18 $u^2$, vamos a determinar el punto $c\in(1,4)$ cuya existencia garantiza el teorema del valor medio para integrales.
Que el área que encierra la función con el eje OX, en el intervalo $[1,4]$ quiere decir que

$$\int_1^4 (2x+1)\,dx = 18\ u^2$$

y como la base del rectángulo es $4-1=3$, se tiene que $f(c)=6$ (para que el área de dicho rectángulo sea 18), y así:

$$f(c)=6\Rightarrow 2c+1=6\Rightarrow c=\frac{5}{2}\in(1,4)$$

## *Ejercicios de Selectividad*

Septiembre de 2003, Segundo Bloque – A)

Reserva 2 de 2005, Primer Bloque, B)

Reserva 1 de 2006, Segundo Bloque, A)

Reserva 1 de 2008, Segundo Bloque, A)

Septiembre de 2008, Segundo Bloque, A)

Junio de 2009, Segundo Bloque, B)

Junio de 2014, Propuesta A, 2A)

Junio de 2016, Propuesta A, 2A)

Junio de 2018, Propuesta A, 2A, a)

Julio de 2018, Propuesta A, 2A, b)

Julio de 2018, Propuesta B, 2B, b)

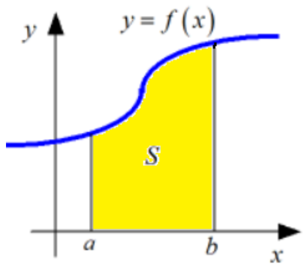
Julio de 2019, Propuesta B, 2B, a)

# 4. ÁREAS DE RECINTOS PLANOS

### 4.1. Recinto Limitado por la curva $y=f(x)$, el eje OX y las rectas $x=a$ y $x=b$

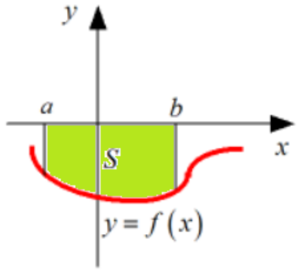
a) Si $f(x)\geq 0$ en todo el intervalo [a, b]

$$\boxed{S=\int_a^b f(x)\,dx}$$



b) Si $f(x) \le 0$ en todo el intervalo [a, b]

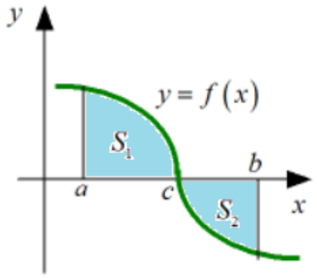
$$\boxed{S = -\int_a^b f(x)\,dx = \int_b^a f(x)\,dx}$$




c) Si $f(x)$ corta al eje *OX* en el punto $c \in [a, b]$

$$\boxed{S = S_1 + S_2 = \int_a^c f(x)\,dx - \int_c^b f(x)\,dx}$$

El punto *c* se halla resolviendo la ecuación $f(x) = 0$.

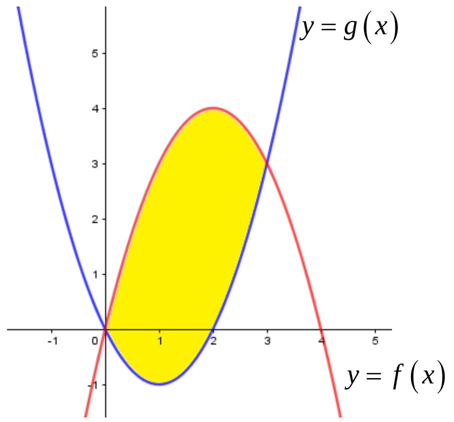



**4.2. Recinto limitado por dos curvas, $y = f(x)$ e $y = g(x)$, en el intervalo [a, b]**

a) Si $f(x) \ge g(x)$ en todo [*a*, *b*]

$$\boxed{S = \int_a^b \left(f(x) - g(x)\right)dx}$$

Para poder aplicar esta fórmula no es necesario que las funciones sean positivas. ***Se puede aplicar en cualquier caso***.



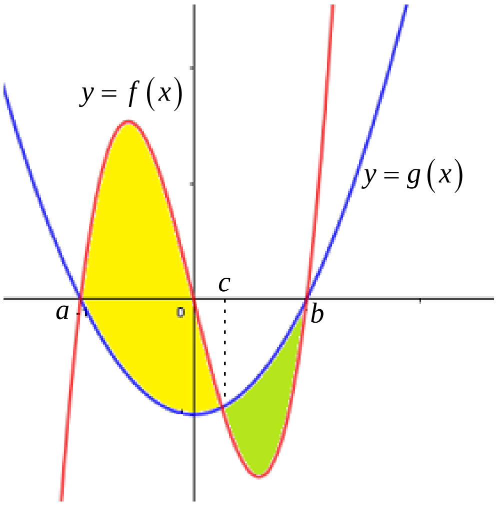
b) Si $f(x) \geq g(x)$ y, $f(x)$ y $g(x)$ se cortan en el intervalo [*a*, *b*] cuando *x* = *c*

$$\boxed{S = S_1 + S_2 = \int_a^c \left(f(x) - g(x)\right)dx + \int_c^b \left(g(x) - f(x)\right)dx}$$

El valor c del punto de corte se halla resolviendo el sistema

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases}$$

También hay que determinar qué función está por encima en cada trozo.

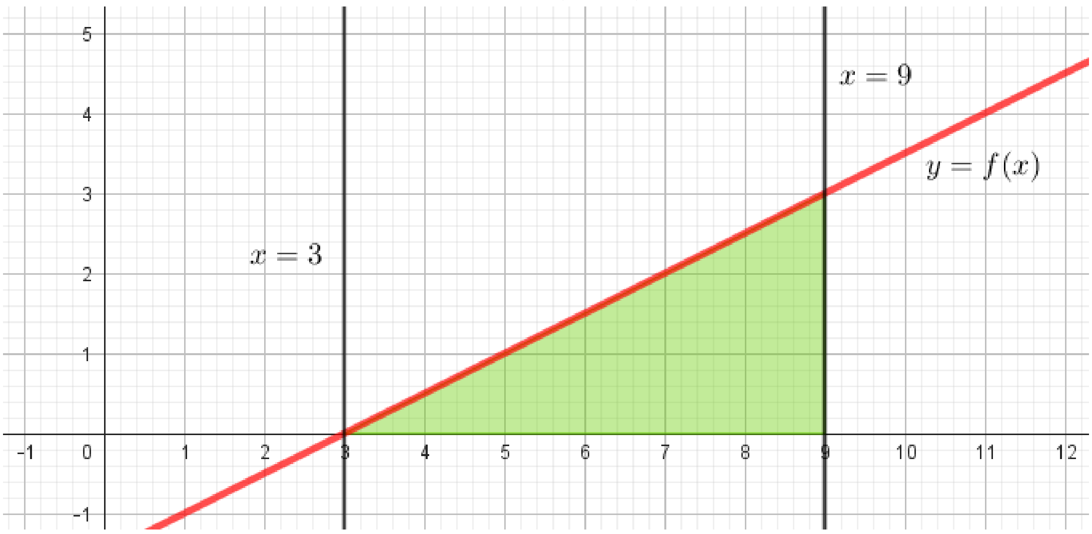



## 4.3. Ejercicios resueltos de cálculo de áreas por integración

**1.** Calcular el área encerrada por la función: $f(x) = \dfrac{x-3}{2}$, el eje OX, y las rectas *x* = 3 y *x* = 9

Se trata de un triángulo de base 6 y altura $f(9) = 3$

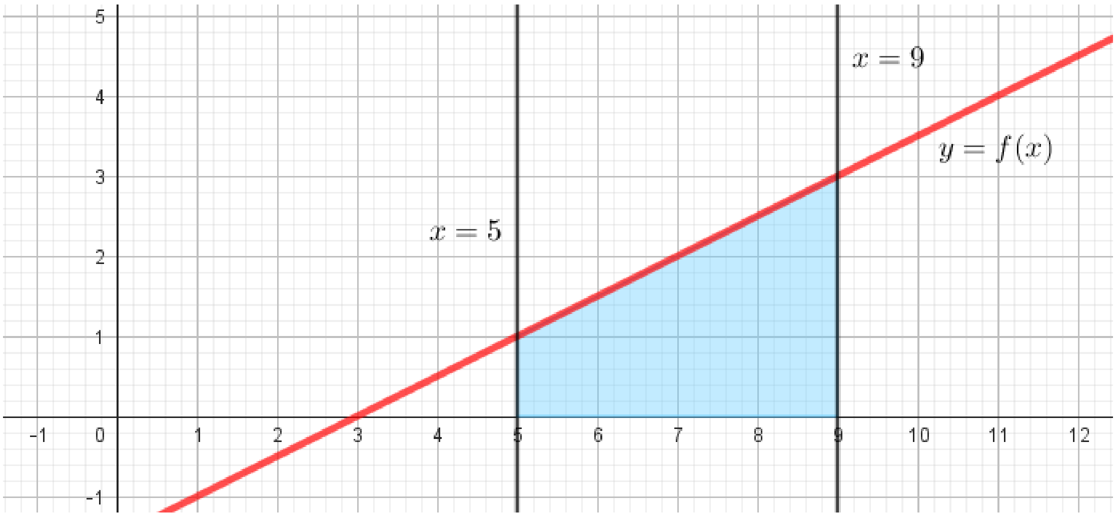
El área sombreada es = $\displaystyle\int_3^9 \frac{x-3}{2}dx = \frac{1}{2}\int_3^9 \left(\frac{x}{2} - \frac{3}{2}\right)dx = \frac{6 \cdot 3}{2} = 9 \text{ u}^2$



**2.** Calcular el área encerrada por la función: $f(x)=\dfrac{x-3}{2}$, el eje OX, y las rectas $x = 5$ y $x = 9$

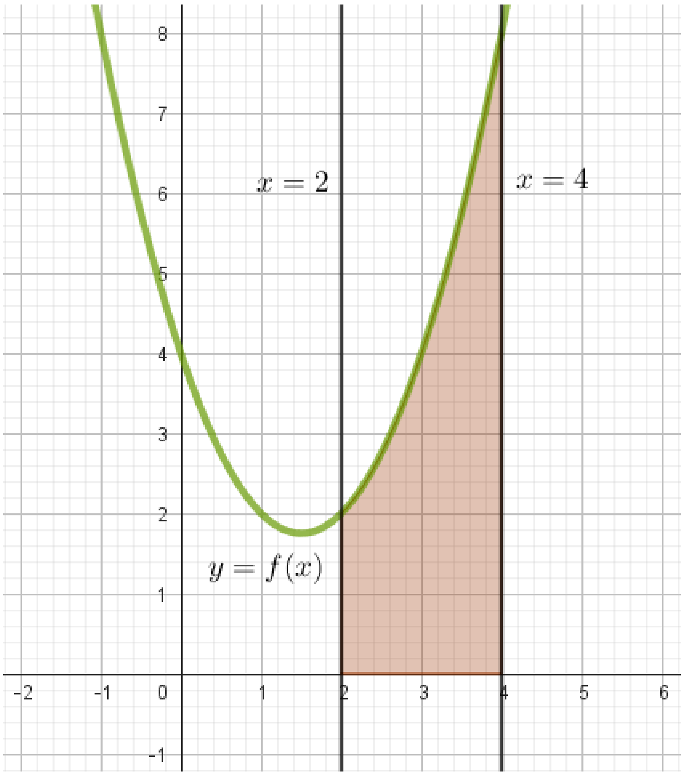
Es un trapecio de bases: $f(5)=1$ y $f(9)=3$, y de altura 4 unidades

Es el área sombreada = $\displaystyle\int_5^9 \frac{x-3}{2}dx = \frac{(1+3)\cdot 4}{2} = 8\ \text{u}^2$



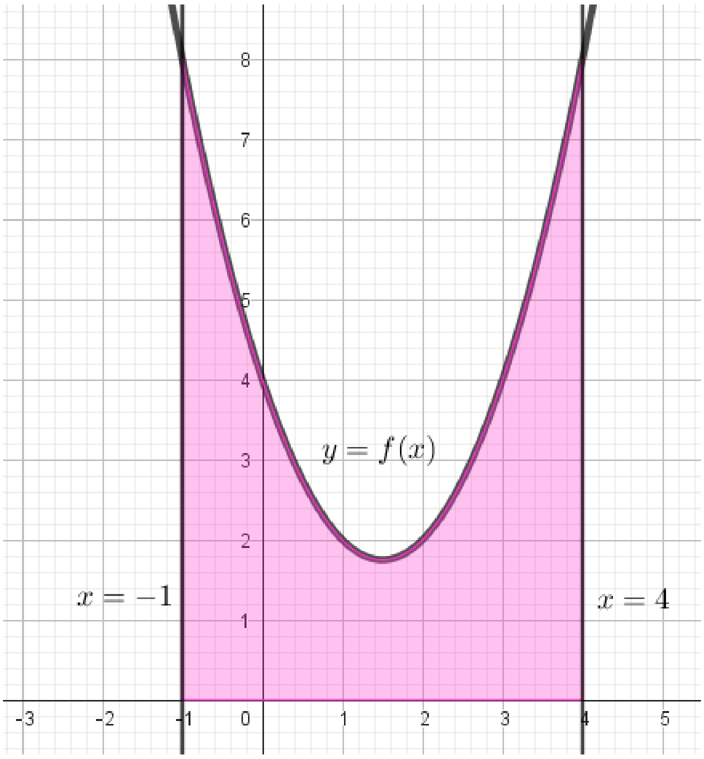

**3.** Calcular el área encerrada por la función: $f(x)=x^2-3x+4$, el eje OX, y las rectas $x = 2$ y $x=4$.

Es el área sombreada = $\displaystyle\int_2^4 (x^2-3x+4)\,dx = \left.\frac{x^3}{3}-3\frac{x^2}{2}+4x\right|_2^4 = \frac{26}{3}\ \text{u}^2$



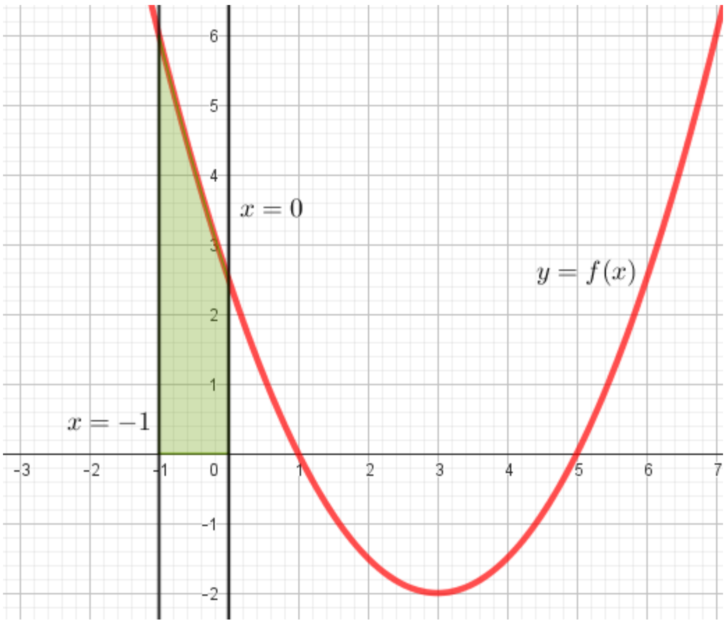
**4.** Calcular el área encerrada por la función: $f(x)=x^2-3x+4$, el eje OX, y las rectas $x=-1$ y $x = 4$.

$$A=\int_{-1}^{4}\left(x^2-3x+4\right)dx=\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+4x\Big|_{-1}^{4}=\frac{4^3}{3}-\frac{3\cdot 4^2}{2}+4\cdot 4-\left(\frac{(-1)^3}{3}-\frac{3\cdot(-1)^2}{2}+4\cdot(-1)\right)=\frac{115}{6}\ \text{u}^2$$



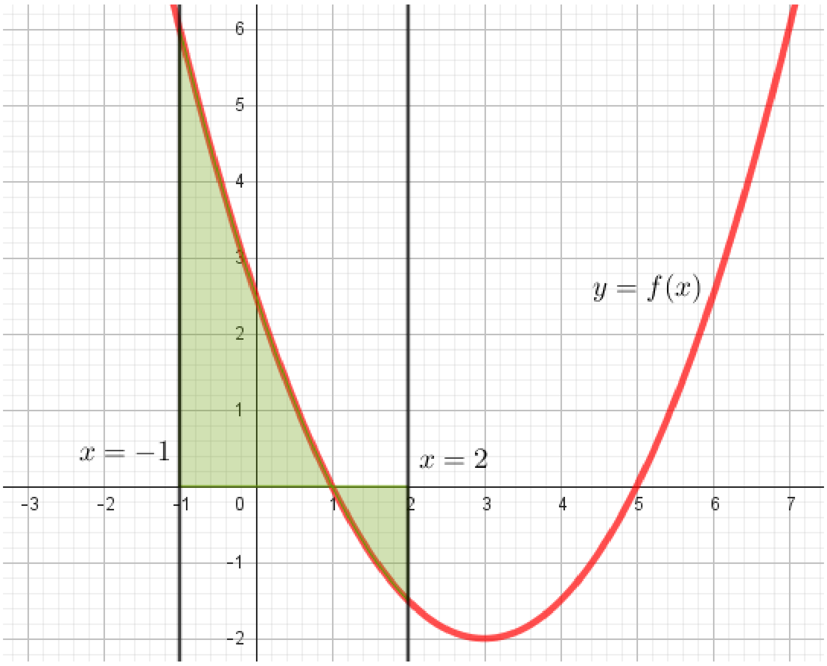

**5.** Calcular el área encerrada por la función: $f(x)=\dfrac{x^2-6x+5}{2}$, el eje OX, y las rectas $x = -1$ y $x=0$.

$$A=\int_{-1}^{0}\frac{x^2-6x+5}{2}\,dx=\frac{25}{6}\ \text{u}^2$$



**6.** Calcular el área encerrada por la función: $f(x)=\dfrac{x^2-6x+5}{2}$, el eje OX, y las rectas $x=-1$ y $x=2$.

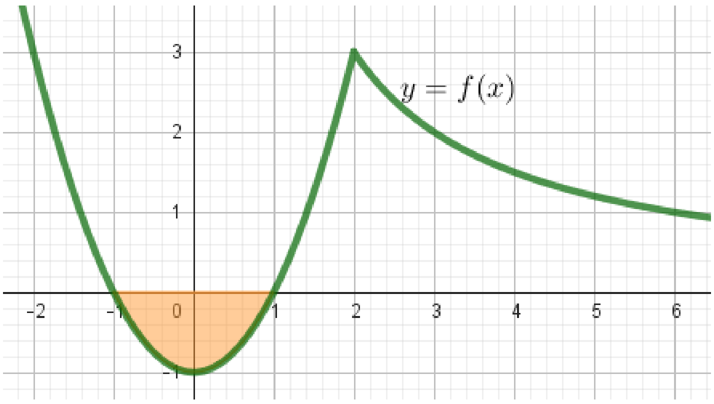
$$A=\int_{-1}^{1}\frac{x^2-6x+5}{2}dx-\int_{1}^{2}\frac{x^2-6x+5}{2}dx=\frac{32}{3}-\left(-\frac{5}{3}\right)=\frac{37}{3}\ \text{u}^2$$




**7.** Dada la función

$$f(x)=\begin{cases} x^2-1 & si \quad x\le 2 \\ \dfrac{6}{x} & si \quad x>2 \end{cases}$$

Se pide: Área del recinto cerrado que delimita la gráfica de $f(x)$ y el eje *OX*.




Los límites de integración son los puntos donde la función corta al eje OX. En nuestro caso:

$$x^2-1=0\Rightarrow x^2=1\Rightarrow x=\pm\sqrt{1}=\pm 1$$

(ten en cuenta que $\dfrac{6}{x}\neq 0$ ya que una fracción es cero solo cuando el numerador lo es)

El área pedida es[13]:

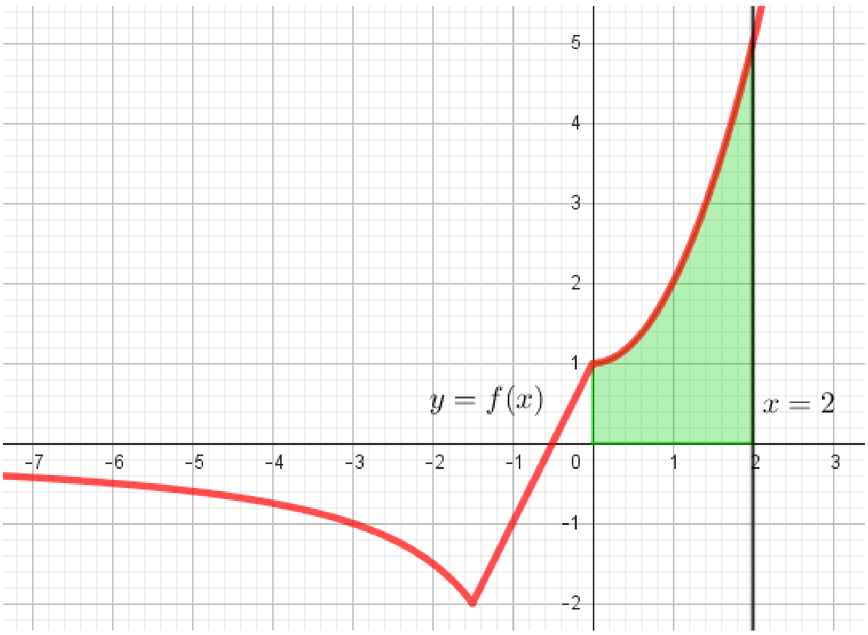
$$A=-\int_{-1}^{1}\left(x^2-1\right)dx=-\left(\frac{x^3}{3}-x\right)\Bigg]_{-1}^{1}=-\frac{x^3}{3}+x\Bigg]_{-1}^{1}=-\left(-\frac{4}{3}\right)=\frac{8}{3}\ \text{u}^2$$

**8.** Dada la función

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{x} & si\quad x<\dfrac{-3}{2}\\ 2x+1 & si\quad \dfrac{-3}{2}\le x<0\\ x^2+1 & si\quad x\ge 0\end{cases}$$

Se pide, calcular el área del recinto plano limitado por la gráfica de $f\left(x\right)$, el eje $OX$, el eje $OY$ y la recta $x=2$.

La representación gráfica del recinto al que hay que calcularle el área es:




Calculamos los límites de integración. Uno es $x=0$ (ya que el área está limitada por el eje OY) y el otro es $x=3$ (recta dada). Por tanto, el área pedida vendrá dada por la siguiente integral:

$$A=\int_{0}^{2}\left(x^2+1\right)dx=\frac{x^3}{3}+x\Bigg]_{0}^{2}=$$

$$=\frac{2^3}{3}+3-\left(\frac{0^3}{3}-0\right)=\frac{17}{3}$$

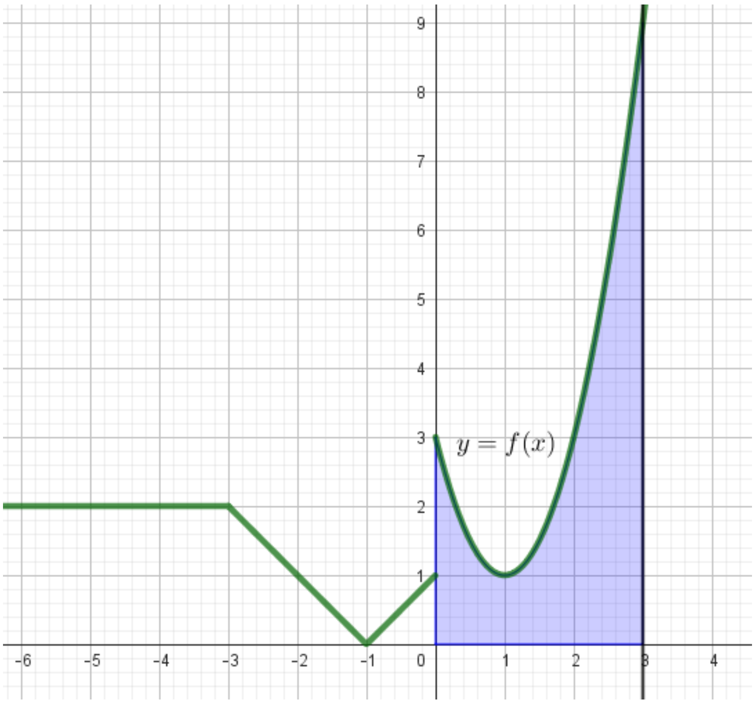
Así, el área buscada es de $\dfrac{17}{3}$ u$^2$.

**9.** Dada la función:

[13] La integral lleva signo negativo, por que el área pedida está por debajo del eje X.

$$f(x)=\begin{cases} 2 & si \quad x<-3 \\ |x+1| & si \quad -3\le x<0 \\ 2x^2-4x+3 & si \quad x\ge 0 \end{cases}$$

Se pide: Calcular el área de la región del plano limitada por la gráfica de $f(x)$, el eje *OX*, el eje *OY* y la recta $x=3$.




Los límites de integración son $x=0$ (ya que el área pedida está limitada por el eje OY) y $x=3$ (recta dada), y por tanto, el área pedida vale:

$$A=\int_0^3\left(2x^2-4x+3\right)dx=2\frac{x^3}{3}-4\frac{x^2}{2}+3x\Bigg]_0^3=2\frac{3^3}{3}-4\frac{3^2}{2}+3\cdot 3=18-18+9=9\ \text{u}^2$$

**10.** Determina el valor de $a$ para que el área comprendida por la gráfica de la función $f(x)=ax^2+2$, el eje *OX* y las rectas $x=-1$ y $x=2$ sea 21 unidades de área.

En este caso, los límites de integración nos vienen dados por las rectas $x=-1$ y $x=2$. Así, tenemos la siguiente integral:

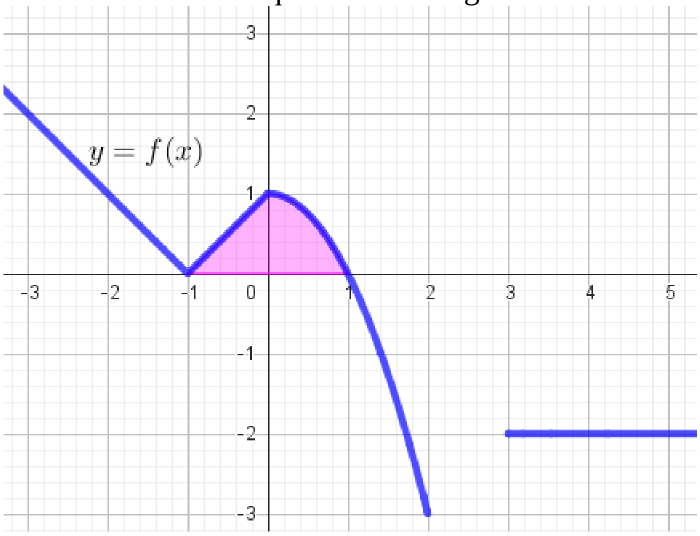
$$A=\int_{-1}^{2}\left(ax^2+2\right)dx=21\Leftrightarrow a\frac{x^3}{3}+2x\Bigg]_{-1}^{2}=21\Leftrightarrow a\frac{8}{3}+4-\left(-a\frac{1}{3}-2\right)=21\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{8a}{3}+\frac{12}{3}+\frac{a}{3}+\frac{6}{3}=21\Leftrightarrow 9a+18=63\Leftrightarrow a=\frac{63-18}{9}\Leftrightarrow a=\frac{45}{9}\Leftrightarrow a=5$$

Por tanto, la función es $f(x)=5x^2+2$

**11.** Dada la función $f(x)=\begin{cases} |x+1| & si \quad x\le 0 \\ -x^2+1 & si \quad 0<x\le 2 \\ -2 & si \quad x>2 \end{cases}$.

Se pide: Calcula el área del recinto cerrado que delimita la gráfica de la función con el eje *OX*.




Los límites de integración son los puntos de corte de la función con el eje OX:

$$|x+1| = 0 \Rightarrow x+1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

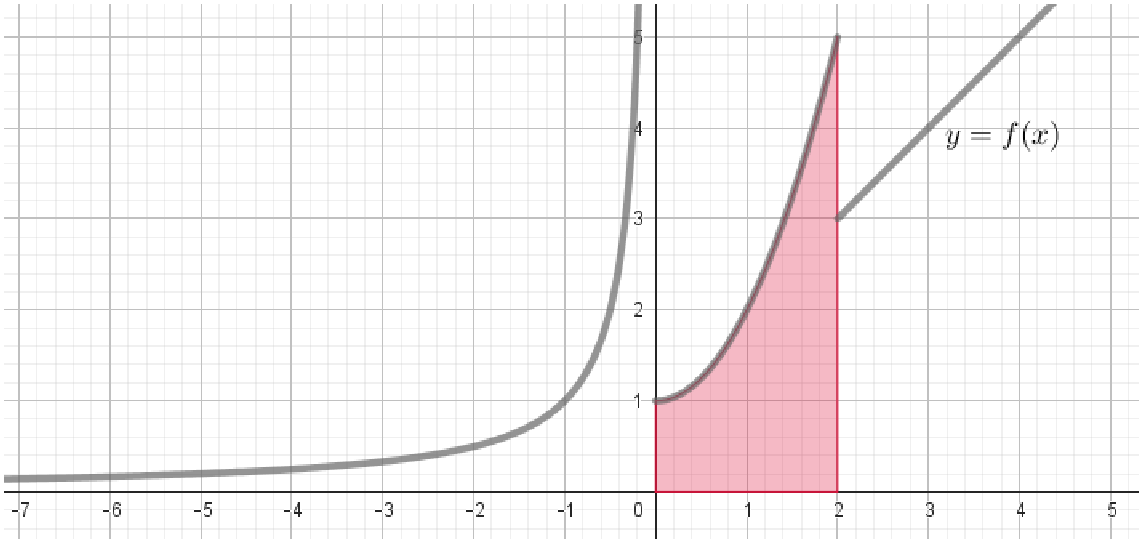
$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{1} = \pm 1$ (solo nos vale $x = 1$, ya que $x = -1$ está fuera del dominio)
$-2 = 0$ nunca
Así, los límites de integración son $x = -1$ y $x = 1$
El área pedida es:

$$A = \int_{-1}^{0} |x+1|\,dx + \int_{0}^{1} \left(-x^2 + 1\right) dx = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}\ \text{u}^2$$

**12.** Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x < 0 \\ x^2 + 1 & \text{si} \quad 0 \le x < 2 \\ x + 1 & \text{si} \quad x \ge 2 \end{cases}$$

Se pide: Área del recinto limitado por la gráfica de $f(x)$, los ejes de coordenadas y la recta $x = 2$.



Los límites de integración son $x=0$ (ya que el área pedida está limitada por el eje OY) y $x=2$ (recta dada), y, por tanto, el área pedida es:

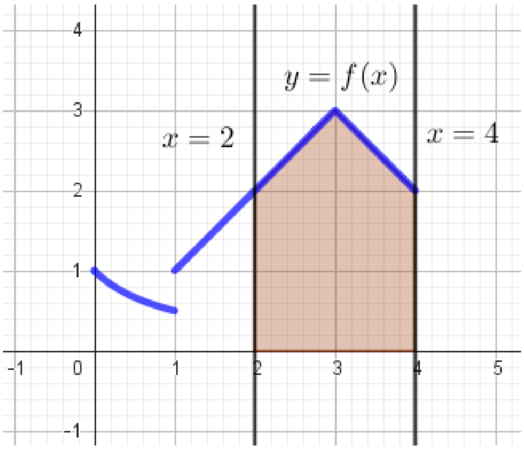
$$A=\int_0^2\left(x^2+1\right)dx=\left.\frac{x^3}{3}+x\right]_0^2=\frac{8}{3}+2-\left(\frac{0}{3}+0\right)=\frac{13}{3}\text{ u}^2$$

**13.** Dada la función

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x+1} & \text{si } 0\le x\le 1\\ x & \text{si } 1<x<3\\ 6-x & \text{si } 3\le x\le 4\end{cases}$$

Calcula el área del recinto limitado por el eje OX, la gráfica de $f$ y las rectas $x=2$ y $x=4$.

En este caso, los límites de integración nos vienen dados por las rectas $x=2$ y $x=4$. La gráfica de la función es:




Ojo, aunque los límites de integración son $x=2$ y $x=4$, en ese intervalo hay dos funciones que están por encima, luego hay que calcular el punto de corte de ambas funciones (sólo nos interesa la coordenada *x*), para dividir el intervalo en dos intervalos:

$$x=6-x\Rightarrow 2x=6\Rightarrow x=\frac{6}{2}=3$$

Por tanto, tenemos que calcular dos integrales:

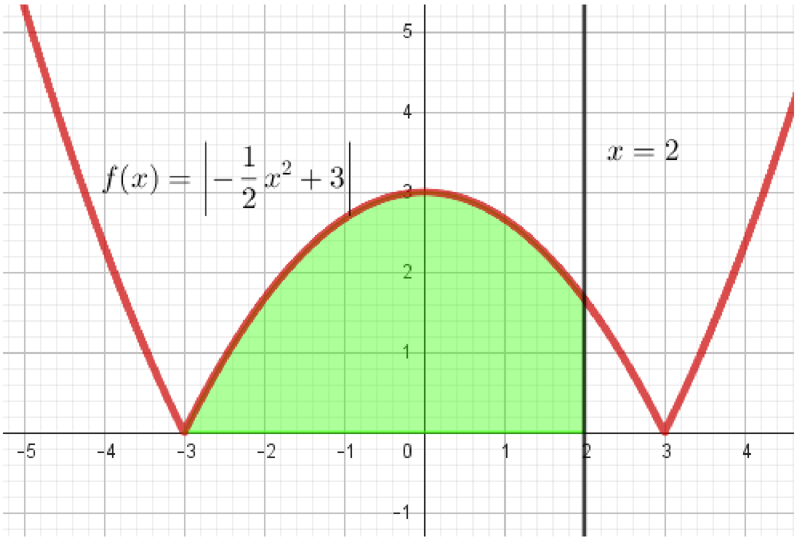
1ª) Integral de la función $f_1(x)=x$ en el intervalo $[2,\ 3]$

2ª) Integral de la función $f_2(x)=6-x$ en el intervalo $[3,\ 4]$

El área pedida vale:

$$A=\int_2^3 xdx+\int_3^4(6-x)\,dx=\left.\frac{x^2}{2}\right]_2^3+\left.6x-\frac{x^2}{2}\right]_3^4=\frac{9}{2}-\frac{4}{2}+24-\frac{16}{2}-\left(18-\frac{9}{2}\right)=\frac{14}{2}-2=5\text{ u}^2$$

**14.** Dada la función $f(x)=\left|-\frac{1}{3}x^2+3\right|$. Calcula el área del recinto limitado por el eje *OX*, la gráfica de $f$ y la recta $x=2$.




Calculamos los límites de integración (puntos de corte con el eje OX):

$$f(x)=\left|-\frac{1}{3}x^2+3\right|=0 \Rightarrow -\frac{1}{3}x^2+3=0 \Rightarrow -\frac{1}{3}x^2=-3 \Rightarrow x^2=\frac{-3}{-\frac{1}{3}}=9 \Rightarrow x=\pm\sqrt{9}=\pm 3$$

Por tanto, el límite inferior de integración es $x=-3$ y el límite superior es $x=2$, que es la recta que nos dan.
El área pedida es:

$$A=\int_{-3}^{2}\left(-\frac{1}{3}x^2+3\right)dx=-\frac{1}{3}\frac{x^3}{3}+3x\Big]_{-3}^{2}=\frac{100}{9}\text{ u}^2$$

**15.** Consider la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x|x-1|$. Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de dicha función y su recta tangente en el punto de abscisa $x=0$.

Se tiene que:

$$f(x)=x|x-1|=\begin{cases} x(x-1) & \text{si} \quad x\geq 1 \\ x(-x+1) & \text{si} \quad x<1 \end{cases}=\begin{cases} x^2-x & \text{si} \quad x\geq 1 \\ -x^2+x & \text{si} \quad x<1 \end{cases}$$

y, la ecuación de la recta tangente a $f$ en $x=0$ es:

$$y-f(a)=f'(a)(x-a) \Rightarrow y-0=1(x-0) \Rightarrow y=x$$

Los límites de integración son:

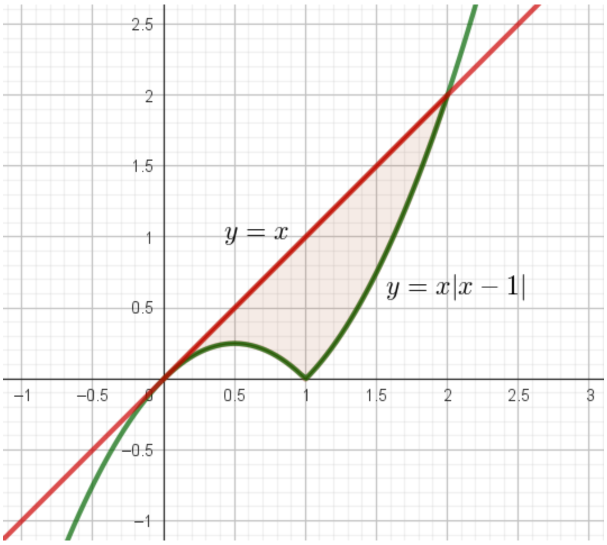
$$-x^2+x=x \Rightarrow -x^2=0 \Rightarrow x=0$$

$$x^2-x=x \Rightarrow x^2-2x=0 \Rightarrow x(x-2)=0 \Rightarrow x=\begin{cases} 0 \\ 2 \end{cases}$$

El área pedida es:

$$A=\int_0^1\left[x-\left(-x^2+x\right)\right]dx+\int_1^2\left[x-\left(x^2-x\right)\right]dx=\int_0^1 x^2dx+\int_1^2\left(-x^2+2x\right)dx=$$

$$=\frac{x^3}{3}\Big|_0^1+\left(-\frac{x^3}{3}+\frac{2x^2}{2}\right)\Big|_1^2=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1\text{ u}^2$$




## Ejercicios:

**191.** Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x$, el eje de abscisas y las rectas $x = -1$ y $x = 3$.

**192.** Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones $f(x) = 4x - x^2$ y $g(x) = \frac{1}{2}x - 2$, en el intervalo $[0,4]$.

**193.** Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones $f(x) = -x^4 + 4x^2$ y $g(x) = -x^2 + 4$ en el intervalo $[-2,2]$.

**194.** Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+2x}}$, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = 6$.

**195.** Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $g(x) = \cos x$ en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

**196.** Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones $y = x$, $y = x^2$ e $y = \frac{1}{4}x^2$.

**197.** Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de la función

$$f(x) = \begin{cases} (x+2)^2 - 4 & \text{si} \quad x < 0 \\ -(x-2)^2 + 4 & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

el eje de abscisas y las rectas $x = -4$ y $x = 4$.

***Ejercicios de Selectividad***

Otra propuesta 2 de 2000, Tercer Bloque, A)

Otra propuesta 1 de 2000, Tercer Bloque, A)

Septiembre de 2000, Primer Bloque, A)

Junio de 2000, Cuarto Bloque, A)

Otra propuesta 2 de 2001, Primer Bloque, A)

Otra propuesta 1 de 2001, Cuarto Bloque, A)

Junio de 2001, Primer Bloque, A)

Septiembre de 2002, Cuarto Bloque, A)

Reserva 2 de 2002, Tercer Bloque, A)

Junio de 2002, Tercer Bloque, A)

Reserva 1 de 2003, Primer Bloque, A)

Junio de 2003, Tercer Bloque, A)

Septiembre de 2004, Segundo Bloque, A)

Reserva 2 de 2005, Segundo Bloque, B)

Reserva 1 de 2005, Segundo Bloque, B)

Reserva 2 de 2006, Segundo Bloque, A)

Reserva 1 de 2006, Segundo Bloque, B)

Septiembre de 2006, Segundo Bloque, B)

Junio de 2006, Segundo Bloque, B)

Reserva 2 de 2007, Segundo Bloque, A)

Septiembre de 2007, Segundo Bloque, B)

Junio de 2007, Segundo Bloque, B)

Reserva 2 de 2008, Segundo Bloque, A)

Septiembre de 2008, Segundo Bloque, B)

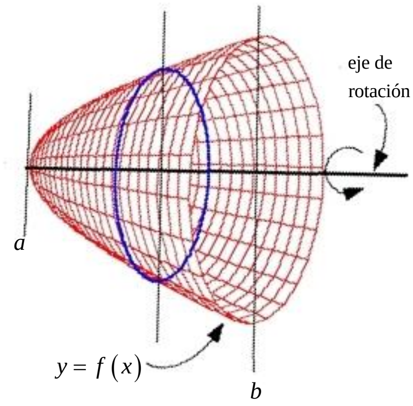
Reserva 2 de 2009, Segundo Bloque, B)

Reserva 2 de 2010, Propuesta A, 2A)

Reserva 1 de 2010, Propuesta A, 2A)

Junio de 2010, Propuesta A, 2A)

# 5. VOLUMEN Y ÁREA DE UN CUERPO DE REVOLUCIÓN

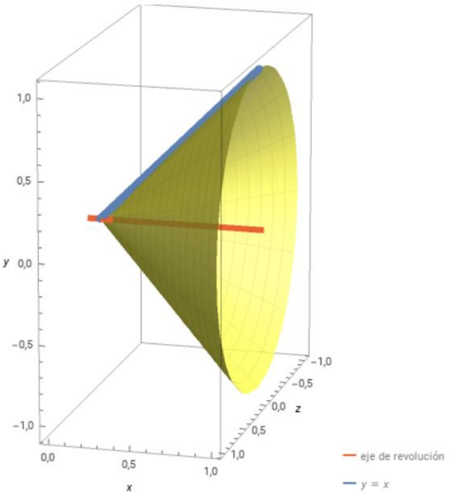



El ***volumen del cuerpo de revolución*** engendrado al girar un arco de curva continua, $y = f(x)$, $a \le x \le b$, alrededor del eje $OX$ es:

$$\boxed{V = \pi \int_a^b f(x)^2\, dx}$$

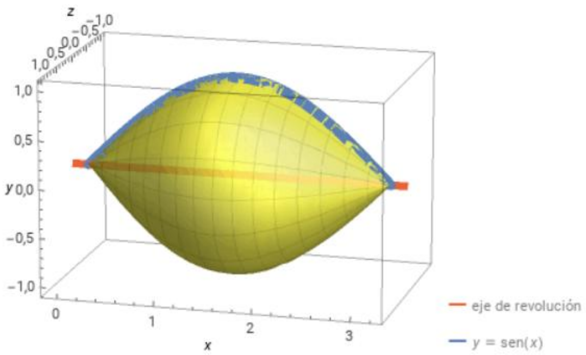
***Ejemplos:***

**1)** Calcula el volumen del sólido de revolución engendrado al girar, alrededor del eje $OX$, la curva $y=x$, entre $x=0$ y $x=1$.




$$V=\pi\int_0^1 x^2dx=\pi\left(\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=\frac{\pi}{3}\ \text{u}^3$$

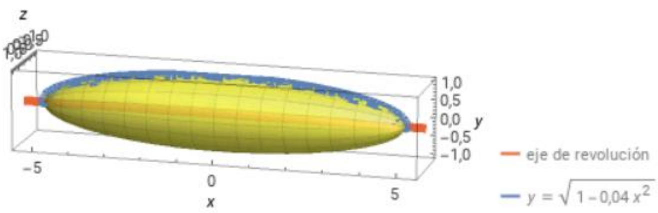
**2)** Calcula el volumen del sólido de revolución engendrado al girar, alrededor del eje $OX$, la curva $y=\operatorname{sen}x$, entre $x=0$ y $x=\pi$.




$$V=\pi\int_0^\pi \operatorname{sen}^2 xdx=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi\left(1-\cos(2x)\right)dx=$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(x-\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x)\right)\Bigg|_0^\pi=\frac{\pi^2}{2}\ \text{u}^3$$

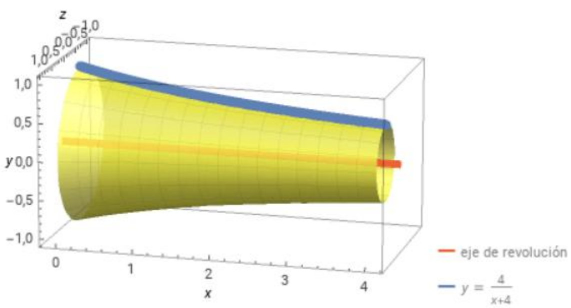
**3)** Calcular el volumen del cuerpo de revolución limitado por la elipse $\frac{x^2}{25}+y^2=1$ al dar una vuelta completa alrededor del eje $OX$.




$$V=\pi\int_{-5}^5\left(\sqrt{1-\frac{x^2}{25}}\right)^2dx=\pi\int_{-5}^5\left(1-\frac{x^2}{25}\right)dx=$$

$$=\pi\left(x-\frac{x^3}{75}\right)\Bigg|_5^{-5}=\frac{20\pi}{3}\ \text{u}^3$$

**4)** La curva $y=\frac{4}{x+4}$, los ejes de coordenadas y la recta $x=4$ limitan una superficie. Calcular el volumen del cuerpo de revolución engendrado al girar dicha superficie alrededor del eje $OX$.




$$V = \pi \int_0^4 \left( \frac{4}{x+4} \right)^2 dx = \pi \left( -\frac{16}{x+4} \right) \Bigg|_0^4 = 2\pi \text{ u}^3$$

El ***volumen del cuerpo de revolución*** que se obtiene al girar la superficie comprendida entre dos curvas continuas, $y = f(x)$ e $y = g(x)$, alrededor del eje $OX$ , *en el intervalo* $a \le x \le b$ es:

$$\boxed{V = \pi \left| \int_a^b \left( f^2(x) - g^2(x) \right) dx \right|}$$

## ***Ejemplo:***

Calculamos el volumen generado por la superficie comprendida entre las siguientes funciones cuando giran alrededor del eje $OX$ :

$$f(x) = \frac{6}{x} \quad \text{y} \quad g(x) = -\frac{x}{2} + 4$$

Calculamos los límites de integración:

$$f(x) = g(x) \Rightarrow \frac{6}{x} = -\frac{x}{2} + 4 \Rightarrow x^2 - 8x + 12 = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} 2 \\ 6 \end{cases}$$

El volumen pedido es:

$$V = \pi \left| \int_a^b \left[ f^2(x) - g^2(x) \right] dx \right| = \pi \left| \int_2^6 \left( \left( \frac{6}{x} \right)^2 - \left( -\frac{x}{2} + 4 \right)^2 \right) dx \right| = \pi \left| \int_2^6 \left( \frac{36}{x^2} - \frac{x^2}{4} + 4x - 16 \right) dx \right| =$$

$$= \pi \left| \left( -\frac{36}{x} - \frac{x^3}{12} + 2x^2 - 16x \right) \Bigg|_2^6 \right| = \pi \left| -48 - \frac{128}{3} \right| = \boxed{\frac{16\pi}{3} \text{ u}^3}$$

## ***Ejercicio de Selectividad***

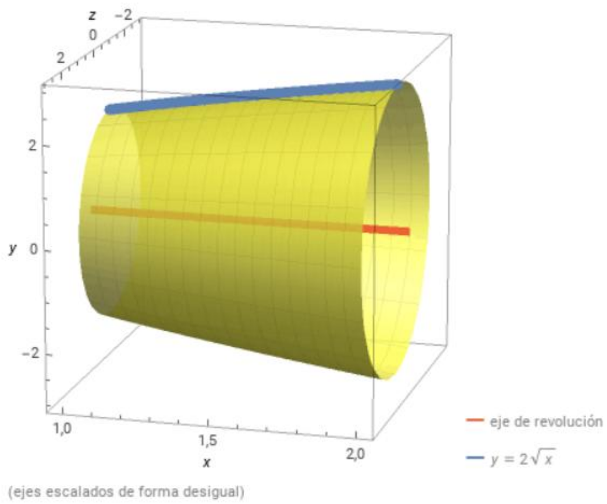
[Modelo 2 de 2024, 5a)]

El ***área del cuerpo de revolución*** engendrado al girar un arco de curva con derivada primera continua, $y = f(x)$, $a \le x \le b$, alrededor del eje $OX$ es:

$$\boxed{A = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + \left[ f'(x) \right]^2} dx}$$

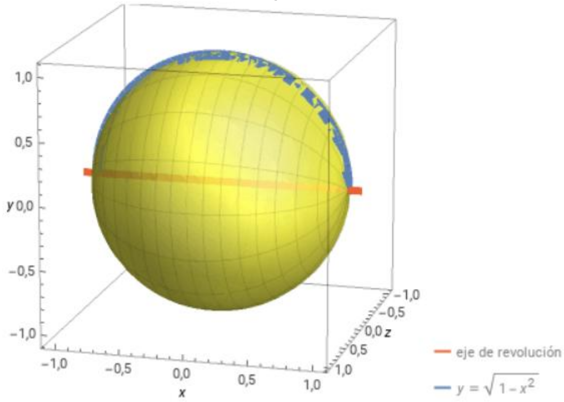
## ***Ejemplos:***

**1)** Calcula el área del cuerpo de revolución obtenido al girar la curva $y = 2\sqrt{x}$ , alrededor del eje $OX$ , entre $1 \le x \le 2$.




$$A = 2\pi\int_1^2 2\sqrt{x}\sqrt{1+\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2}\,dx =$$
$$= 4\pi\int_1^2 \sqrt{x+1}\,dx =$$
$$= 4\pi\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{2}{3}}\Big|_1^2 = \frac{8\pi}{3}\left(3\sqrt{3}-2\sqrt{2}\right)\ \text{u}^2$$

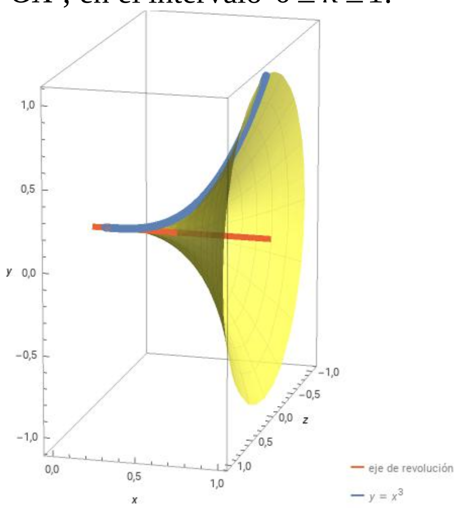
**2)** Calcula el área del cuerpo de revolución obtenido al girar la circunferencia $x^2+y^2=1$ alrededor del eje $OX$.




$$x^2+y^2=1 \Rightarrow y=\sqrt{1-x^2} \Rightarrow y' = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$A = 2\pi\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\sqrt{\frac{1}{1-x^2}}\,dx \underset{(1)}{=} 4\pi\int_0^{-1}dx = 4\pi x\Big|_0^1 = 4\pi\ \text{u}^2$$

(donde en (1) hemos tenido en cuenta que la circunferencia es simétrica respecto del eje *OX*).

**3)** Calcula el área del cuerpo de revolución obtenido al girar la curva $y=x^3$, alrededor del eje $OX$, en el intervalo $0\le x\le 1$.




$$A = 2\pi\int_0^1 x^3\sqrt{1-9x^4}\,dx =$$
$$= \begin{bmatrix} t = 1+9x^4 & x=0\Rightarrow t=1 \\ dt = 36x^3dx & x=1\Rightarrow t=10 \end{bmatrix} =$$
$$= \frac{2\pi}{36}\int_1^{10}\sqrt{t}\,dt = \frac{\pi}{18}\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_1^{10} = \frac{\pi}{27}\left(10\sqrt{10}-1\right)\ \text{u}^2$$

| **GeoGebra** |
|---|
| Integral calculus for volume of solids of rotation |

Author: Daniel Mentrard
Topic: Calculus, Rotation, Solids or 3D Shapes, Volume
https://www.geogebra.org/m/z9gyatka?s=03

# 6*. LONGITUD DE UN ARCO DE CURVA

A través de la historia de las matemáticas, grandes pensadores consideraron imposible calcular la longitud de un arco irregular. Aunque **Arquímedes** había descubierto una aproximación rectangular para calcular el área bajo una curva con un método de agotamiento (método de exhaución), pocos creyeron que fuese posible que una curva tuviese una longitud definida, como las líneas rectas. Las primeras mediciones se hicieron usando aproximaciones: los matemáticos de la época trazaban un polígono dentro de la curva, y calculaban la longitud de los lados de éste para obtener un valor aproximado de la longitud de la curva. Al aumentar el número de segmentos, disminuyendo la longitud de cada uno, se obtenía una aproximación cada vez mejor.

En el siglo XVII, el método de exhausción llevó a la rectificación por métodos geométricos de muchas curvas: la espiral logarítmica por **Torricelli** en 1645 (algunos piensan que fue **John Wallis** en 1650), la cicloide por **Christopher Wren** en 1658, la catenaria por **Gottfried Leibniz** en 1691…

### Longitud de un arco de curva

Dado un arco de curva en el espacio, definido por sus ecuaciones paramétricas:

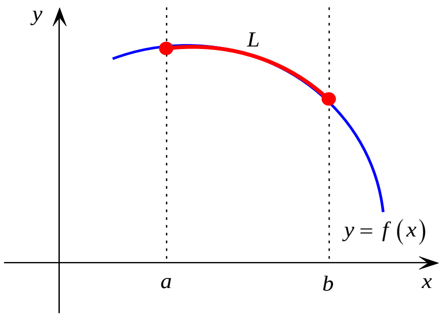
$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t) \text{ con } t \in [a,b]$$

la longitud del arco viene dada por:

$$\boxed{L = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\,dt}$$

Si la curva viene dada en forma explícita, $y = f(x)$, entonces:

$$\boxed{L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx}$$




**GeoGebra**

Longitud de arco
Autor: Instituto GeoGebra de Celaya
Tema: Integral Definida
https://www.geogebra.org/m/CfStT8bR

Longitud de arco
Autor: Ana Belem Gutiérrez Rosas
https://www.geogebra.org/m/NR2US28H

# 7. GEOGEBRA

**(1) Matemáticas II, 2º bachillerato**
Autor: José M. Melián
Tema: Matemática
https://www.geogebra.org/m/hk8zhfnx

**(2) Derivadas**
Autor: Aula MatemáTICa, tu blog de aula
Tema: Derivada
https://www.geogebra.org/m/VS79P8bZ

**(3) Cálculo gráfico de derivadas**
Autor: Luisa García
Tema: Cálculo, Derivada
https://www.geogebra.org/m/Me6qQAQ2

**(4) Tres problemas de optimización**
Autor: Ignacio Larrosa Cañestro
Tema: Problemas de Optimización
https://www.geogebra.org/m/vs539RDT

**(5) Extremos Relativos de una Función**
Autor: Javier Diaz Ugalde
https://www.geogebra.org/m/DGaAkrtn

**(6) Puntos de inflexión**
Autor: Lucas Castro
Tema: Derivada
https://www.geogebra.org/m/JdXNCQeG

**(7) Cálculo integral**
Autor: Miguel Ángel Fresno Martínez
Tema: Cálculo, Cálculo integral
https://www.geogebra.org/m/fTkpUM4E

# 8.* EL LOGARITMO NATURAL

La función logarimo natural se puede definir por

$$\log : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$$

$$\log x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$$

Aplicando el Teorema Fundamental del Cálculo sabemos que es una función derivable y, por tanto, continua, con

$$(\log x)' = \frac{1}{x}$$

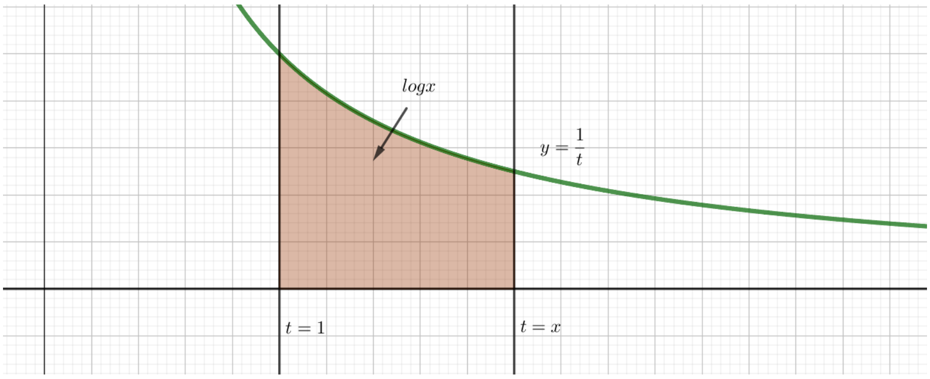
esto es, es una función estrictamente creciente. Como además

$$(\log x)'' = -\frac{1}{x^2}$$

se tiene que log es una función cóncava.

***Interpretación geométrica de los logaritmos***:

$\log x$ es el área limitada por la función $y = \frac{1}{t}$, el eje de abscisas y las rectas verticales $t = 1$ y $t = x$.



# Unidad 12:
# PROBABILIDAD

## 1. INTRODUCCIÓN

La Teoría de la Probabilidad se interesa por el análisis de la noción intuitiva de «azar» o «aleatoriedad», la cual como todas las nociones se origina en la experiencia. La idea cuantitativa de azar tomó forma primero con las tablas de juegos y comenzó con **Pascal** y **Fermat** (1645) como teoría de los juegos de azar. Desde entonces, la palabra probabilidad aparece en nuestro lenguaje ordinario en multitud de ocasiones. Así, afirmaciones del tipo de que la probabilidad de obtener dos seises al lanzar dos dados no cargados es uno entre 36, de que hay una probabilidad ligeramente inferior a un medio de que un bebé recién nacido sea varón y de que en los próximos dos años la probabilidad de que se pueda curar el cáncer es pequeña, puede decirse que expresan juicios de probabilidad. Sin embargo, cada uno de los ejemplos anteriores se refiere a un tipo diferente de juicio de probabilidad. El primero se refiere a un juicio de probabilidad que podríamos denominar clásico, en el que los posibles resultados son equiprobables (todos tienen la misma probabilidad de ocurrir). El segundo es una afirmación de tipo frecuentista y se refiere a la frecuencia relativa con la que cierta propiedad aparece entre los miembros de una clase determinada, y el tercero constituye un ejemplo de lo que podríamos llamar un juicio de credibilidad y es una medida del grado de confianza que tenemos en la verdad de una cierta proposición o en el acaecimiento de un suceso determinado.

## 2. EXPERIMENTOS

En general, llamaremos **experimento** a cualquier procedimiento especificado o conjunto de operaciones que proporcionan unos determinados resultados.

Llamaremos **experimento determinista** a aquel en el que se cumplen las siguientes dos condiciones:

a) se conocen todos los posibles resultados de la experiencia.
b) se sabe con certeza el resultado que se va a obtener al repetir la experiencia en condiciones prefijadas, quedando el fenómeno determinado por ellas.

### *Ejemplos:*

1. Tirar una piedra desde un edificio (sabemos que se va hacia abajo, y se puede calcular el tiempo que tardará en llegar al suelo…).
2. Calentar un cazo de agua (sabemos que la temperatura aumenta).
3. Golpear una pelota (sabemos que se va a mover, e incluso conociendo las fuerzas que actúan, podemos conocer precisamente dónde caerá)

Llamaremos **experimento aleatorio, probabilista o estocástico** a aquel en el que se cumplen las siguientes dos condiciones:

a) se conocen todos los posibles resultados de la experiencia.
b) repetido en igualdad de condiciones puede presentar resultados distintos en cada experiencia particular y al repetir la experiencia en condiciones fijadas no puede predecirse el resultado que se va a obtener.

***Ejemplos:***

1. Imaginemos que lanzamos un dado al aire (normal, de 6 caras y no trucado). ¿Podemos predecir el resultado que vamos a obtener? Evidentemente no.
2. Tirar una moneda al aire y observar qué cara cae hacia arriba.
3. Rellenar una quiniela de fútbol,
4. Jugar una partida de póker y, en general, cualquier juego en el que intervenga el azar.

La *Teoría de la Probabilidad* se ocupa de asignar un cierto número a cada posible resultado que pueda ocurrir en un experimento aleatorio, con el fin de cuantificar dichos resultados y saber si un suceso tiene más posibilidades de ocurrir que otro o relaciones parecidas. Con este fin, introduciremos algunas definiciones.

# 3. ESPACIO MUESTRAL. SUCESOS. ESPACIO DE SUCESOS

**Definiciones:**

Se llama **suceso elemental** a cada uno de los posibles resultados *indescomponibles* que pueden obtenerse al realizar un experimento aleatorio.

Denominamos **espacio muestral** al conjunto de resultados posibles que se obtienen al realizar un experimento aleatorio y lo denotaremos por $\Omega$ (aunque también se suele denotar por $E$).

Llamaremos **suceso** a cualquier subconjunto del espacio muestral, es decir, un suceso es un conjunto de puntos muestrales con alguna propiedad.

Denominamos **espacio de sucesos** al conjunto de todos los sucesos de un experimento aleatorio, y se designa por $\wp(\Omega)$, donde $\Omega$ es el espacio muestral asociado al experimento aleatorio.

En todo experimento aleatorio siempre hay, al menos, dos sucesos:
Llamamos **suceso imposible** al suceso que no contiene ningún suceso y lo representaremos por $\varnothing \in \wp(\Omega)$, y llamamos **suceso seguro** al suceso $\Omega \in \wp(\Omega)$, ya que contiene a todos los sucesos elementales del experimento.

***Ejercicios:***

***198.*** *Obtener el espacio muestral de los puntos obtenidos al tirar un dado.*

***199.*** *¿Y en el caso del lanzamiento de una moneda?*

***200.*** *Describir el espacio muestral del experimento consistente en extraer una bola de una bolsa en la que hay 3 rojas (R), 2 blancas (B) y 4 verdes (V).*

***201.*** *Escribir el espacio muestral asociado al experimento de sacar una carta de entre las diez del palo de copas de una baraja española.*

**Operaciones con sucesos:**

Definimos la **unión** de los sucesos $A$ y $B$, $A \cup B$, como el suceso formado por los sucesos elementales que pertenecen a alguno de los sucesos $A$ o $B$. Este suceso ocurre cuando ocurre $A$ o cuando ocurre $B$.

Definimos el suceso **intersección** de los sucesos $A$ y $B$, $A \cap B$, como el suceso que ocurre siempre que ocurren $A$ y $B$, es decir, está formado por los sucesos elementales que pertenecen a $A$ y a $B$.

Diremos que los sucesos $A$ y $B$ son:

a) **Compatibles** cuando $A \cap B \neq \varnothing$.
b) **Incompatibles** cuando $A \cap B = \varnothing$.

Definimos el suceso **complementario** de $A$, $\overline{A} = A^c = A^*$, como el suceso formado por los sucesos elementales que están en $\Omega$ y que no están en $A$, es decir, si $A$ no se realiza se realiza siempre $\overline{A}$.

Definimos la **diferencia** de los sucesos $A$ y $B$, $A - B$, como el suceso que se presenta cuando lo hace $A$ pero no $B$, esto es: $A - B = A \cap \overline{B}$.

## *Ejercicios:*

***202.*** *Sean los sucesos: A = {ser oyente de Cadena Dial}, B = {ser oyente de la Europa FM} y C = ={ser oyente de KISS FM}. Expresa mediante las operaciones de sucesos:*

1. *Ser oyente de, al menos, una emisora.*
2. *Ser oyente de Cadena Dial, pero no de Europa FM ni de KISS FM.*
3. *Oír sólo dos emisoras.*
4. *Oír alguna emisora, pero no las tres.*

***203.*** *En un sorteo de lotería nos fijamos en la cifra en que termina el «gordo».*

1. *¿Cuál es el espacio muestral?*
2. *Describe los sucesos A = «menor que », B = «par» y C = «mayor que 4», escribiendo todos sus elementos.*
3. *Halla los sucesos* $A \cup B$, $B \cap C$, $\overline{A} \cap \overline{B}$ y $A \cup \overline{C}$

**Las leyes de DE MORGAN y otras propiedades:**

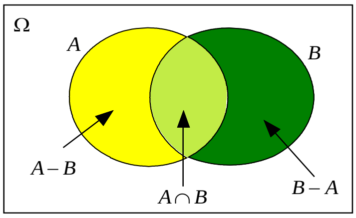
1) Leyes de De Morgan
$\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$ y $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$

2) Conmutativas
$A \cup B = B \cup A$ y $A \cap B = B \cap A$

3) Asociativas
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ y $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

4) Distributivas
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

5) $(A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A) = A \cup B$




## *Ejercicios:*

***204.*** *Aplicando las leyes de De Morgan, expresar el suceso* $(H \cup C)^c$*, donde H es el suceso ser hombre y C estar casado.*

***205.*** *Consideremos entre los habitantes de un municipio, los sucesos A = {ser socio del casino}, B = ={ser socio del club de fútbol local} y C = {ser socio de alguna asociación juvenil}. Expresa en función de A, B y C las siguientes situaciones:*

1. *Ser socio de alguna de esas asociaciones.*
2. *Ser socio de las tres asociaciones.*
3. *Ser socio, sólo, del casino.*
4. *Ser socio de, como máximo, una o dos asociaciones.*
5. *No ser socio de ninguna de las tres.*
6. *Ser socio de una sola asociación.*

# 4. EXPERIMENTOS COMPUESTOS. ESPACIO PRODUCTO

Llamaremos **experimento compuesto** al formado por varios experimentos simples. El espacio muestral asociado a un experimento compuesto se denomina **espacio compuesto o espacio producto**. Si $\Omega_1$ es el espacio muestral asociado al primer experimento y $\Omega_2$ el asociado al segundo experimento, entonces el espacio muestral compuesto es $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$.

## *Ejercicios:*

***206.*** *Halla los espacios muestrales (producto) de los siguientes experimentos:*

*a) Tirar dos monedas y apuntar el resultado de su cara superior.*
*b) Tirar un dado y una moneda.*
*c) Tirar tres monedas.*
*d) Tirar dos dados.*

***207.*** *Escribir el espacio muestral asociado al experimento de lanzar dos dados de diferentes colores y observar la pareja de números que se obtiene.*

***208.*** *Escribir el espacio muestral asociado al experimento de lanzar dos dados de diferentes colores y sumar los números que se obtienen.*

***209.*** *Consideremos los sucesos del experimento de lanzar dos monedas:*

*A = {sacar una cara y una cruz}*
*B = {al menos una cruz}*

*Calcular:* $A \cup B$, $A \cap B$, $\overline{A} \cap \overline{B}$ y $A - B$.

# 5. FRECUENCIAS DE UN SUCESO

Repetimos un experimento aleatorio $n$ – veces y sea $A$ un suceso cualquiera asociado a dicho experimento.

Se llama **frecuencia absoluta de $A$** al número

$$f_a(A) = \text{nº de veces que se verifica el suceso } A$$

Se llama **frecuencia relativa de $A$** al número

$$f_r(A) = \frac{f_a(A)}{n}$$

**Propiedades** de la frecuencia relativa:

1) $0 \le f_r(A) \le 1$

2) La suma de las frecuencias relativas de todos los sucesos elementales de un experimento aleatorio es igual a 1.

3) La frecuencia relativa de un suceso es igual a la suma de las frecuencias relativas de los sucesos elementales que lo componen.

4) $f_r(\Omega) = 1$ y $f_r(\emptyset) = 0$

5) Si $A$ y $B$ son sucesos incompatibles, entonces:

$$f_r(A \cup B) = f_r(A) + f_r(B)$$

6) Si $A$ y $B$ son sucesos compatibles, entonces:

$$f_r(A \cup B) = f_r(A) + f_r(B) - f_r(A \cap B)$$

7) La suma de las frecuencias relativas de dos sucesos contrarios es igual a 1:

$$f_r(A) + f_r(\overline{A}) = 1$$

***Ejercicio:***

***210.*** *Se ha lanzado un dado 100 veces y se han obtenido los siguientes resultados:*

| *Cara* | *1* | *2* | *3* | *4* | *5* | *6* |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_a$ | *13* | *15* | *17* | *16* | *20* | *19* |

*Calcular las frecuencias relativas de los sucesos siguientes:*

*a) A = salir par* *b) B = salir impar*

*c) C = salir 2 o 4* *d)* $A \cup A^c$ *y* $A \cap B^c$

# 6. DEFINICIÓN FRECUENTISTA: VON MISES

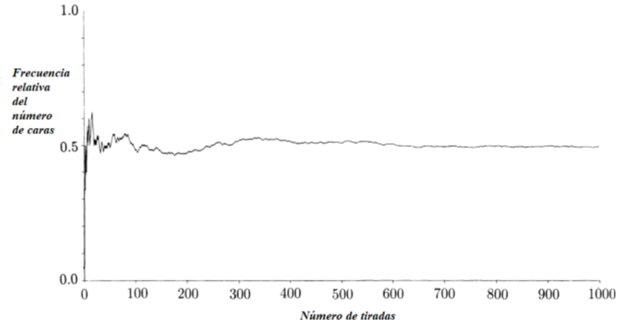
**Ley de regularidad de las frecuencias relativas**

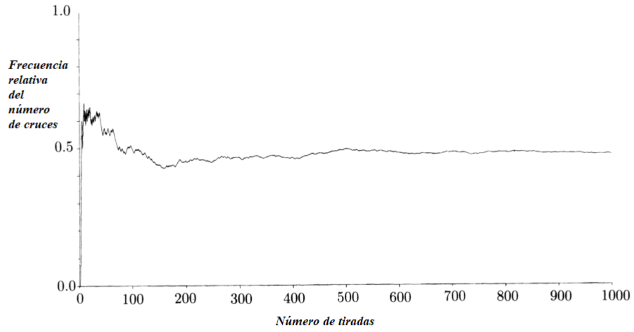
La frecuencia relativa de un suceso se acerca más y más a un valor fijo llamado probabilidad, conforme más veces se repite un experimento aleatorio, esto es:

$$\lim_{n \to \infty} f_r(A) = P(A)$$

Para Von Mises, la probabilidad de un suceso en relación con un experimento aleatorio sólo se puede conocer a través de la experiencia, es decir, la *medida de la incertidumbre* que nos representa la probabilidad del suceso, queda determinada al realizar un gran número de pruebas del experimento y examinar la frecuencia relativa del suceso en cuestión.

Esta concepción de la probabilidad tiene, dentro de la concepción axiomática (que veremos a continuación), una caracterización matemática resultado de las llamadas leyes de los grandes números, que establecen la convergencia de la frecuencia relativa de un suceso a su probabilidad.




# 7. DEFINICIÓN CLÁSICA: LAPLACE

Está basada en el concepto de resultados igualmente verosímiles y motivado por el *Principio de la razón insuficiente*, el cual postula que, si no existe un fundamento para preferir una entre varias posibilidades, todas deben ser consideradas equiprobables.

## *Ejemplos*

1) Así, en el lanzamiento de una moneda perfecta la probabilidad de cara debe ser igual a la de cruz y, por tanto, ambas iguales a ½.
2) De la misma manera, la probabilidad de cada uno de los seis sucesos elementales asociados al lanzamiento de un dado debe ser igual a 1/6.

**Regla de LAPLACE**

Si los sucesos elementales del espacio muestral son equiprobables (es decir, tienen la misma probabilidad), entonces la probabilidad de un suceso cualquiera $A$ viene dada por el cociente entre el número de casos favorables de que ocurra $A$ y el número de casos posibles, esto es:

$$\boxed{P(A)=\frac{\text{Nº de casos favorables}}{\text{Nº de casos posibles}}}$$

**Propiedades** de la probabilidad:

1) $0 \leq P(A) \leq 1$

2) La suma de las probabilidades de todos los sucesos elementales de un experimento aleatorio es igual a 1.

3) La probabilidad de un suceso es igual a la suma de las probabilidades de los sucesos elementales que lo componen.

4) $P(\Omega)=1$ y $P(\varnothing)=0$

5) Si $A$ y $B$ son sucesos incompatibles, entonces:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$

6) Si $A$ y $B$ son sucesos compatibles, entonces:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

7) La suma de las probabilidades de dos sucesos contrarios es igual a 1, es decir,

$$P(A)+P(\overline{A})=1$$

8) Otra propiedad importantes es:

$$P(A\cap\overline{B})=P(A)-P(A\cap B)$$

***__Problemas:__***

**211.** *Se considera un experimento aleatorio que consiste en lanzar un dado. Se pide la probabilidad de obtener:*

a) *Número impar*
b) *Número primo*
c) *Múltiplo de 3*
d) *Múltiplo de 5*

**212.** *Se realiza un experimento aleatorio que consiste en la extracción de una carta de una baraja española. Se pide hallar las siguientes probabilidades:*

a) *Obtener un oro*
b) *Obtener un as*

**213.** *Consideremos el experimento aleatorio que consiste en lanzar dos dados y anotar la suma de los puntos de las caras superiores. Hallar la probabilidad de los siguientes sucesos:*

a) *Obtener suma igual a 8*
b) *Obtener suma menor o igual a 4*

**214.** *Una urna contiene dos bolas blancas y dos rojas. Se hacen cuatro extracciones con reemplazamiento. Encuentra: los sucesos A = {sólo ha salido una bola roja} y B = {la segunda extracción es bola roja} y calcula,* $P(A)$, $P(B)$, $P(A\cap B)$, y $P(A\cup B)$

**215.** *Se ha encargado la impresión de una encuesta. El impresor informa que cada millar de folios la máquina estropea 12 folios. Hallar la probabilidad de que elegido al azar un folio de la encuesta:*

a) *Esté mal impreso*
b) *Esté correctamente impreso*

**216.** *Hallar la probabilidad de que al lanzar tres monedas se obtenga al menos una cara.*

# 8. DEFINICIÓN AXIOMÁTICA: KOLMOGOROV

**__Definición:__**

Se llama medida de probabilidad a cualquier función que asocie a cada suceso $A$, del espacio de sucesos (finito), un número real de $[0,1]$ que llamamos **__probabilidad de__** $A$ y representamos por $P(A)$, que cumple los siguientes axiomas:

1) La probabilidad de un suceso cualquiera es mayor o igual que cero: $P(A)\geq 0$
2) La probabilidad del suceso seguro es igual a la unidad: $P(\Omega)=1$
3) La probabilidad de dos sucesos incompatibles es igual a la suma de las probabilidades de cada uno de ellos, es decir, si $A$ y $B$ son incompatibles, entonces:
$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$

**Propiedades:**
Las mismas que en el apartado anterior.

## ***Problemas:***

***217.*** *Se lanzan dos dados cúbicos. Hallar la probabilidad de que los resultados de cada dado sean distintos.*

***218.*** *Un jugador de fútbol, especialista en lanzar penaltis, mete 4 de cada 5 que tira. Para los próximos tres penaltis que tire, se consideran los siguientes sucesos: A = {mete sólo uno de ellos}, B = {mete dos de los tres} y C = {mete el primero}. Halla la probabilidad de los sucesos* $A\cup B$, $A\cap C$ *y* $B\cap C$.

***219.*** *En una joyería hay dos alarmas. La probabilidad de que se active la primera es* $\frac{1}{3}$*, de que se active la segunda es* $\frac{2}{5}$ *y de que se activen las dos a la vez es* $\frac{1}{15}$*. ¿Cuál es la probabilidad de que se active alguna de las dos? ¿Y de que no se active ninguna de ellas?*

# 9. PROBABILIDAD CONDICIONADA

Sea $A$ un suceso con $P(A)>0$. Para cualquier otro suceso $B$ se define la **probabilidad de** $B$ **condicionada a** $A$ por:

$$\boxed{P\left(B/A\right)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}}$$

Como consecuencia:

$$P(A\cap B)=P(A)P\left(B/A\right)$$

Otras propiedades de la probabilidad condicionada que es necesario conocer:

1) $P\left(\overline{B}/A\right)=1-P\left(B/A\right)$

Demostración:

$$P\left(\overline{B}/A\right)\underset{[1]}{=}\frac{P\left[A-(A\cap B)\right]}{P(A)}=\frac{P(A)-P(A\cap B)}{P(A)}=1-\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=1-P\left(B/A\right)$$

donde en [1] se ha tenido en cuenta que $A\cap\overline{B}=A-(A\cap B)$.

2) Si $B_1$ y $B_2$ son sucesos incompatibles, entonces:

$$P\left(B_1 \cup B_2 / A\right) = P\left(B_1 / A\right) + P\left(B_2 / A\right)$$

Demostración:

$$P\left(B_1 \cup B_2 / A\right) = \frac{P\left[\left(B_1 \cup B_2\right) \cap A\right]}{P(A)} = \frac{P\left(B_1 \cap A\right) + P\left(B_2 \cap A\right)}{P(A)} = P\left(B_1 / A\right) + P\left(B_2 / A\right)$$

***Problemas:***

**220.** *Dos sucesos tienen la misma probabilidad igual a 0.5. La probabilidad de que ocurra uno de los sucesos sabiendo que ha ocurrido el otro es igual a 0.3. ¿Cuál es la probabilidad de que no curra ninguno de los dos sucesos?*

**221.** *A un alumno le lleva en coche a la facultad el 80 % de los días un amigo. Cuando le lleva en coche llega tarde el 20 % de los días. Cuando el amigo no le lleva, el alumno llega temprano a clase el 10 % de los días. Determinar:*

*a) La probabilidad de que llegue pronto a clase y le haya llevado el amigo.*
*b) La probabilidad de que llegue tarde a clase.*
*c) Si ha llegado pronto a clase calcúlese, ¿Cuál es la probabilidad de que no le haya llevado el amigo?*

**222.** *Sean $A$ y $B$ dos sucesos con* $P(A) = 0.5$, $P(B) = 0.3$ *y* $P(A \cap B) = 0.1$. *Calcular las siguientes probabilidades:*

$$P(A \cup B),\ P\left(A / B\right),\ P\left(A / A \cap B\right) \text{ y } P\left(A / A \cup B\right)$$

# 10. INDEPENDENCIA DE SUCESOS

Se dice que un suceso $A$ **es independiente de** otro suceso $B$ si

$$P\left(A / B\right) = P(A)$$

es decir, la presencia de $B$ no influye en la probabilidad de que $A$ ocurra o no.

Caracterización:

$$A \text{ es independiente de } B \Leftrightarrow P\left(A / B\right) = P(A) \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Como consecuencia, la independencia de sucesos es una propiedad recíproca, es decir, si $A$ es independiente de $B$, entonces $B$ es independiente de $A$, y por tanto, diremos que $A$ y $B$ son independientes.

Propiedad: Si $A$ y $B$ son independientes, entonces también lo son:

a) $\overline{A}$ y $\overline{B}$
b) $\overline{A}$ y $B$
c) $A$ y $\overline{B}$

Propiedad: Si $A$, $B$ y $C$ son independientes, entonces:

$$P(A\cap B\cap C)=P(A)P(B)P(C)$$

El recíproco no es cierto.

## ***Problemas:***

**223.** *Calcular la probabilidad de obtener tres cuatros al lanzar tres dados.*

**224.** *Calcular la probabilidad de «ningún seis» al lanzar cuatro dados.*

**225.** *Calcular la probabilidad de «algún seis» al lanzar cuatro dados. («Algún seis» es el suceso contrario de «Ningún seis»)*

**226.** *En una clase infantil hay 6 niñas y 10 niños. Si se escoge a 3 alumnos al azar, halla la probabilidad de:*

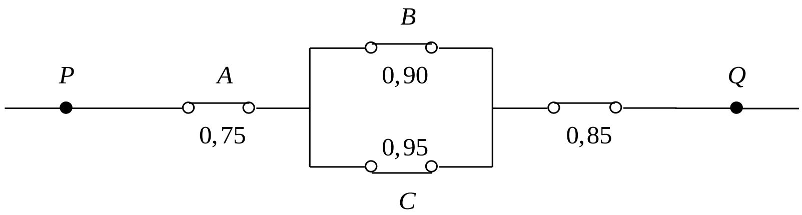
*a) Seleccionar tres niños.*
*b) Seleccionar 2 niños y una niña.*
*c) Seleccionar, al menos, un niño.*

**227.** *Se tienen dos sucesos A y B. Si las probabilidades*

$$P(A)=0.7,\ P(B)=0.6 \text{ y } P\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)=0.58$$

*a) ¿Son independientes A y B?*
*b) Halla la probabilidad de que no se cumpla ni A ni B.*

**228.** *Un circuito eléctrico dispone de cuatro interruptores A, B, C y D, cuyas probabilidades de estar cerrados se muestran en la figura:*




*¿Cuál es la probabilidad de que en un momento dado pase corriente de P a Q?*

**229.** *En un IES hay organizadas actividades extraescolares de carácter deportivo. De los alumnos de 2º de Bachillerato, participan en esas actividades 14 chicas y 22 chicos. En ese curso hay un total de 51 chicos y 44 chicas. Si se escoge un alumno al azar, calcula la probabilidad de que:*

*a) Sea chico y no participe en dichas actividades.*
*b) Participe en las actividades sabiendo que es chica.*
*c) Sea chica, sabiendo que participa.*

**230.** *En cierta población laboral, un 80 % son peones sin cualificar (suceso P) y un 50 % son mujeres (suceso M). Se sabe, además, que el 40 % son peones femeninos y que un 45 % de los trabajadores cuyos padres tienen estudios (suceso PE), son mujeres. Di si son independientes los sucesos:*

*a) P y M*
*b) PE y M*
*c)* $P$ y $\overline{M}$

# 11. PROBABILIDAD TOTAL. FÓRMULA DE BAYES

**Fórmula de la probabilidad compuesta:**
Si $A_1,...,A_n$ son $n$ sucesos ordenados, entonces:

$$P(A_1\cap...\cap A_n)=P(A_1)P\left(A_2/A_1\right)P\left(A_3/A_1\cap A_2\right)\cdot...\cdot P\left(A_n/A_1\cap A_{n-1}\right)$$

Se dice que los sucesos $A_1,...,A_n$ forman una **partición del espacio muestral** cuando

1) $A_i\cap A_j=\varnothing \quad \forall i\neq j$
2) $\bigcup_{i=1}^{n}A_i=\Omega$

**Teorema de la Probabilidad Total:**
Sea $A_1,...,A_n$ una partición del espacio muestral tal que $P(A_i)>0$, y sea $B$ otro suceso. Entonces:

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P\left(B/A_i\right)$$

Demostración:
Escribimos $B=B\cap\Omega$. Se tiene que $B=B\cap\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\bigcup_{i=1}^{n}(B\cap A_i)$ y, por tanto,

$$P(B)=P\left[\bigcup_{i=1}^{n}(B\cap A_i)\right]=\sum_{i=1}^{n}P(B\cap A_i)\underset{(1)}{=}\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P\left(B/A_i\right)$$

donde en (1) hemos usado la fórmula de la probabilidad compuesta. C.Q.D.

**Fórmula de BAYES:**
Sea $A_1,...,A_n$ una partición del espacio muestral tal que $P(A_i)>0$, y sea $B$ otro suceso. Entonces:

$$P\left(A_i/B\right)=\frac{P(A_i)P\left(B/A_i\right)}{\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P\left(B/A_i\right)}$$

Demostración:
Se tiene que

$$P\left(A_i/B\right)=\frac{P(A_i\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A_i)P\left(B/A_i\right)}{\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P\left(B/A_i\right)}$$

C.Q.D.

Las probabilidades $P(A_i)$ se llaman **probabilidades a priori** por formularse antes de la presencia del suceso $B$, las probabilidades $P\left(\frac{B}{A_i}\right)$ se llaman **verosimilitudes** y las probabilidades $P\left(\frac{A_i}{B}\right)$ se llaman **probabilidades a posteriori**, pues su cálculo se realiza después de contar con una información adicional suministrada por el suceso $B$.

## Problemas:

**231.** *De los créditos concedidos por un banco, un 42 % lo son para clientes nacionales, un 33 %, para clientes de la Unión Europea y un 25 % para clientes del resto del mundo. De esos créditos, son destinados a vivienda un 30 %, un 24 % y un l4 %, según sean nacionales, de la UE o del resto del mundo. Elegido un cliente al azar, ¿qué probabilidad hay de que el crédito concedido no sea para vivienda?*

**232.** *** Una urna contiene 4 bolas (blancas y negras). Se introduce una bola blanca y a continuación se extrae otra bola. ¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraída sea blanca?*

**233.** *En cierta empresa se producen dos bienes A y B en la proporción 3 a 4. La probabilidad de que un bien de tipo A tenga defecto de fabricación es del 3 %, y del tipo B, del 5 %. Se analiza un bien, elegido al azar, y resulta correcto. ¿Qué probabilidad existe de que sea del tipo A?*

**234.** *En cierta población, un 20 % de los trabajadores lo hace en la agricultura (A), un 25 % en la industria (I) y el resto en el sector de servicios (S). Un 63 % de los que trabajan en el campo son mayores de 45 años, siendo ese porcentaje del 38 % y el 44 % en los otros sectores. Seleccionado un trabajador al azar, ¿qué probabilidad hay de que tenga menos de 45 años?*

**235.** *En una casa hay tres llaveros A, B y C. El primero con 5 llaves, el segundo con 7 y el tercero con 8, de las que sólo una de cada llavero abre la puerta del trastero. Se escoge al azar un llavero, y de él, una llave para intentar abrir el trastero. Se pide:*

a) *¿Cuál es la probabilidad de que se acierte con la llave?*
b) *¿Cuál es la probabilidad de que el llavero escogido sea el tercero y la llave no abra?*
c) *Y si la llave escogida es la correcta, ¿cuál será la probabilidad de que pertenezca al llavero A?*

**236.** *Se dispone de tres urnas con las siguientes composiciones en bolas de color blanco (B) y negras (N):*

$$U_1 = \{3B, 7N\};\ U_2 = \{5B, 5N\};\ U_3 = \{8B, 2N\}$$

*Lanzamos un dado al aire, de modo que: Si sale 1, 2 o 3, extraemos una bola de la primera urna; si sale 4 o 5 hacemos la extracción una bola de la segunda urna, y, si sale 6, hacemos la extracción de una bola de la tercera. Tras realizar una extracción se verifica que ha salido una bola de color negro. Determinar la probabilidad de que proceda de la tercera urna.*

**237.** *En una bolsa hay 4 bolas negras y 5 blancas. En otra bolsa hay 2 bolas negras y 3 blancas. Se elige al azar una bolsa y de ella extrae una bola, se pide:*

a) *Si la bola extraída es de color blanco, probabilidad de que proceda de la primera urna.*
b) *Si la bola extraída es de color negro, probabilidad de que proceda de la segunda urna.*

***238.*** *Un armario tiene dos cajones. El cajón Nº 1 contiene 4 monedas de oro y 2 de plata. El cajón Nº 2 contiene 3 monedas de oro y 3 de plata. Se abre un cajón al azar y se extrae una moneda. Calcular:*

a) *Probabilidad de que se haya abierto el cajón Nº 2 y se haya extraído una moneda de oro.*
b) *Probabilidad de que se haya abierto el cajón Nº 1, sabiendo que, al extraer una moneda, ésta es de oro.*

***239.*** *Un taller tiene distribuidos los vehículos en tres naves. En la nave A hay 12 vehículos de los cuales 4 están averiados; en la nave B hay 6 vehículos y la mitad están averiados, y en la nace C de los 8 vehículos que contiene, hay 3 averiados. Si se elige una nave y un vehículo al azar, se pide:*

a) *¿Qué probabilidad hay de esté en perfectas condiciones de funcionamiento?*
b) *Si el vehículo está averiado, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la nave B?*

# 12. PROBLEMAS PROPUESTOS EN LA SELECTIVIDAD DE MATEMÁTICAS APLICADAS II

***240.*** *En una rifa con 500 papeletas, 75 tienen un premio de 100 euros, 150 tienen un premio de 25 euros y 275 un premio de 10 euros. Elegida una papeleta al azar, calcular la probabilidad de que: 1) Se obtenga un premio de 25 euros. 2) Se obtenga un premio menor de 100 euros.*

***241.*** *Juan es el responsable de un aula de informática en una empresa y no se puede confiar en él pues la probabilidad de que olvide hacer el mantenimiento de un ordenador en ausencia del jefe es 2/3. Si Juan le hace mantenimiento a un ordenador éste tiene la misma probabilidad de estropearse que de funcionar correctamente, pero si no le hace el mantenimiento sólo hay una probabilidad de 0,25 de funcionar correctamente. 1) ¿Cuál es la probabilidad de que un ordenador funcione correctamente a la vuelta del jefe? 2) A su regreso, el jefe se encuentra un ordenador averiado, ¿cuál es la probabilidad de que Juan no le hiciera el mantenimiento?*

***242.*** *Se truca una moneda de forma que la probabilidad de salir cara es doble que la de salir cruz. Si se lanza tres veces esta moneda. 1) Calcula el espacio muestral para este experimento. 2) Calcula la probabilidad de obtener dos cruces y una cara.*

***243.*** *En una oficina trabajan 4 secretarias que archivan documentos. Cada una de ellas archiva el 40 %, 10 %, 30 % y 20 %, respectivamente, de los documentos. La probabilidad que tiene cada una de ellas de equivocarse al archivar es 0.01, 0.04, 0.06 y 0.1 respectivamente. 1) ¿Cuál es la probabilidad de que un documento esté mal archivado? 2) Si se ha encontrado un documento mal archivado, ¿cuál es la probabilidad de que sea debido a la tercera secretaria?*

***244.*** *En el botiquín de un equipaje se encuentran dos cajas de pastillas para el dolor de cabeza y tres cajas de pastillas para el tiroides. El botiquín de otro equipaje hay tres cajas de pastillas para el dolor de cabeza, dos cajas de pastillas para el tiroides y una caja de pastillas laxantes. Si se saca una caja de pastillas al azar de cada uno de los equipajes, calcular la probabilidad de que: 1) Las dos cajas sean para el tiroides. 2) las dos cajas sean de pastillas diferentes.*

***245.*** *El 45 % de la población española deja su residencia habitual para ir de vacaciones de verano, de éstos sólo el 5 % sale al extranjero. No obstante, hay un 1 % de españoles que no estando de vacaciones sale al extranjero en el verano. Elegido un español al azar, calcular la probabilidad de que: 1) viaje al extranjero en el verano y 2) encontrándose en el extranjero, esté de vacaciones.*

***246.*** *Tenemos un dado (con sus seis caras numeradas del 1 al 6), trucado en el que es dos veces más probable que salga un número par que un número impar. 1) Calcula la probabilidad de salir par y la de salir impar. 2) Calcula la probabilidad de que, en un solo lanzamiento del dado, salga un número menor que 4.*

***247.*** *En un centro universitario hay matriculados 550 alumnos en primero, 300 en segundo y 150 en tercero. (Se cuenta cada alumno solamente en el curso inferior de todas las asignaturas que tenga). El porcentaje de matriculados en más de 8 asignaturas es: el 70 % de los alumnos de primero, el 90 % de los alumnos de segundo y el 30 % de los alumnos de tercero. Elegido un alumno al azar, halla la probabilidad de que 1) esté matriculado en más de 8 asignaturas y 2) estando matriculado en más de 8 asignaturas sea de primero.*

***248.*** *En una ciudad hay tres lugares de ocio (A, B, C) a los que van habitualmente un grupo de amigos. Las probabilidades de ir un día cualquiera a cada uno de ellos son, respectivamente, 0,4, 0,3 y 0,6. Hallar la probabilidad de que, un día cualquiera dicho grupo 1) solamente vaya a uno de los lugares, 2) vaya únicamente a dos de los lugares.*

***249.*** *En una clase de segundo de Bachillerato compuesta por el 55 % de chicos y el resto de chicas, practica el balonmano el 40 % de los chicos y una de cada cuatro chicas. Si elegimos al azar un alumno de la clase, 1) ¿cuál es la probabilidad de que practique balonmano? 2) ¿Cuál es la probabilidad de que practique balonmano y sea chica? 3) Si resulta que no practica balonmano, ¿cuál es la probabilidad de que sea chica?*

***250.*** *En una clase de segundo de bachillerato hay 10 chicos y 10 chicas, la mitad de las chicas y la mitad de los chicos han optado por la asignatura de Biología, calcular la probabilidad de que, elegido un alumno al azar de esa clase, 1) sea chico o haya elegido Biología, 2) sea chica y no haya elegido Biología*

***251.*** *Para superar una oposición se presentan dos modelos de examen A y B, en el modelo A hay 8 preguntas de contenido general y 12 de contenido específico y el modelo B se compone de 9 preguntas de contenido general y 6 de contenido específico (no hay preguntas comunes en los dos modelos de examen). Para elegir una pregunta, primero se elige un modelo de examen al azar y luego, al azar, se elige una pregunta del modelo elegido.1) ¿Cuál es la probabilidad de que la pregunta elegida sea de contenido específico? 2) Si la pregunta elegida es de contenido general, ¿cuál es la probabilidad de que se haya elegido previamente el modelo A?*

***252.*** *En un aula de una universidad, el porcentaje de diestros (sólo utilizan la mano derecha) es el 60 %, la de zurdos (sólo utilizan la mano izquierda) el 15 % y un 1 % que son ambidiestros (utilizan indistintamente ambas manos), 1) ¿cuál es la probabilidad de elegir un alumno de esta clase que sólo utilice una mano? 2) En otra aula de esa universidad con 25 alumnos, los diestros representan el 84 % del a clase y resto son zurdos. Si sacamos dos alumnos de clase, uno a uno y sin devolverlos al aula, ¿cuál es la probabilidad de que ambos utilicen la misma mano?*

***253.*** *En un colegio hay 30 niños no nacidos en España, de los cuales 6 han nacido en el Este de Europa, 15 en el Norte de África y el resto son de origen asiático. Al comenzar el curso, el centro les mide el nivel de español con el fin de proporcionarles clases especiales a los que lo necesiten. Hecha la prueba de nivel se observa que 3 niños del Este de Europa, 9 norteafricanos y 6 asiáticos necesitan clases compensatorias. 1) Si elegimos un niño del colegio al azar, ¿cuál es la probabilidad de que* *sea asiático y no necesite clases compensatorias? 2) Si elegido un niño al azar resulta que ha tenido que asistir a clases compensatorias, ¿cuál es la probabilidad de que sea de origen norteafricano?*

***254.*** *En un examen teórico para la obtención del permiso de conducir hay 14 preguntas sobre normas, 12 sobre señales y 8 sobre educación vial. Si se eligen dos preguntas al azar. 1) ¿Cuál es la probabilidad de que las dos preguntas sean de educación vial? 2) ¿Cuál es la probabilidad de que ninguna sea de señales?*

***255.*** *Los porcentajes de contenido violento que emite un determinado canal televisivo autonómico en las diferentes franjas horarias es el siguiente. 1 % por la mañana, 2 % por la tarde y 3 % por la noche. Si un telespectador cualquiera sintoniza un día aleatoriamente este canal con igual probabilidad de franja horaria: 1) ¿Cuál es la probabilidad de que no vea ningún contenido violento? 2) Si un telespectador ha visto un contenido violento en ese canal, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido por la mañana?*

***256.*** *En el arcén de una determinada carretera, las probabilidades de que un coche parado en este arcén tenga los neumáticos muy gastados es de 0,23 y de que tenga los faros defectuosos es de 0,24. También sabemos que la probabilidad de que un coche parado en este arcén tenga los neumáticos muy gastados o bien los faros defectuosos es de 0,38. Calcula la probabilidad de que un coche parado en ese arcén, 1) tenga los neumáticos muy gastados y los faros defectuosos. 2) no tenga ninguna de las dos averías.*

***257.*** *En una determinada granja de patos en la que sólo hay dos tipos, uno con pico rojo y otro con pico amarillo, se observa que: el 40 % son machos y con pico amarillo, el 20 % de todos los patos tienen el pico rojo, el 35 % de los patos que tienen el pico rojo son machos, mientras que sólo el 15 % de los machos tienen el pico rojo. 1) Elegido un pato al azar, calcular la probabilidad de que sea macho. 2) Si el pato elegido ha sido hembra, ¿cuál es la probabilidad de que tenga el pico rojo?*

***258.*** *Si una persona va un día a su dentista, supongamos que la probabilidad de que sólo le limpie la dentadura es de 0,44, la probabilidad de que sólo le tape una caries es de 0,24 y la probabilidad de que le limpie la dentadura y le tape una caries es de 0,08, calcular la probabilidad de que un día de los que va a su dentista, éste: 1) le limpie la dentadura o bien le tape una caries, 2) ni le limpie la dentadura ni le tape una caries.*

***259.*** *El 42 % de la población activa de cierto país, está formada por mujeres. Se sabe que el 24 % de las mujeres y el 16 % de los hombres están en paro.*

1. *Elegida una persona al azar de la población activa de ese país, calcula la probabilidad de que esté en paro.*
2. *Si hemos elegido una persona con trabajo, ¿Cuál es la probabilidad de que sea hombre?*

***260.*** *En unas votaciones a consejo escolar de un cierto centro sabemos que la probabilidad de que vote una madre es del 0,28, la probabilidad de que vote un padre es del 0,21 y la probabilidad de que voten los dos es de 0,15.*

*a) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos uno de los dos vote?*
*b) ¿Cuál es la probabilidad de que no vote ninguno de los dos?*

***261.*** *Los viajantes de una empresa alquilan coches a tres agencias de alquiler: 60 % a la agencia A, 30 % a la agencia B y el resto a la agencia C. Si el 9 % de los coches de la agencia A necesitan* *una revisión, el 20 % de los coches de la agencia B necesitan una revisión y el 6 % de los coches de la agencia C necesitan una revisión.*

a) *¿Cuál es la probabilidad de que un coche alquilado por esa empresa necesite una revisión?*
b) *Si un coche alquilado ha necesitado una revisión ¿cuál es la probabilidad de que lo hayan alquilado a la agencia B?*

***262.*** *En el Instituto de un determinado barrio se sabe que 1/3 de los alumnos no vive en el barrio. También se sabe que 5/9 de los alumnos han nacido en la ciudad y que 3/4 de los alumnos no han nacido en la ciudad o viven en el barrio. Seleccionado al azar un alumno de ese Instituto, calcular la probabilidad de que: 1) viva en el barrio 2) no haya nacido en la ciudad, 3) no haya nacido en la ciudad y viva en el barrio.*

***263.*** *La terminación de un trabajo de construcción se puede retrasar a causa de una huelga. La probabilidad de que habrá huelga es de 0,6, la probabilidad de que se termine a tiempo es de 0,85 si no hay huelga y de 0,35 si hay huelga.*

a) *¿Cuál es la probabilidad de que el trabajo se termine a tiempo?*
b) *Si el trabajo se ha terminado a tiempo, ¿cuál es la probabilidad de que haya habido huelga?*

***264.*** *En una urna hay cuatro bolas blancas y dos rojas. Se lanza una moneda, si sale cara se extrae una bola de la urna y si sale cruz se extraen, sin reemplazamiento, dos bolas de la urna.*

*a) Calcula la probabilidad de que se hayan extraído dos bolas rojas.*
*b) Halla la probabilidad de que no se haya extraído ninguna bola roja.*

***265.*** *Tenemos dos urnas (urna Nº1 y urna Nº2) y una bolsa. La urna número 1 contiene 4 bolas blancas y 8 verdes y la urna número 2 contiene 6 bolas blancas y 3 verdes. La bolsa contiene 10 bolas numeradas del 1 al 10.*
*Extraemos una bola de la bolsa: si sale un número menor o igual que 4 elegimos la urna Nº1 y si sale un número mayor que 4 elegimos la urna Nº2. De la urna elegida extraemos una bola. Calcular la probabilidad de los siguientes sucesos:*

a) *La bola extraída es verde y de la urna Nº2.*
b) *La bola extraída es blanca.*

***266.*** *Un test para detectar si una persona es portadora del virus de la gripe aviar da positivo en el 96 % de los pacientes que la padecen y da negativo en el 94 % de los pacientes que no la padecen. Si una de cada ciento cuarenta y cinco personas es portadora del virus y una persona se somete al test, calcula:*

(a) *La probabilidad de que el test dé positivo.*
(b) *La probabilidad de que sea portadora, si el resultado del test es positivo.*
(c) *La probabilidad de que el test sea negativo y no sea portadora del virus.*

***267.*** *La probabilidad de que haya un incidente en una fábrica que dispone de alarma es 0.1. La probabilidad de que suene esta si se ha producido algún incidente es 0.97 y la probabilidad de que suene si no ha sucedido ningún incidente es 0.02.*

a) *Calcula la probabilidad de que no suene la alarma.*
b) *En el supuesto de que haya funcionado la alarma, ¿cuál es la probabilidad de que no haya habido ningún incidente?*

***268.*** *Se sabe que 3 000 de los 20 000 estudiantes matriculados en cierta universidad hacen uso del comedor universitario y acuden a sus clases en transporte público. A partir de la información proporcionada por una amplia muestra de estudiantes universitarios se ha estimado que uno de cada cuatro universitarios que utilizan el transporte público para acudir a sus clases hacen también uso del comedor universitario. Determinar, justificando la respuesta, la probabilidad de que seleccionado al azar un estudiante en esta universidad resulte ser de los que utilizan el transporte público para acudir a sus clases.*

***269.*** *En una ciudad en la que hay doble número de hombres que de mujeres, se declara una epidemia. Un 4 % de los habitantes que son hombres están enfermos, mientras que un 3 % son mujeres y están enfermas. Elegido un solo habitante de la ciudad, calcular:*

*a) La probabilidad de que sea hombre.*
*b) Si es hombre, la probabilidad de que esté enfermo.*
*c) La probabilidad de que sea mujer o esté sano.*

## Ejercicios de Selectividad


| | | |
|---|---|---|
| Junio de 2017, 5B, a) | Junio de 2017, 5A, a) | Septiembre de 2017, 5B, a) |
| Septiembre de 2017, 5A, a) | Junio de 2018, 5B, a) | Junio de 2018, 5A, a) |
| Julio de 2018, 5B, a) | Julio de 2018, 5A, a) | Junio de 2019, 5B, a) |
| Julio de 2019, 5A, a) | Julio de 2019, 5B, a) | Junio de 2019, 5A, a) |
| Julio de 2020, 8a) | Septiembre de 2020, 8a) | Junio de 2021, 8a) |
| Julio de 2021, 8a) | Junio de 2022, 7b) | Junio de 2022, 8a) |
| Julio de 2022, 8a) | Junio de 2023, 7b) | Junio de 2023, 4a) |
| Julio de 2023, 3a) | Julio de 2023, 7b) | Modelo 1 de 2024, 7b) |
| Modelo 1 de 2024, 5a) | Modelo 2 de 2024, 7b) | Modelo 2 de 2024, 4a) |
| Junio de 2024, 8a) | Junio de 2024, 6b) | Julio de 2024, 8a) |
| Julio de 2024, 6b) | | |

# Unidad 13:
# DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD

## 0.- INTRODUCCIÓN
Le podemos dar dos significados a la palabra estadística:
(1) Datos numéricos relativos a un conjunto de elementos o colección de datos numéricos.
(2) Ciencia que tiene por objeto dar métodos para el tratamiento de las masas de datos de observación y su aplicación.

A las dos acepciones anteriores podemos añadir una tercera debida a Barnett:

«La estadística es la ciencia que estudia cómo debe emplearse la información y cómo dar una guía de acción en situaciones que entrañan incertidumbre».

Etimológicamente el término «estadística» tiene su raíz en la palabra «estadista», y esta a su vez en el término latín «status». De aquí nace su primera vocación, la de constituirse como la exteriorización cuantitativa de las cosas del estado.

En este sentido, los antecedentes de la «Estadística» son tan remotos como lo puede ser la historia del hombre. Es fácilmente imaginable que las sociedades humanas más primitivas estuvieran interesadas en enumerar sus características más relevantes: familias, hombres aptos para la guerra, utensilios de caza, cabezas de ganado, etc. Las referencias históricas nos proporcionan las primeras evidencias de recuentos, situándolas en el censo del emperador Yao en la China del año 2238 a.C., y en documentos asirios, egipcios y griegos que preceden a los más cercanos del Imperio Romano, en el que la preocupación por la actividad censal de los individuos y bienes del estado tenía una clara finalidad tributaria y militar.

Posteriormente, el avance general del conocimiento cuantitativo de las cosas del estado en sus facetas de recogida de información, descripción y análisis de la misma, adquirió una base más científica a través de las mejoras introducidas por las dos escuelas estadísticas más importantes: la alemana y la inglesa.

Pero en realidad la gran transformación de la Estadística, que la ha convertido en una ciencia susceptible no solamente de discutir la realidad, sino de modelizarla utilizando los métodos del Análisis Matemático, surge precisamente de su vinculación a éste a través del Cálculo de Probabilidades.

El origen del Cálculo de Probabilidades se sitúa en el S. XVII, atribuyéndose a las aportaciones que Pascal realizó sobre algunos problemas clásicos de los juegos de azar. Pero en realidad, ya a partir del S. XV algunos matemáticos notables como Paccioli, Cardano, Kepler y Galileo, habían esbozado unas primeras formalizaciones de algunos esquemas aleatorios.

Esta nueva ciencia fue tomando cuerpo y vinculándose fuertemente a la Teoría de Funciones a lo largo de los siglos XVIII y XIX, y comienzos del XX merced a los logros de figuras tan notables como Bernouilli, Leibniz, Bayes, Laplace, Tchebicheff, Kolmogorof, Markov... El resultado de todo ello ha sido la construcción de un modelo de comportamiento de los llamados fenómenos estocásticos en el que puede encuadrarse toda experiencia o evidencia empírica que revista carácter de aleatoriedad.

La fusión de estas dos vertientes de mejora del conocimiento: la Estadística como recogida, descripción y análisis de la información, y el Cálculo de Probabilidades, se ha plasmado en una nueva rama floreciente de esta disciplina: la Estadística Matemática, surgida en las primeras décadas del siglo XX y cuyo fruto, producto de aportaciones de matemáticos como Yule, Fisher, Neyman, Pearson,..., ha sido la disponibilidad de eficaces instrumentos que permiten poner en relación los datos recogidos con algún modelo ideal de probabilidad, y ayudan a descubrir en la evidencia empírica algún tipo de regularidad estocástica (aleatoria).

Resumiendo, históricamente, la Estadística ha comenzado por ser descriptiva. Ha sido necesario ante todo acumular información, criticarla, ponerla en condiciones, analizarla y sintetizarla. Posteriormente, después de haberse comprobado analogías, descubierto permanencias estadísticas, reconocido un cierto número de distribuciones tipo, observado algunas formas de dependencia estructurales bastante grandes, la Estadística llegó a ser explicativa, gracias en particular al Cálculo de Probabilidades.

La Estadística, por tanto, se configura como la tecnología del método científico que proporciona instrumentos para la toma de decisiones, cuando éstas se adoptan en ambiente de incertidumbre, siempre que ésta incertidumbre pueda ser medida en términos de probabilidad. Por ello la Estadística se preocupa por los métodos de recogida y descripción de datos, así como de generar técnicas para el análisis de esta información.

A raíz de todo lo expuesto, podemos dividir el estudio de esta disciplina en:

(1) Estadística Descriptiva
(2) Cálculo de Probabilidades
(3) Estadística Teórica o Inferencia Estadística

# 1. VARIABLES ALEATORIAS

Frecuentemente, al realizar un experimento aleatorio nos interesa más que el resultado completo del experimento una función real de los resultados. Por ejemplo, si el experimento aleatorio consiste en lanzar tres veces una moneda, podemos estar interesados en determinar el número de caras obtenidas y para ello definimos una función $X$ que asigna un valor numérico (número de caras) a cada resultado del experimento. De esta manera, si denotamos por $C$ al suceso «salir cara» y por $F$ al suceso «salir cruz», tenemos por ejemplo que $X$(FCF) = 2 o que $X$(FFF) = 0. Tales funciones, cuyos valores dependen de los resultados de un experimento aleatorio, se llaman variables aleatorias.

Las variables aleatorias y sus distribuciones de probabilidad, pueden considerarse una generalización del concepto frecuentista de probabilidad. Se introducen como el modelo matemático ideal al que se aproximan las distribuciones de frecuencias que se obtendrían en una repetición indefinida de pruebas de este experimento.

Por ello, nos recuerdan a las variables estadísticas y a sus distribuciones de frecuencia estudiadas en Estadística Descriptiva.

Llamaremos _variable aleatoria_ a toda función que asocia a cada elemento del espacio muestral $\Omega$ un número real.

$$X:\Omega\to\mathbb{R}$$
$$\omega \longrightarrow X(\omega)\in\mathbb{R}$$

Las variables aleatorias **se clasifican** en discretas y continuas, dependiendo de si dicha variable toma valores aislados (variable discreta) o los toma en un intervalo (variable continua).

## Ejemplos:

*1) Se tira una moneda tres veces y se observa la sucesión de caras y cruces. El espacio muestral se compone de los 8 siguientes elementos:*

$$\Omega=\{ccc, ccx, cxc, xcc, xcx, xxc, cxx, xxx\}$$

*Sea X el número de caras que van saliendo. Se tiene que X es una variable aleatoria que toma los siguientes valores:*

*X(ccc) = 3*
*X(ccx) = X(cxc) = X(xcc) = 2*
*X(cxc) = X(xxc) = X(cxx) = 1*
*X(xxx) = 0*

*X es por tanto una variable aleatoria discreta que toma los valores 0, 1, 2 y 3.*

$$X:\Omega\to\{0,1,2,3\}$$

*2) Se escoge un punto al azar en un círculo de radio r. Sea X la distancia del punto al centro del círculo.*
*Entonces, X es una variable aleatoria continua y su espacio de valores es el intervalo cerrado cuyos extremos son 0 y r, es decir:*

$$X:\Omega\to[0,r] \qquad \square$$

Asociada a una variable aleatoria *X* tenemos una función

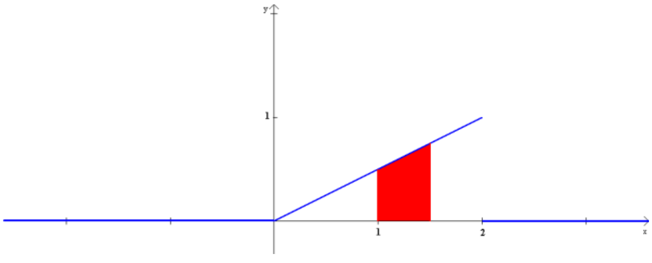
$$F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$
$$F(x)=P(X\le x)$$

que llamaremos **función de distribución** de la variable aleatoria $X$.

## Ejemplo:

*Sea X una variable aleatoria continua con la siguiente función de distribución F:*

$$F(x)=\begin{cases}0,5x & \text{si } 0\le x\le 2\\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases}$$



$P(1\le X\le 1,5)$ *=Área de la región sombreada del dibujo* $=\dfrac{5}{16}$

# 2. DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD

Las distribuciones de probabilidad son modelizaciones de las correspondientes distribuciones estadísticas de frecuencias.

Se clasifican en discretas y continuas, dependiendo de que la correspondiente distribución estadística sea discreta o continua.

**2.1. Distribuciones de probabilidad discretas**

Se llama **distribución de probabilidad** de una variable aleatoria discreta *X* a la tabla

| $x_i$ | $x_1$ | $x_2$ | $\cdots$ | $x_{n-1}$ | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $p_i = P(X = x_i)$ | $p_1$ | $p_2$ | $\cdots$ | $p_{n-1}$ | $p_n$ |

La aplicación que asocia a cada valor de la variable su correspondiente probabilidad se denomina *función masa de probabilidad*:

$$x_i \longrightarrow P(X = x_i)$$

que está **caracterizada** por las siguientes dos propiedades:

a) $p_i \geq 0 \quad \forall i$

b) $\sum p_i = 1$

## *Ejercicio:*

**270.** En una caja hay chinchetas, unas están bien fabricadas y otras tienen algún defecto, con igual probabilidad. Elegimos dos chinchetas, y consideramos la variable aleatoria "número de chinchetas defectuosas". Se pide:

a) El espacio muestral y determinar si la variable aleatoria es discreta.
b) Construir la distribución de probabilidad y comprobar que se cumplen las dos propiedades que la caracterizan.

Los **parámetros** asociados a una distribución de probabilidad son:

**Esperanza matemática o media**: $\boxed{EX = \sum x_i \cdot p_i}$ (también se representa por $\mu$)

**Varianza**: $\boxed{Var(X) = \sum (x_i - \mu)^2 \cdot p_i}$ (también se representa por $\sigma^2$)

**Desviación típica**: $\boxed{\sigma = \sqrt{Var(X)}}$

## *Ejercicios:*

***271.*** *Calcular los parámetros de la distribución del ejercicio anterior.*

***272.*** *Lanzamos tres monedas al aire, y consideramos la variable aleatoria "número de caras obtenidas". Se pide:*

*a) El espacio muestral y la variable aleatoria.*
*b) Construir la distribución de probabilidad.*
*c) Calcular la esperanza matemáticas, la varianza y la desviación típica.*

**2.2. <u>Distribuciones de probabilidad continuas</u>**
Una variable aleatoria es continua cuando puede tomar un número infinito de valores de la recta real.

La distribución de probabilidad asociada a una variable aleatoria continua se llama *<u>distribución de probabilidad continua</u>*.

En dichas distribuciones de probabilidad, la probabilidad de un valor concreto es cero, y este caso lo que se hace es que **se calculan probabilidades asociadas a intervalos**: $P\left(a \le X \le b\right)$

Se define la **función de densidad o curva de probabilidad** $f\left(x\right)$, cuya grafica nos dice cuáles son las zonas donde están los valores más probables, es decir, las zonas más densas en probabilidad.

**Propiedades que caracterizan a la función de densidad:**

(1) Su gráfica junto con el eje de abscisas encierra un área igual a 1:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x\right)dx = 1$$

(2) $f\left(x\right) > 0 \quad \forall x \in \mathrm{Dom}\left(f\right)$

**<u>Relación</u>** entre $f$ y $F$ :

► Conocida $f$ :

$$\boxed{F\left(x\right) = \int_{-\infty}^{x} f\left(t\right)dt}$$

► Conocida $F$ :

$$\boxed{F'\left(x\right) = f\left(x\right)}$$

***<u>Ejemplo:</u>***

*Vamos a calcular la función de densidad de la variable aleatoria del ejemplo 2. Para ello, derivamos la función de distribución:*

$$F'\left(x\right) = \begin{cases} 0,5 & \text{si } 0 \le x \le 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} = f\left(x\right)$$

*En este caso, es inmediato comprobar que se cumplen las propiedades (1) y (2):*

$f\left(x\right) = 0,5 \ge 0 \quad \forall x \in \left[0,2\right]$

$A =$ *área de un rectángulo* $= 2 \cdot 0,5 = 1$

# <u>3. LA DISTRIBUCIÓN BINOMIAL</u>

La distribución binomial es una de las distribuciones discretas más útiles, ya que su área de aplicación incluye:

- inspección de calidad
- control de defectos
- calidad del servicio de telefonía
- ventas (marketing)
- mercadotecnia
- medicina
- investigación de opiniones…

Supongamos un experimento del que sólo nos interesa la ocurrencia o no ocurrencia de un evento concreto. Sin pérdida de generalidad llamaremos éxito a la ocurrencia de dicho evento y fracaso a la no ocurrencia. La probabilidad de éxito es $p$ y la de fracaso $1-p=q$.

Supongamos además que el experimento se realiza $n$ veces y cada una de las realizaciones es independiente de las demás.

Sea $X$ la variable aleatoria que representa el «número de éxitos» obtenidos en las $n$ realizaciones del experimento.

Las dos suposiciones clave para la distribución binomial son las siguientes:

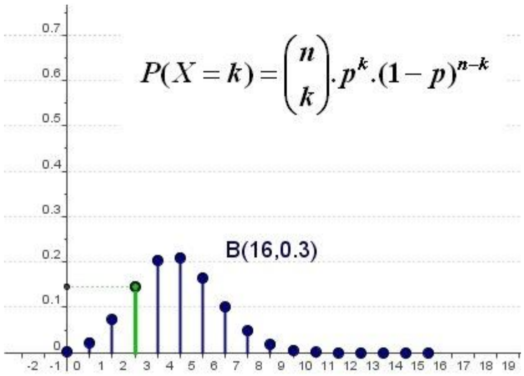
- la probabilidad de éxito $p$ permanece constante para cada ensayo
- las $n$ realizaciones son independientes entre sí.

En las condiciones anteriores se dice que X sigue una ***distribución binomial*** de parámetros $n$ y $p$, $\boxed{X \longrightarrow \mathfrak{B}(n,p)}$, si su función masa de probabilidad es:

$$\boxed{P(X=k)=\binom{n}{k}p^k q^{n-k} \quad \text{para } k=0,1,\ldots,n}$$

donde: $\binom{n}{k}=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ se denomina número combinatorio y se lee «$n$ sobre $k$».

$\left.\begin{array}{l} n!=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1 \\ 0!=1 \end{array}\right\}$ se denomina factorial de $n$ (donde $n\in\mathbb{N}$) y se lee «$n$ factorial»




**GeoGebra y Wolfram|Alpha**

**Distribución de probabilidad binomial**

Autor: Zulma Elizabeth Zamudio

Tema: Probabilidad

https://www.geogebra.org/m/mymugmwr

**Wolfram|Alpha Widgets**

Distribución binomial

https://www.wolframalpha.com/widgets/view.jsp?id=8b2a1f178ccc4342e354ef7a11801228

***Ejemplo:***

La probabilidad de que cierta semilla germine en unas determinadas condiciones es 0,4. Si en dichas condiciones se siembran 30 semillas, y se considera la variable aleatoria *X*, que expresa el número de semillas que germinan, se observa que *X* sigue una distribución binomial $\mathfrak{B}(30\ ,\ 0{,}4)$. Hallar la probabilidad de que germinen 5 semillas.

$$P(X=5)=\binom{30}{5}0{,}4^5\cdot 0{,}6^{30-5}=0{,}00414$$

¿Y la probabilidad de que germinen como mucho 5 semillas?

$$P(X\leq 5)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)=0{,}0056588$$

(en este caso, los cálculos hay que hacerlos con ordenador, o mediante una aproximación de la binomial que no vamos a ver).

***Ejemplo:***

Un examen tipo consta de diez preguntas, cada una de ellas con tres respuestas, de forma que sólo una es correcta. Un estudiante que no ha preparado la materia decide contestar al azar a todas ellas.

a) ¿Cuál es la probabilidad de acertar seis preguntas?
b) ¿Y la probabilidad de no acertar ninguna?

Sea *X* = número de respuestas acertadas. Se tiene que $X \longrightarrow \mathfrak{B}\left(10, \frac{1}{3}\right)$.

a) $P(X=6)=\binom{10}{6}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^6\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^4=0{,}0569$

b) $P(X=0)=\binom{10}{0}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^0\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{10}=0{,}0173$

***Ejercicios:***

***273.*** *Un arquero tiene una probabilidad de hacer blanco de 0,7. Si realiza cuatro disparos, calcula:*

*a) La probabilidad de hacer dos blancos.*
*b) La probabilidad de hacer dos o más blancos.*

***274.*** *La probabilidad de nacimientos de niños varones en España es de 51,7 %. Halla la probabilidad de que una familia de 5 hijos tenga:*

*a) Por lo menos una niña.*
*b) Por lo menos un niño.*

***275.*** *La probabilidad de que un estudiante obtenga el título de arquitecto es de 0,3. Calcula la probabilidad de que de un grupo de siete estudiantes matriculados en primer curso:*

*a) Los siete finalicen la carrera.*
*b) Al menos dos acaben la carrera.*

Los **parámetros** (media, varianza y desviación típica) de una distribución binomial son:

**Esperanza matemática** (media): $\boxed{EX = np}$

**Varianza**: $\boxed{\sigma^2 = npq}$

**Desviación típica**: $\boxed{\sigma = \sqrt{npq}}$

***Ejemplo:***

La probabilidad de que un libro salga defectuoso en una determinada imprenta es del 3 %. Calcular:

a) El número de libros defectuosos esperados en un lote de 10 000.
b) La varianza y la desviación típica de esta distribución.

Sea $X$ = el libro es defectuoso. Se tiene que $\mathfrak{B}(10\ 000\ ,\ 0{,}03)$.

a) El número de libros defectuosos esperados es igual a la media de la distribución:

$$EX = np = 10000 \cdot 0{,}03 = 300$$

es decir, se espera que haya 300 defectuosos en el lote.

b) Varianza:

$$Var(X) = npq = 10000 \cdot 0{,}03 \cdot 0{,}97 = 291$$

c) Desviación típica:

$$\sigma = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{npq} = \sqrt{291} = 17{,}05$$

***Ejercicio:***

***276.*** *Calcular la esperanza matemática, la varianza y la desviación típica de los ejercicios anteriores.*

***Ejercicios de Selectividad***

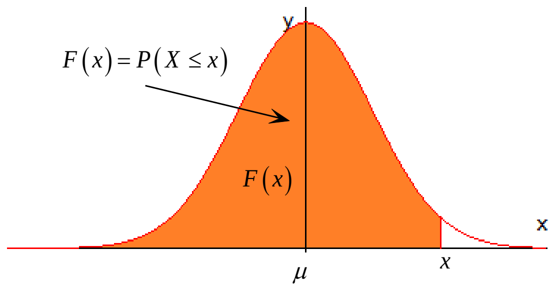
| | | |
|---|---|---|
| Junio de 2017, 5A, b) | Septiembre de 2017, 5A, b) | Junio de 2018, 5A, b) |
| Junio de 2019, 5A, b) | Julio de 2019, 5A, b) | Julio de 2020, 8, b) |
| Junio de 2021, 8b) | Julio de 2021, 8b) | Julio de 2022, 7b) |
| Julio de 2023, 3b) | | |

# 4. LA DISTRIBUCIÓN NORMAL

Una **distribución** correspondiente a una variable continua se dice **normal** si su función de densidad es:

$$\boxed{\begin{array}{l} f:\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \end{array}}$$

y se representa por $\boxed{X \longrightarrow N(\mu, \sigma)}$, con $\mu \in \mathbb{R}$ y $\sigma > 0$, donde $\mu$ representa la media (esperanza matemática) y $\sigma$ la desviación típica.




Se llama normal porque es muy frecuente, apareciendo en circunstancias muy inesperadas (antes se creía que todas eran así). Otras veces aparece una distribución muy parecida a la normal, que puede tratarse como si lo fuera.

En el caso $\mu=0$ y $\sigma=1$ se denomina **distribución normal tipificada** y su función de distribución correspondiente está tabulada, por lo que *siempre hay que pasar a una* $N(0,1)$:

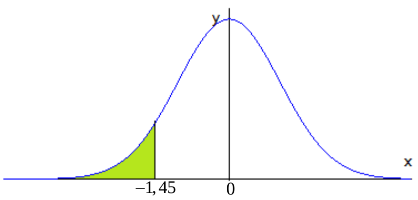
$$\boxed{X \to N(\mu,\sigma) \longrightarrow Z=\frac{X-\mu}{\sigma} \to N(0,1)}$$

# 5. USO DE TABLAS

(1) $P(Z\le 1,45)=0,9265$

Para calcular esta probabilidad, basta con mirar en la tabla: $P(Z\le 1,45)=0,9265$

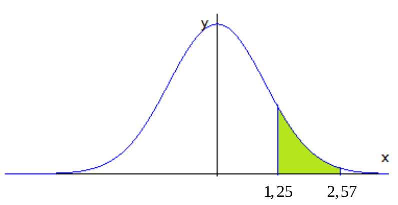
(2) $P(Z\le -1,45)$




Para calcular esta probabilidad hay que tener en cuenta la simetría de la distribución normal y aplicar la propiedad que relaciona la probabilidad de un suceso con su contrario ( $P(\overline{A})=1-P(A)$ ):

$$P(Z\le -1,45)=P(Z\ge 1,45)=1-P(Z\le 1,45)=$$
$$=1-0,9265=0,0735$$

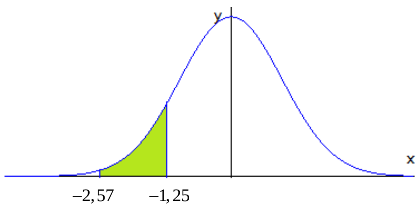
(3) $P(1,25\le Z\le 2,57)$




Interpretando esta probabilidad como áreas se tiene la siguiente igualdad:

$$P(1,25\le Z\le 2,57)=$$
$$=P(Z\le 2,57)-P(Z\le 1,25)=$$
$$=0,9949-0,8944=0,1005$$

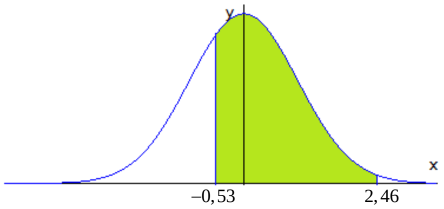
(4) $P(1,25\le Z\le 2,57)$




Para calcular esta probabilidad tenemos en cuenta la simetría de la distribución:

$$P(-1,25\le Z\le -2,57)=P(1,25\le Z\le 2,57)$$
$$=P(Z\le 2,57)-P(Z\le 1,25)=$$
$$=0,9949-0,8944=0,1005$$

(5) $P(-0,53 \le Z \le 2,46)$




Aplicaremos lo visto en los apartados anteriores:

$$P(-0,53 \le Z \le 2,46) =$$
$$= P(Z \le 2,46) - P(Z \le -0,53) =$$
$$= P(Z \le 2,46) - [1 - P(Z \le 0,53)] = 0,695$$

## ***Ejercicios:***

***277.*** *Halla las siguientes probabilidades:*

*a)* $P(Z \le 0,84)$ *c)* $P(Z < 2)$

*b)* $P(Z < 1,5)$ *d)* $P(Z < 1,87)$

***278.*** *Halla:*

*a)* $P(Z > 1,3)$ *d)* $P(1,3 < Z < 1,96)$

*b)* $P(Z < -1,3)$ *e)* $P(-1,96 < Z < -1,3)$

*c)* $P(Z > -1,3)$ *f)* $P(-1,96 < Z < 1,96)$

***279.*** *En una distribución normal N(110, 10), calcula:*

*a)* $P(X > 110)$

*b)* $P(110 < X < 120)$

*c)* $P(X < 130)$

***280.*** *Calcula el valor de k en cada caso:*

*a)* $P(Z \le k) = 0,719$ *b)* $P(Z < k) = 0,8997$ *c)* $P(Z < k) = 0,5040$

**GeoGebra y Wolfram|Alpha**

**Distribución de probabilidad normal**
Autor: Zulma Elizabeth Zamudio
Tema: Probabilidad
https://www.geogebra.org/m/mymugmwr

**Wolfram|Alpha Widgets**
Cálculo de probabilidades: distribución normal
https://www.wolframalpha.com/widgets/view.jsp?id=36e1bfaccafd20fc4b1619f84d2f9eac

## ***Problemas:***

**281.** *En un centro hay 500 alumnos cuyas estaturas se distribuyen según la curva normal, de media 170 cm y desviación típica 8 cm.*

*a) ¿Cuántos alumnos tienen su estatura comprendida entre 162 y 178 cm?*

*b) ¿Cuántos medirán más de 186 cm?*

**282.** *Una máquina realiza piezas de precisión con un diámetro medio de 8 mm y una desviación de 0,5 mm. Suponiendo que la distribución es normal, calcula la probabilidad de que una pieza tomada al azar tenga un diámetro:*

*a) Mayor que 8,5 mm.*

*b) Menor que 7,5 mm.*

*c) Comprendido entre 7 y 9 mm.*

**283.** *Para aprobar un examen de ingreso en una escuela, se necesita obtener 50 puntos o más. Por experiencia de años anteriores, sabemos que la distribución de puntos obtenidos por los alumnos es normal, con media 55 puntos y desviación típica 10.*

*a) ¿Qué probabilidad hay de que un alumno apruebe?*

*b) Si se presentan al examen 400 alumnos, ¿cuántos cabe esperar que ingresen en esa escuela?*

**284.** *En una ciudad, las temperaturas máximas diarias durante el mes de julio se distribuyen normalmente con una media de 26 °C y una desviación típica de* $4\,^{\circ}\mathrm{C}$. *¿Cuántos días se puede esperar que tengan una temperatura máxima comprendida entre 22 °C y 28 °C?*

## ***Ejercicio resuelto:***

En un examen de matemáticas, las puntuaciones tipificadas de dos estudiantes fueron 0,6 y $-0,8$ y sus notas reales 94 y 73, respectivamente. Calcula:

a) La media y la desviación típica de las puntuaciones del examen que siguen una distribución normal.

b) ¿Entre que puntuaciones alrededor de la media está la nota del 60 % de los estudiantes?

a) Se tiene que:

$$\left.\begin{array}{l} 0,6=\dfrac{94-\mu}{\sigma} \\ -0,8=\dfrac{73-\mu}{\sigma} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} 0,6\sigma+\mu=96 \\ -0,8\sigma+\mu=73 \end{cases} \Rightarrow (\mu,\sigma)=(85,15)$$

b) Queremos que $P(-a<Z<a)=0,6$:

$$P(-a<Z<a)=P(Z<a)-P(Z<-a)=P(Z<a)-\left[1-P(Z<a)\right]=2P(Z<a)-1=0,6\Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(Z<a)=0,8\Rightarrow(\text{mirando en la tabla})\,a=0,84$$

Así, como $a=\dfrac{x-\mu}{\sigma}$, se tiene que:

$$\begin{cases} a=0,84\Rightarrow 0,84=\dfrac{x_1-85}{15}\Rightarrow x_1=97,6 \\ a=-0,84\Rightarrow -0,84=\dfrac{x_1-85}{15}\Rightarrow x_2=72,4 \end{cases}$$

Como consecuencia, las notas de matemáticas estarán alrededor de la media, estarán entre 72,4 y 97,6 puntos.

# 6. PERCENTILES EN UNA DISTRIBUCIÓN NORMAL

Un percentil es una medida que indica el valor por debajo del cual está un cierto porcentaje de los datos en una distribución. Por ejemplo:

- El percentil 50 ($P_{50}$) es el valor que deja el 50 % de los datos por debajo (y coincide con la mediana).
- El percentil 90 ($P_{90}$) es el valor por debajo del cual está el 90 % de los datos.

En una distribución normal, los percentiles están relacionados directamente con la media ($\mu$) y la desviación típica ($\sigma$).

¿Qué relación entre percentiles y la distribución normal estándar ($Z$)?
La distribución normal estándar tiene:

- Media ($\mu$) = 0
- Desviación típica ($\sigma$) = 1

Para calcular percentiles en una distribución normal cualquiera, primero tipificamos usando el valor $Z$ ($Z-$score):

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$$

Veamos varios ejemplos de cálculo de percentiles en la distribución normal

***Ejemplo 1:*** Encontrar el percentil dado un valor
Supongamos una distribución normal con:

- Media ($\mu$) = 100
- Desviación estándar ($\sigma$) = 15

¿Cuál es el percentil correspondiente a $X = 115$?

Calculamos el Z-score:

$$Z = \frac{115-100}{15} = 1$$

***Ejemplo 2:*** Encontrar el valor dado un percentil
¿Qué valor corresponde al percentil 95 en la misma distribución ($\mu = 100$, $\sigma = 15$)?

1. Buscamos en la tabla $Z$ el $Z-$score que deja un 95 % a la izquierda.
   - El $Z-$score para es aproximadamente 1,645.
2. Convertimos el $Z-$score a $X$:

$$X = \mu + Z\sigma = 100 + 1{,}645 \cdot 15 = 124{,}675$$

Por tanto, el percentil 95 es 124,675.

Algunos percentiles importantes en la distribución normal estándar ($\mu = 0$, $\sigma = 1$) son:

- $P_{50}$ (Mediana) = 0 (50% de los datos están por debajo de 0).
- $P_{84} \simeq 1$ (el 84 % de los datos están por debajo de 1, porque el 68 % está entre $-1$ y 1 en una normal).
- $P_{97,5} \simeq 1{,}96$ (el 97,5 % de los datos están por debajo de 1,96).

En una distribución general (μ, σ), estos percentiles se tipifican.

***Ejercicios de Selectividad***

Junio de 2017, 5B, b) | Septiembre de 2017, 5B, b) | Junio de 2018, 5B, b)
Julio de 2018, 5B, b) | Junio de 2019, 5B, b) | Julio de 2019, 5B, b)
Septiembre de 2020, 8b) | Julio de 2022, 8b) | Junio de 2022, 8b)
Junio de 2023, 4b) | Junio de 2024, 8b)

# 7*. APROXIMACIÓN DE LA BINOMIAL POR LA NORMAL

La variable aleatoria $X \longrightarrow \mathfrak{B}(n,p)$ la aproximaremos por una normal, cuando

$$\boxed{\begin{array}{c} np>5 \text{ y } p>0,05 \\ X \longrightarrow \mathfrak{B}(n,p) \simeq N\left(np, \sqrt{npq}\right) \longleftarrow X' \end{array}}$$

Ahora bien, como estamos aproximando una distribución discreta por una continua, hay que hacer un ajuste que se denomina ***corrección de Yates***:

$$P(X=k)=P(k-0,5 \le X' \le k+0,5)$$
$$P(X \le k)=P(X' \le k+0,5)$$
$$P(X < k)=P(X' < k-0,5)$$
$$P(X \ge k)=P(X' \ge k-0,5)$$
$$P(X > k)=P(X' > k+0,5)$$

***Ejemplo:***

El 2 % de los tornillos fabricados por una máquina son defectuosos. Si se estudia un lote de 2000 tornillos, ¿cuál es la probabilidad de que haya menos de 50 tornillos defectuosos?

Si $X$ = número de tornillos defectuosos, se tiene que $X \longrightarrow \mathfrak{B}(200\ ,\ 0,02)$ y por tanto aproximamos $X$ por $X' \longrightarrow N\left(2000\cdot 0,02\ ,\ \sqrt{2000\cdot 0,02\cdot 0,98}\right)=N(40\ ,\ 6,26)$.

Así,

$$P(X<50)=P(X'<50-0,5)=P(X'<49,5)=P\left(Z<\frac{49,5-40}{6,26}\right)=P(Z<1,52)=0,9357$$

Es decir, la probabilidad de que en el lote hay menos de 50 tornillos defectuosos es del 93,57 %.

# 8. GEOGEBRA

**(1) Matemáticas II, 2º bachillerato. Tema 14: Probabilidad**
Autor: José M. Melián
Tema: Matemática

https://www.geogebra.org/m/hk8zhfnx#chapter/357934

**(2) Matemáticas II, 2º bachillerato. Tema 15: Estadística**

Autor: José M. Melián
Tema: Matemática
https://www.geogebra.org/m/hk8zhfnx#chapter/357938

**(3) Estadística y Probabilidad. Actividades para el aula.**
Autor: Rafael Pérez Laserna
Tema: Probabilidad, Estadística
https://www.geogebra.org/m/nuqcczxm#chapter/328118

**(4) Relación entre la Distribución Binomial y la Normal.**
Autor: Rafael Pérez Laserna
Tema: Distribución binomial
https://www.geogebra.org/m/nuqcczxm#material/gzqy9pqe

# ESQUEMA

Variable aleatoria
$X:\Omega \to \mathbb{R}$

Función de distribución de $X$
$F:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$F(x) = P(X \le x)$

Distribución de probabilidad discreta
(función masa de probabilidad)

| $x_i$ | $x_1$ | $x_2$ | ... | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|
| $p_i = P(X = x_i)$ | $p_1$ | $p_2$ | ... | $p_n$ |

Tiene asociada

Función masa de probabilidad
$x_i \longrightarrow P(X = x_i)$

Caracterizada por

a) $p_i \ge 0 \quad \forall i$
b) $\sum p_i = 1$

Distribución de probabilidad continua
(función de distribución)
$F(x) = P(X \le x)$

Tiene asociada

Función de densidad
$P(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)dx$

Caracterizada por

Su gráfica nos dice dónde están los valores más probables.
$f(x) > 0 \quad \forall x \in Dom(f)$

Parámetros
Esperanza matemática o media: $EX \equiv \mu$
Varianza: $Var(X) \equiv \sigma^2$
Desviación típica: $\sigma = \sqrt{Var(X)}$

# TABLA DE LA DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

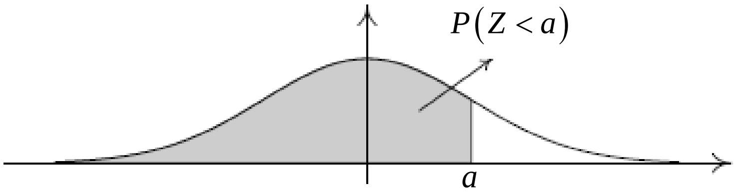
Probabilidad de obtener $k$ éxitos

$X \to \mathrm{B}(n, p)$

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

| n | k \ p | 0,01 | 0,05 | 0,10 | 0,15 | 0,20 | 0,25 | 0,30 | 0,33 | 0,35 | 0,40 | 0,45 | 0,49 | 0,50 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 0 | 0,9801 | 0,9025 | 0,8100 | 0,7225 | 0,6400 | 0,5625 | 0,4900 | 0,4444 | 0,4225 | 0,3600 | 0,3025 | 0,2601 | 0,2500 |
| | 1 | 0,0198 | 0,0950 | 0,1800 | 0,2550 | 0,3200 | 0,3750 | 0,4200 | 0,4444 | 0,4550 | 0,4800 | 0,4950 | 0,4998 | 0,5000 |
| | 2 | 0,0001 | 0,0025 | 0,0100 | 0,0225 | 0,0400 | 0,0625 | 0,0900 | 0,1111 | 0,1225 | 0,1600 | 0,2025 | 0,2401 | 0,2500 |
| 3 | 0 | 0,9703 | 0,8574 | 0,7290 | 0,6141 | 0,5120 | 0,4219 | 0,3430 | 0,2963 | 0,2746 | 0,2160 | 0,1664 | 0,1327 | 0,1250 |
| | 1 | 0,0294 | 0,1354 | 0,2430 | 0,3251 | 0,3840 | 0,4219 | 0,4410 | 0,4444 | 0,4436 | 0,4320 | 0,4084 | 0,3823 | 0,3750 |
| | 2 | 0,0003 | 0,0071 | 0,0270 | 0,0574 | 0,0960 | 0,1406 | 0,1890 | 0,2222 | 0,2389 | 0,2880 | 0,3341 | 0,3674 | 0,3750 |
| | 3 | 0,0000 | 0,0001 | 0,0010 | 0,0034 | 0,0080 | 0,0156 | 0,0270 | 0,0370 | 0,0429 | 0,0640 | 0,0911 | 0,1176 | 0,1250 |
| 4 | 0 | 0,9606 | 0,8145 | 0,6561 | 0,5220 | 0,4096 | 0,3164 | 0,2401 | 0,1975 | 0,1785 | 0,1296 | 0,0915 | 0,0677 | 0,0625 |
| | 1 | 0,0388 | 0,1715 | 0,2916 | 0,3685 | 0,4096 | 0,4219 | 0,4116 | 0,3951 | 0,3845 | 0,3456 | 0,2995 | 0,2600 | 0,2500 |
| | 2 | 0,0006 | 0,0135 | 0,0486 | 0,0975 | 0,1536 | 0,2109 | 0,2646 | 0,2963 | 0,3105 | 0,3456 | 0,3675 | 0,3747 | 0,3750 |
| | 3 | 0,0000 | 0,0005 | 0,0036 | 0,0115 | 0,0256 | 0,0469 | 0,0756 | 0,0988 | 0,1115 | 0,1536 | 0,2005 | 0,2400 | 0,2500 |
| | 4 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0001 | 0,0005 | 0,0016 | 0,0039 | 0,0081 | 0,0123 | 0,0150 | 0,0256 | 0,0410 | 0,0576 | 0,0625 |
| 5 | 0 | 0,9510 | 0,7738 | 0,5905 | 0,4437 | 0,3277 | 0,2373 | 0,1681 | 0,1317 | 0,1160 | 0,0778 | 0,0503 | 0,0345 | 0,0313 |
| | 1 | 0,0480 | 0,2036 | 0,3281 | 0,3915 | 0,4096 | 0,3955 | 0,3602 | 0,3292 | 0,3124 | 0,2592 | 0,2059 | 0,1657 | 0,1563 |
| | 2 | 0,0010 | 0,0214 | 0,0729 | 0,1382 | 0,2048 | 0,2637 | 0,3087 | 0,3292 | 0,3364 | 0,3456 | 0,3369 | 0,3185 | 0,3125 |
| | 3 | 0,0000 | 0,0011 | 0,0081 | 0,0244 | 0,0512 | 0,0879 | 0,1323 | 0,1646 | 0,1811 | 0,2304 | 0,2757 | 0,3060 | 0,3125 |
| | 4 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0005 | 0,0022 | 0,0064 | 0,0146 | 0,0284 | 0,0412 | 0,0488 | 0,0768 | 0,1128 | 0,1470 | 0,1563 |
| | 5 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0001 | 0,0003 | 0,0010 | 0,0024 | 0,0041 | 0,0053 | 0,0102 | 0,0185 | 0,0282 | 0,0313 |
| 6 | 0 | 0,9415 | 0,7351 | 0,5314 | 0,3771 | 0,2621 | 0,1780 | 0,1176 | 0,0878 | 0,0754 | 0,0467 | 0,0277 | 0,0176 | 0,0156 |
| | 1 | 0,0571 | 0,2321 | 0,3543 | 0,3993 | 0,3932 | 0,3560 | 0,3025 | 0,2634 | 0,2437 | 0,1866 | 0,1359 | 0,1014 | 0,0938 |
| | 2 | 0,0014 | 0,0305 | 0,0984 | 0,1762 | 0,2458 | 0,2966 | 0,3241 | 0,3292 | 0,3280 | 0,3110 | 0,2780 | 0,2436 | 0,2344 |
| | 3 | 0,0000 | 0,0021 | 0,0146 | 0,0415 | 0,0819 | 0,1318 | 0,1852 | 0,2195 | 0,2355 | 0,2765 | 0,3032 | 0,3121 | 0,3125 |
| | 4 | 0,0000 | 0,0001 | 0,0012 | 0,0055 | 0,0154 | 0,0330 | 0,0595 | 0,0823 | 0,0951 | 0,1382 | 0,1861 | 0,2249 | 0,2344 |
| | 5 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0001 | 0,0004 | 0,0015 | 0,0044 | 0,0102 | 0,0165 | 0,0205 | 0,0369 | 0,0609 | 0,0864 | 0,0938 |
| | 6 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0001 | 0,0002 | 0,0007 | 0,0014 | 0,0018 | 0,0041 | 0,0083 | 0,0138 | 0,0156 |
| 7 | 0 | 0,9321 | 0,6983 | 0,4783 | 0,3206 | 0,2097 | 0,1335 | 0,0824 | 0,0585 | 0,0490 | 0,0280 | 0,0152 | 0,0090 | 0,0078 |
| | 1 | 0,0659 | 0,2573 | 0,3720 | 0,3960 | 0,3670 | 0,3115 | 0,2471 | 0,2048 | 0,1848 | 0,1306 | 0,0872 | 0,0604 | 0,0547 |
| | 2 | 0,0020 | 0,0406 | 0,1240 | 0,2097 | 0,2753 | 0,3115 | 0,3177 | 0,3073 | 0,2985 | 0,2613 | 0,2140 | 0,1740 | 0,1641 |
| | 3 | 0,0000 | 0,0036 | 0,0230 | 0,0617 | 0,1147 | 0,1730 | 0,2269 | 0,2561 | 0,2679 | 0,2903 | 0,2918 | 0,2786 | 0,2734 |
| | 4 | 0,0000 | 0,0002 | 0,0026 | 0,0109 | 0,0287 | 0,0577 | 0,0972 | 0,1280 | 0,1442 | 0,1935 | 0,2388 | 0,2676 | 0,2734 |
| | 5 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0002 | 0,0012 | 0,0043 | 0,0115 | 0,0250 | 0,0384 | 0,0466 | 0,0774 | 0,1172 | 0,1543 | 0,1641 |
| | 6 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0001 | 0,0004 | 0,0013 | 0,0036 | 0,0064 | 0,0084 | 0,0172 | 0,0320 | 0,0494 | 0,0547 |
| | 7 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0001 | 0,0002 | 0,0005 | 0,0006 | 0,0016 | 0,0037 | 0,0068 | 0,0078 |
| 8 | 0 | 0,9227 | 0,6634 | 0,4305 | 0,2725 | 0,1678 | 0,1001 | 0,0576 | 0,0390 | 0,0319 | 0,0168 | 0,0084 | 0,0046 | 0,0039 |
| | 1 | 0,0746 | 0,2793 | 0,3826 | 0,3847 | 0,3355 | 0,2670 | 0,1977 | 0,1561 | 0,1373 | 0,0896 | 0,0548 | 0,0352 | 0,0313 |
| | 2 | 0,0026 | 0,0515 | 0,1488 | 0,2376 | 0,2936 | 0,3115 | 0,2965 | 0,2731 | 0,2587 | 0,2090 | 0,1569 | 0,1183 | 0,1094 |
| | 3 | 0,0001 | 0,0054 | 0,0331 | 0,0839 | 0,1468 | 0,2076 | 0,2541 | 0,2731 | 0,2786 | 0,2787 | 0,2568 | 0,2273 | 0,2188 |
| | 4 | 0,0000 | 0,0004 | 0,0046 | 0,0185 | 0,0459 | 0,0865 | 0,1361 | 0,1707 | 0,1875 | 0,2322 | 0,2627 | 0,2730 | 0,2734 |
| | 5 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0004 | 0,0026 | 0,0092 | 0,0231 | 0,0467 | 0,0683 | 0,0808 | 0,1239 | 0,1719 | 0,2098 | 0,2188 |
| | 6 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0002 | 0,0011 | 0,0038 | 0,0100 | 0,0171 | 0,0217 | 0,0413 | 0,0703 | 0,1008 | 0,1094 |
| | 7 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0001 | 0,0004 | 0,0012 | 0,0024 | 0,0033 | 0,0079 | 0,0164 | 0,0277 | 0,0313 |
| | 8 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0001 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0007 | 0,0017 | 0,0033 | 0,0039 |
| 9 | 0 | 0,9135 | 0,6302 | 0,3874 | 0,2316 | 0,1342 | 0,0751 | 0,0404 | 0,0260 | 0,0207 | 0,0101 | 0,0046 | 0,0023 | 0,0020 |
| | 1 | 0,0830 | 0,2985 | 0,3874 | 0,3679 | 0,3020 | 0,2253 | 0,1556 | 0,1171 | 0,1004 | 0,0605 | 0,0339 | 0,0202 | 0,0176 |
| | 2 | 0,0034 | 0,0629 | 0,1722 | 0,2597 | 0,3020 | 0,3003 | 0,2668 | 0,2341 | 0,2162 | 0,1612 | 0,1110 | 0,0776 | 0,0703 |
| | 3 | 0,0001 | 0,0077 | 0,0446 | 0,1069 | 0,1762 | 0,2336 | 0,2668 | 0,2731 | 0,2716 | 0,2508 | 0,2119 | 0,1739 | 0,1641 |
| | 4 | 0,0000 | 0,0006 | 0,0074 | 0,0283 | 0,0661 | 0,1168 | 0,1715 | 0,2048 | 0,2194 | 0,2508 | 0,2600 | 0,2506 | 0,2461 |
| | 5 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0008 | 0,0050 | 0,0165 | 0,0389 | 0,0735 | 0,1024 | 0,1181 | 0,1672 | 0,2128 | 0,2408 | 0,2461 |
| | 6 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0001 | 0,0006 | 0,0028 | 0,0087 | 0,0210 | 0,0341 | 0,0424 | 0,0743 | 0,1160 | 0,1542 | 0,1641 |
| | 7 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0003 | 0,0012 | 0,0039 | 0,0073 | 0,0098 | 0,0212 | 0,0407 | 0,0635 | 0,0703 |
| | 8 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0001 | 0,0004 | 0,0009 | 0,0013 | 0,0035 | 0,0083 | 0,0153 | 0,0176 |
| | 9 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0003 | 0,0008 | 0,0016 | 0,0020 |

# TABLA DE LA DISTRIBUCIÓN NORMAL




| $a$ | 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.04 | 0.05 | 0.06 | 0.07 | 0.08 | 0.09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.500000 | 0.503989 | 0.507978 | 0.511966 | 0.515953 | 0.519939 | 0.523922 | 0.527903 | 0.531881 | 0.535856 |
| 0.1 | 0.539828 | 0.543795 | 0.547758 | 0.551717 | 0.555670 | 0.559618 | 0.563559 | 0.567495 | 0.571424 | 0.575345 |
| 0.2 | 0.579260 | 0.583166 | 0.587064 | 0.590954 | 0.594835 | 0.598706 | 0.602568 | 0.606420 | 0.610261 | 0.614092 |
| 0.3 | 0.617911 | 0.621720 | 0.625516 | 0.629300 | 0.633072 | 0.636831 | 0.640576 | 0.644309 | 0.648027 | 0.651732 |
| 0.4 | 0.655422 | 0.659097 | 0.662757 | 0.666402 | 0.670031 | 0.673645 | 0.677242 | 0.680822 | 0.684386 | 0.687933 |
| 0.5 | 0.691462 | 0.694974 | 0.698468 | 0.701944 | 0.705401 | 0.708840 | 0.712260 | 0.715661 | 0.719043 | 0.722405 |
| 0.6 | 0.725747 | 0.729069 | 0.732371 | 0.735653 | 0.738914 | 0.742154 | 0.745373 | 0.748571 | 0.751748 | 0.754903 |
| 0.7 | 0.758036 | 0.761148 | 0.764238 | 0.767305 | 0.770350 | 0.773373 | 0.776373 | 0.779350 | 0.782305 | 0.785236 |
| 0.8 | 0.788145 | 0.791030 | 0.793892 | 0.796731 | 0.799546 | 0.802337 | 0.805105 | 0.807850 | 0.810570 | 0.813267 |
| 0.9 | 0.815940 | 0.818589 | 0.821214 | 0.823814 | 0.826391 | 0.828944 | 0.831472 | 0.833977 | 0.836457 | 0.838913 |
| 1.0 | 0.841345 | 0.843752 | 0.846136 | 0.848495 | 0.850830 | 0.853141 | 0.855428 | 0.857690 | 0.859929 | 0.862143 |
| 1.1 | 0.864334 | 0.866500 | 0.868643 | 0.870762 | 0.872857 | 0.874928 | 0.876976 | 0.879000 | 0.881000 | 0.882977 |
| 1.2 | 0.884930 | 0.886861 | 0.888768 | 0.890651 | 0.892512 | 0.894350 | 0.896165 | 0.897958 | 0.899727 | 0.901475 |
| 1.3 | 0.903200 | 0.904902 | 0.906582 | 0.908241 | 0.909877 | 0.911492 | 0.913085 | 0.914657 | 0.916207 | 0.917736 |
| 1.4 | 0.919243 | 0.920730 | 0.922196 | 0.923641 | 0.925066 | 0.926471 | 0.927855 | 0.929219 | 0.930563 | 0.931888 |
| 1.5 | 0.933193 | 0.934478 | 0.935745 | 0.936992 | 0.938220 | 0.939429 | 0.940620 | 0.941792 | 0.942947 | 0.944083 |
| 1.6 | 0.945201 | 0.946301 | 0.947384 | 0.948449 | 0.949497 | 0.950529 | 0.951543 | 0.952540 | 0.953521 | 0.954486 |
| 1.7 | 0.955435 | 0.956367 | 0.957284 | 0.958185 | 0.959070 | 0.959941 | 0.960796 | 0.961636 | 0.962462 | 0.963273 |
| 1.8 | 0.964070 | 0.964852 | 0.965620 | 0.966375 | 0.967116 | 0.967843 | 0.968557 | 0.969258 | 0.969946 | 0.970621 |
| 1.9 | 0.971283 | 0.971933 | 0.972571 | 0.973197 | 0.973810 | 0.974412 | 0.975002 | 0.975581 | 0.976148 | 0.976705 |
| 2.0 | 0.977250 | 0.977784 | 0.978308 | 0.978822 | 0.979325 | 0.979818 | 0.980301 | 0.980774 | 0.981237 | 0.981691 |
| 2.1 | 0.982136 | 0.982571 | 0.982997 | 0.983414 | 0.983823 | 0.984222 | 0.984614 | 0.984997 | 0.985371 | 0.985738 |
| 2.2 | 0.986097 | 0.986447 | 0.986791 | 0.987126 | 0.987455 | 0.987776 | 0.988089 | 0.988396 | 0.988696 | 0.988989 |
| 2.3 | 0.989276 | 0.989556 | 0.989830 | 0.990097 | 0.990358 | 0.990613 | 0.990863 | 0.991106 | 0.991344 | 0.991576 |
| 2.4 | 0.991802 | 0.992024 | 0.992240 | 0.992451 | 0.992656 | 0.992857 | 0.993053 | 0.993244 | 0.993431 | 0.993613 |
| 2.5 | 0.993790 | 0.993963 | 0.994132 | 0.994297 | 0.994457 | 0.994614 | 0.994766 | 0.994915 | 0.995060 | 0.995201 |
| 2.6 | 0.995339 | 0.995473 | 0.995604 | 0.995731 | 0.995855 | 0.995975 | 0.996093 | 0.996207 | 0.996319 | 0.996427 |
| 2.7 | 0.996533 | 0.996636 | 0.996736 | 0.996833 | 0.996928 | 0.997020 | 0.997110 | 0.997197 | 0.997282 | 0.997365 |
| 2.8 | 0.997445 | 0.997523 | 0.997599 | 0.997673 | 0.997744 | 0.997814 | 0.997882 | 0.997948 | 0.998012 | 0.998074 |
| 2.9 | 0.998134 | 0.998193 | 0.998250 | 0.998305 | 0.998359 | 0.998411 | 0.998462 | 0.998511 | 0.998559 | 0.998605 |
| 3.0 | 0.998650 | 0.998694 | 0.998736 | 0.998777 | 0.998817 | 0.998856 | 0.998893 | 0.998930 | 0.998965 | 0.998999 |
| 3.1 | 0.999032 | 0.999065 | 0.999096 | 0.999126 | 0.999155 | 0.999184 | 0.999211 | 0.999238 | 0.999264 | 0.999289 |
| 3.2 | 0.999313 | 0.999336 | 0.999359 | 0.999381 | 0.999402 | 0.999423 | 0.999443 | 0.999462 | 0.999481 | 0.999499 |
| 3.3 | 0.999517 | 0.999534 | 0.999550 | 0.999566 | 0.999581 | 0.999596 | 0.999610 | 0.999624 | 0.999638 | 0.999651 |
| 3.4 | 0.999663 | 0.999675 | 0.999687 | 0.999698 | 0.999709 | 0.999720 | 0.999730 | 0.999740 | 0.999749 | 0.999758 |
| 3.5 | 0.999767 | 0.999776 | 0.999784 | 0.999792 | 0.999800 | 0.999807 | 0.999815 | 0.999822 | 0.999828 | 0.999835 |
| 3.6 | 0.999841 | 0.999847 | 0.999853 | 0.999858 | 0.999864 | 0.999869 | 0.999874 | 0.999879 | 0.999883 | 0.999888 |
| 3.7 | 0.999892 | 0.999896 | 0.999900 | 0.999904 | 0.999908 | 0.999912 | 0.999915 | 0.999918 | 0.999922 | 0.999925 |
| 3.8 | 0.999928 | 0.999931 | 0.999933 | 0.999936 | 0.999938 | 0.999941 | 0.999943 | 0.999946 | 0.999948 | 0.999950 |
| 3.9 | 0.999952 | 0.999954 | 0.999956 | 0.999958 | 0.999959 | 0.999961 | 0.999963 | 0.999964 | 0.999966 | 0.999967 |
| 4.0 | 0.999968 | 0.999970 | 0.999971 | 0.999972 | 0.999973 | 0.999974 | 0.999975 | 0.999976 | 0.999977 | 0.999978 |

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

# PROBLEMAS

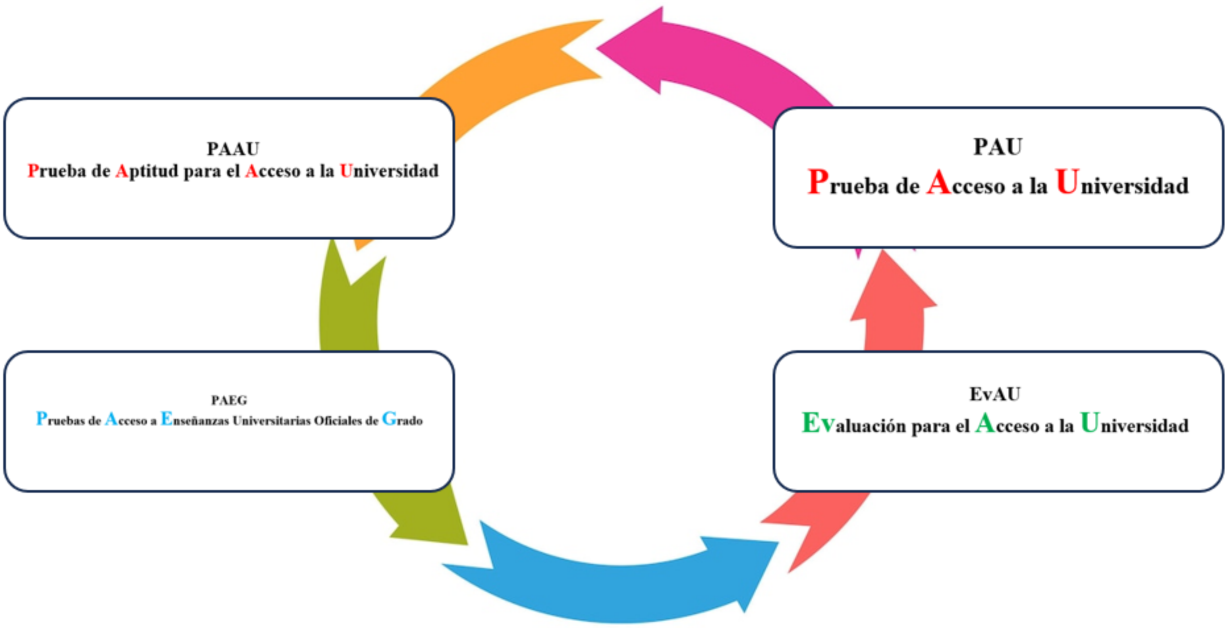
# DE

# SELECTIVIDAD

# MATEMÁTICAS II

**2000-2024**

UCLM
UNIVERSIDAD DE CASTILLA-LA MANCHA



# Índice de exámenes

# Junio de 2000

**Primer bloque**

**A)** El coste de producción de $x$ unidades de un producto viene dado por la expresión $C = x^2 - 300x + 100$ ptas. Y el precio de venta de una unidad es $U = 1000 - x$ ptas. ¿Cuántas unidades se deben vender para que el beneficio sea máximo?

**B)** Hallar la distancia del punto $P(2,4,1)$ al plano

$$\alpha \equiv 3x + 4y + 12z - 8 = 0$$

y encontrar el punto del plano que da la mínima distancia a $P$.

**Segundo bloque**

**A)** Calcular $\int \frac{x+1}{x^3 + x^2 - 6x} dx$

**B)** Estudiar la compatibilidad del siguiente sistema de ecuaciones lineales según los diferentes valores del parámetro $a$, y resolverlo cuando sea posible: $\begin{cases} x - y = 5 \\ y + z = a \\ x - 2z = 3 \\ 2x - 3z = a \end{cases}$

**Tercer bloque**

**A)** Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^2 & si \quad x \le 0 \\ a + bx & si \quad 0 < x \le 1 \\ 3 & si \quad x > 1 \end{cases}$, determinar $a$ y $b$ de modo que sea continua. Para los valores que se obtengan estudiar la derivabilidad.

**B)** Hallar el punto simétrico del punto $A(1,2,3)$ respecto de la recta $r \equiv \left\{ \begin{matrix} x - y + 1 = 0 \\ 2x - z - 1 = 0 \end{matrix} \right\}$.

**Cuarto bloque**

**A)** Calcular el área del recinto limitado por las curvas $y = x^2 - 1$, $y = 11 - x$, y el eje $OX$. Dibujar el recinto.

**B)** Resolver el sistema de ecuaciones matriciales $3X - 2Y = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 16 & 4 \end{pmatrix}$ y $X + 3Y = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ -2 & 27 \end{pmatrix}$.

# Septiembre de 2000

**Primer bloque**

**A)** Hallar el área del recinto plano delimitado por la ecuación $y = x^2 - 2$ e $y = |x|$. Dibujar el recinto.

**B)** Dados los puntos $A(-2,-4,-3)$, $B(2,6,5)$ y la recta $r \equiv \left\{ \begin{matrix} x - y + z = 1 \\ 2x + y - 3z = 2 \end{matrix} \right\}$. Averiguar si existe alguna recta tal que contenga los puntos $A$ y $B$ y corte a la recta $r$. Razonar la respuesta.

**Segundo bloque**

**A)** Calcular $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{\operatorname{tg} x-\sin x}$

**B)** Hallar el punto simétrico del punto $A(2,-3,5)$ y respecto del plano $\alpha \equiv x-3y+4z+21=0$

**Tercer bloque**

**A)** Estudiar la continuidad y la derivabilidad de la siguiente función

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2-x} & si \quad x\le 1\\ -x^2+4x-2 & si \quad x>1\end{cases}$$

**B)** Hallar una matriz $X$ que verifique la condición $A+BX=C$ siendo: $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ -1 & 6 & -2\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$

$B=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}0 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 3\end{pmatrix}$

**Cuarto bloque**

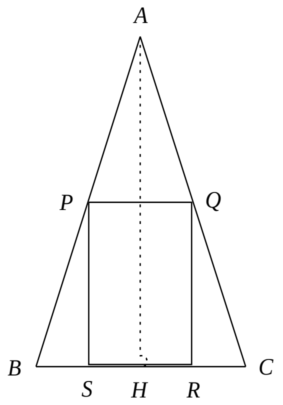
**A)** Calcular $\displaystyle\int \frac{3x}{x^2+2x+3}dx$

**B)** Estudiar la posición relativa de los planos $\alpha \equiv x+y=1$, $\beta \equiv ax+z=0$ y $\gamma \equiv x+y+z=2$ según los diferentes valores del parámetro $a$.

# Otra propuesta 1 de 2000

**Primer bloque**

**A)** El triángulo $BAC$ es isósceles en $A$. La base $BC$ mide 12 cm y la altura $AH$ mide 18 cm. Se quiere inscribir un rectángulo $PQRS$ de superficie máxima. Hallar las dimensiones de este rectángulo.




**B)** Determinar la ecuación de un plano que contenga al punto $P(1,-1,3)$ y sea paralelo al plano determinado por los puntos $A(1,1,2)$, $B(1,1,1)$ y $C(2,-2,1)$. Hallar la distancia entre los dos planos.

**Segundo bloque**

**A)** Estudiar la continuidad y la derivabilidad de la función

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{2}{2x+1} & si \quad x\le -1 \\ x^2-2x-5 & si \quad -1<x\le 4 \\ 5 & si \quad x>4 \end{cases}$$

**B)** Las rectas $r\equiv\begin{cases} x+y-z=4 \\ x+2y=7 \end{cases}$ y $s\equiv\begin{cases} x=2 \\ y=-3 \end{cases}$ se cruzan. Hallar las ecuaciones de la perpendicular común.

**Tercer bloque**

**A)** Calcular el área de la región plana limitada por la curva $f(x)=\left|x^2-4x\right|$ y la recta $y=12$. Dibujar el recinto.

**B)** Estudiar la compatibilidad del siguiente sistema de ecuaciones según los distintos valores del parámetro $a$ y resolverlo cuando sea posible $\begin{cases} 2x-y+2z=1 \\ x+4y+z=1 \\ 2x-5y+az=-2 \end{cases}$.

**Cuarto bloque**

**A)** Calcular $\displaystyle\int \frac{x^4-3x^3-3x-2}{x^3-x^2-2x}dx$

**B)** Resolver la ecuación $ABX-CX=2A$, siendo

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } C=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

# Otra propuesta 2 de 2000

**Primer bloque**

**A)** Hallar los puntos en que la función $f(x)=\left|x^2-4x-5\right|$ no es derivable. Razonar la respuesta.

**B)** Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

resolver la ecuación matricial $AX-BCX=4A$.

**Segundo bloque**

**A)** Calcular $\int \frac{6x+10}{-x^3+x^2+x-1}dx$

**B)** Estudiar la compatibilidad del siguiente sistema de ecuaciones lineales según los diferentes valores del parámetro $a$ y resolverlo cuando sea posible $\begin{cases} ax+y+z=4 \\ x+ay+z=4 \\ x+3y+z=5 \end{cases}$.

**Tercer bloque**

**A)** Hallar el área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x)=-2x^2+4x$ y las tangentes a dicha grafica en los puntos en que esta corta al eje de abscisas. Dibujar el recinto.

**B)** Hallar un punto $A$ perteneciente a la recta $r\equiv\begin{cases} x-y+1=0 \\ 2x-z-1 \end{cases}$ que equidiste de los planos $\alpha\equiv x+y=1$ y $\beta\equiv x=z$ .

**Cuarto bloque**

**A)** Calcular $\lim_{x\to 0}\left(\frac{5}{\log(1+x)}-\frac{5}{x}\right)$

**B)** Hallar el valor que debe tener $b$ para que las rectas $r\equiv\begin{cases} x+y=b \\ x+z=-3 \end{cases}$ y $s\equiv\begin{cases} x-y=3 \\ 2x-z=1 \end{cases}$ estén situadas en el mismo plano, y determinar la ecuación general de dicho plano.

# Junio de 2001

**Primer bloque**

**A)** Dada la parábola $y=\frac{x^2}{4}$ y la recta $y=x$:

a) Dibuja las gráficas de la parábola y de la recta.
b) Señala el recinto plano comprendido entre las dos graficas anteriores.
c) Calcula el área del recinto plano señalado

**B)** Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

a) Halla paso a paso la inversa de la matriz $A$.
b) Calcula la matriz $X$ que verifique la ecuación $AX=B$.

**Segundo bloque**

**A)** Resuelve $\int \frac{x^2-1}{x(x^2+1)}dx$

**B)** Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = \lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x = \mu \\ y = 2+2\mu \\ z = 0 \end{cases}$

a) Estudia la posición relativa de las rectas $r$ y $s$

b) Halla la ecuación de la recta que sea perpendicular simultáneamente a $r$ y $s$

**Tercer bloque**

**A)** Dada la función $f(x) = \begin{cases} 2x+5 & si \quad x \le 1 \\ x^2 + k & si \quad x > 1 \end{cases}$

a) Determina $k$ para que $f(x)$ sea continua en $x=1$.

b) ¿Es la función $f(x)$ para el valor de $k$ calculado derivable en $x=1$?

**B)** Determina las coordenadas del punto simétrico del $A(-2,1,6)$ respecto de la recta $r \equiv \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z+1}{2}$.

**Cuarto bloque**

**A)** Calcula $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos x}{(e^x-1)^2}$

**B)** Discute y resuelve, en los casos que sea posible, el siguiente sistema $\begin{cases} ax + y - z = 1 \\ x + 2y + z = 2 \\ x + 3y - z = 0 \end{cases}$

# Septiembre de 2001

**Primer bloque**

**A)** Halla las dimensiones de un depósito abierto superiormente, en forma de prisma recto de base cuadrada de $1000$ metros cúbicos de capacidad que tenga un revestimiento interior de coste mínimo. El precio del $\text{m}^2$ de revestimiento lateral es $100$ euros, el precio del $\text{m}^2$ de revestimiento de fondo es $200$ euros. Halla también el coste mínimo.

**B)** Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$:

1º) Halla la inversa de $A - BC$.

2º) Resuelve la ecuación matricial $AX - BCX = A$.

**Segundo bloque**

**A)** Dada la función $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si} \quad x \le -2 \\ ax^2 + bx & \text{si} \quad -2 < x \le 4 \\ x-4 & \text{si} \quad x > 4 \end{cases}$, determina $a$ y $b$ de modo que sea continua. Para los valores que se obtengan, estudia la derivabilidad.

**B)** Halla el valor de $k$ para que las rectas $r\equiv\begin{cases}x+y=2\\ y-z=3\end{cases}$ y $s\equiv\begin{cases}y-3z=k\\ y-2z=2\end{cases}$ se corten. Halla el punto de corte.

**Tercer bloque**

**A)** Enuncia la regla de L’Hôpital y calcula el siguiente limite $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4\left(x-\log(1+x)\right)}{x\log(1+x)}$

**B)** Clasifica el sistema $\begin{cases}x+2y+3z=2\\ 2x+5y+4z=-1\\ x+3y+m^2z=3m\end{cases}$ según los valores de $m$ y resuelve cuando $m=-1$.

**Cuarto bloque**

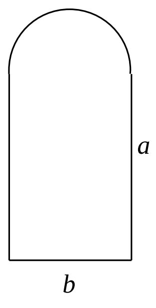
**A)** Calcula $\displaystyle\int\frac{x+2}{x^3-4x^2+4x}dx$

**B)** Halla $\lambda$ para que el plano $\pi\equiv 2x+\lambda-z=1$ y la recta $r\equiv\begin{cases}x+y=1\\ 2x+y-z=2\end{cases}$ sean paralelos. Encuentra otro valor de $\lambda$ para que sean perpendiculares

# Otra propuesta 1 de 2001

**Primer bloque**

**A)** Se considera una ventana rectangular en la que el lado superior ha sido sustituido por una semicircunferencia. Sabiendo que el perímetro de la ventana es $6$ m, halla las dimensiones $a$ y $b$ para que la superficie sea máxima.




**B)** Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix}1&3\\2&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2&-1&2\\-2&1&-3\end{pmatrix}\ \text{y}\ C=\begin{pmatrix}1&0\\3&2\\0&1\end{pmatrix}.$$

1º) Halla la inversa de $2A-BC$.

2º) Resuelve la ecuación matricial $2AX=BCX+A^2$.

**Segundo bloque**

**A)** Estudia la continuidad y la derivabilidad de la función

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{4}{x+2} & si \quad x\le 0\\ x^2-x+2 & si \quad x>0\end{cases}$$

**B)** Dada la recta $r\equiv\begin{cases}x+y+z=0\\x-2y-1=0\end{cases}$ y el punto $A(-1,3,2)$:

a) Halla unas ecuaciones paramétricas de la recta $s$ que pasa por $A$ y es paralela a $r$
b) Calcula la distancia de $s$ a $r$.

**Tercer bloque**

**A)** Halla el polinomio $P(x)$ cuya derivada sea $6x^2-6x-36$ y que además $P(x)$ alcance un máximo y un mínimo relativos tales que el valor máximo del polinomio sea doble que el valor mínimo. Halla también esos valores máximo y mínimo

**B)** Clasifica según los valores del parámetro $a$ y resuelve cuando sea posible $\begin{cases}x-2y=5\\y+z=a\\2x-4y=10\\x-3z=a+1\end{cases}$.

**Cuarto bloque**

A) Dibuja el recinto delimitado por las curvas $y=-x^2+2x+3$ e $y=|x+1|$. Halla el área del recinto.

**B)** Dado el punto $A(1,1,0)$ y el plano $\pi\equiv 2x+y+z=1$ calcula:

a) Las ecuaciones paramétricas de la recta $r$ que pasa por $A$ y es perpendicular a $\pi$.
b) La ecuación del plano que pasa por $A$ y es paralelo a $\pi$.
c) El punto simétrico de $A$ respecto a $\pi$.

# Otra propuesta 2 de 2001

**Primer bloque**

A) Dada la función $y=xe^x$ y las rectas $x=1$ e $y=0$:

a) Dibuja la gráfica de la función para $x>0$ y la de las rectas.
b) Señala el recinto plano comprendido entre las tres graficas anteriores.
c) Calcula el área del recinto plano señalado

B) Dadas las rectas $r\equiv\begin{cases}x=2-3\lambda\\y=3+5\lambda\\z=\lambda\end{cases}$ y $s\equiv\begin{cases}x=1-\mu\\y=2\mu\\z=5\end{cases}$

a) Estudia la posición relativa de las rectas $r$ y $s$.
b) En el caso de que $r$ y $s$ se corten calcula las coordenadas del punto de corte.

**Segundo bloque**

A) Resuelve $\displaystyle\int\frac{x^2-x+1}{x^3+x}dx$

**B)** Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$

a) Halla paso a paso la inversa de la matriz $A$.
b) Resuelve la siguiente ecuación matricial $AX-B=AB$.

**Tercer bloque**

**A)** Dada la función $f(x)=\begin{cases}x+b & \text{si} \quad x<0\\ ax^2+3 & \text{si} \quad x\geq 0\end{cases}$ determina $a$ y $b$ para que $f(x)$ sea continua y no derivable en $x=0$

**B)** Discute y resuelve si es posible el siguiente sistema

$$\begin{cases}ax+y+z=1\\x+ay+z=1\\x+y+az=1\end{cases}$$

**Cuarto bloque**

**A)** Enuncia la Regla de L'Hôpital y calcula $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^4-2x^2+1}$

**B)** Dadas las rectas $s\equiv\dfrac{x}{4}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z}{2}$ y $r\equiv\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-a}{a-1}=\dfrac{z-3}{3}$

a) Calcula el valor de $a$ para que las rectas $r$ y $s$ se corten, en el caso de que $r$ y $s$ se corten.
b) Calcula las coordenadas del punto de intersección de las rectas $r$ y $s$.
c) Halla la ecuación del plano que determinan las rectas $r$ y $s$.

# Junio de 2002

**Primer bloque**

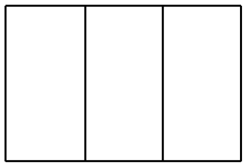
**A)** La función $f:R\to R$ dada por $f(x)=\begin{cases}x^2+bx+c & si \quad x\leq 0\\ \dfrac{\log(1+x)}{x} & si \quad x>0\end{cases}$ es derivable en el punto $x=0$. Calcula cuánto valen las constantes $b$ y $c$. (log es el logaritmo natural)

**B)** Considera el plano $\pi\equiv x-y+1=0$ y el punto $A(2,0,1)$.

a) Determinar la ecuación de la recta que es perpendicular al plano $\pi$ y pasa por el punto $A$.
b) Halla las coordenadas del punto $B$ que es simétrico del punto $A$ respecto del plano $\pi$.

**Segundo bloque**

**A)** Un solar rectangular de 11250 $m^2$ se divide en tres zonas rectangulares iguales para venderlo (como muestra la figura). Se valla el borde del campo y la separación de las zonas. Calcula las dimensiones del solar para que la longitud de valla utilizada sea mínima.



**B)** Discute según los valores del parámetro $a$ el sistema

$$\begin{cases} ax+y+z=0 \\ x+ay+z=1 \\ x+y+az=1 \end{cases}$$

¿Para qué valores de $a$ se puede aplicar la regla de Cramer para resolver el sistema?

**Tercer bloque**

**A)** Halla la ecuación de la recta tangente a la curva de ecuación $y=x^3-3x$ en el punto de abscisa $x=-1$. Calcula el área del recinto limitado por la recta y la curva dada.

**B)** Determina la ecuación del plano que pasa por el punto $P(1,0,2)$ , es paralelo a la recta $r \equiv \frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=z-3$ y perpendicular al plano $\pi \equiv 2x-y+z=0$

**Cuarto bloque**

**A)** Dada la función $f(x)=\frac{x^2-1}{x^3}$ calcula:

a) Máximos y mínimos relativos.
b) Asíntotas.
c) Puntos de inflexión.

**B)** Sabiendo que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix}=5$ calcula el valor de:

a) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a+2 & b+2 & c+2 \\ \frac{x}{3} & \frac{y}{3} & \frac{z}{3} \end{vmatrix}$

# Septiembre de 2002

**Primer bloque**

**A)** La capacidad de concentración de una saltadora de altura en una reunión atlética de tres horas de duración viene dada por la función $f(t)=300t(3-t)$ donde $t$ mide el tiempo en horas.

a) Calcula los intervalos en los cuales la capacidad de concentración aumenta y en los que disminuye. Cuando es nula también.
b) ¿Cuál es el mejor momento en términos de su capacidad de concentración para que la saltadora pueda batir su propia marca?
c) Representa gráficamente la función capacidad de concentración.

**A)** Sea $\pi$ el plano que pasa por los puntos $(1,0,0)$, $(0,1,1)$ y $(1,1,1)$; $A$ el punto $(1,2,3)$ y $B$

el simétrico de $A$ respecto del plano $\pi$.

a) Halla la ecuación de la recta que pasa por $A$ y por el punto medio del segmento $\overline{AB}$.

b) Halla la ecuación de la recta paralela a la anterior que pasa por el punto $(2,2,2)$.

**Segundo bloque**

**A)** Calcula $\int \frac{x^2-2}{x^3-3x+2}dx$

**B)** Resuelve la ecuación matricial $XA-2B+3C=D$ siendo

$$A=\begin{pmatrix}2&2\\1&2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2&0\\1&4\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}0&3\\2&0\end{pmatrix}\ \text{y}\ D=\begin{pmatrix}5&4\\-3&6\end{pmatrix}$$

**Tercer bloque**

**A)** El alcalde de un pueblo quiere preparar un recinto rectangular para celebrar fiestas. Aprovecha para uno de los lados una tapia existente y dispone de 300 m de tela metálica para cercar los otros tres lados.

a) Halla las dimensiones del recinto máximo que se puede acotar.

b) Calcula el área de dicho recinto.

**B)** Considera el plano $\pi \equiv ax+2y-4z+b=0$ y la recta $r \equiv \frac{x-3}{4}=\frac{y-1}{-4}=\frac{z+3}{1}$.

a) Halla los valores de $a$ y $b$ para que la recta $r$ este contenida en $\pi$.

b) ¿Existe algún valor de $a$ y $b$ para que la recta $r$ sea perpendicular a $\pi$?

**Cuarto bloque**

**A)** Dadas las funciones $y=-x^2+4$ e $y=|x+2|$.

a) Dibuja ambas graficas.

b) Señala el recinto plano comprendido entre ambas.

c) Calcula el área del recinto plano señalado.

**B)** Halla el valor del parámetro $k$ para que el sistema $\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x+3y+z=5 \\ 4x+5y+3z=k \end{cases}$ sea compatible indeterminado. Calcula la solución general y verifica si las ternas $(1,1,0)$, $(-5,4,3)$ y $(1,2,-1)$ son soluciones particulares.

# Reserva 1 de 2002

**Primer bloque**

**A)** Calcula $\int (x^2+2x+1)\log(x)\,dx$

**B)** Calcula $x$ para que el volumen del tetraedro determinado por los vectores $\vec{u}(3,-3,1)$, $\vec{v}(2,1,2)$ y $\vec{w}(1,5,x)$ sea igual a 30 unidades de volumen. Halla el área de la cara determinada por $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

**Segundo bloque**

**A)** Se toma una cuerda de $5$ metros de longitud y se unen los extremos. Construimos con ella triángulos isósceles de diferentes medidas. Calcula las dimensiones del que tiene mayor área.

**B)** Si $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 5$.

a) Calcula el valor de $\begin{vmatrix} 3a-b & 6a+2b \\ 3c-d & 6c+2d \end{vmatrix}$.

b) Enuncia las propiedades de los determinantes que has usado en el apartado anterior.

**Tercer bloque**

**A)** Enuncia la regla de L'Hôpital y calcula el siguiente limite $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x\cos(2x)-\operatorname{sen}(2x)}{x^3}$.

**B)** Dados los puntos $A(2,0,3)$, $B(-4,0,5)$ y el plano $\pi \equiv y-z=0$ halla la distancia entre los puntos $A'$ y $C$, siendo $A'$ el simétrico de $A$ respecto del plano $\pi$ y $C$ el punto medio del segmento $\overline{AB}$.

**Cuarto bloque**

**A)** La función $f:[0,5]\to R$ dada por

$$f(x)=\begin{cases} ax+bx^2 & si \quad 0\le x<2 \\ c+\sqrt{x-1} & si \quad 2\le x\le 5 \end{cases}$$

es derivable en el intervalo $(0,5)$ y verifica que $f(0)=f(5)$. ¿Cuánto valen $a$, $b$ y $c$?

**B)** Considera el sistema de ecuaciones que depende del parámetro real $\lambda$: $\begin{cases} x+2y-z=2 \\ 2x+3y+z=2 \\ 5x+\lambda y+z=6 \end{cases}$

a) Discute el sistema según los valores de $\lambda$.

b) Resuelve para $\lambda=8$.

# Reserva 2 de 2002

**Primer bloque**

**A)** Considera la función $f(x)$ definida para $x\neq 0$ por la relación $f(x)=\dfrac{4x^2+3x+4}{x}$

a) Halla las ecuaciones de sus asíntotas.

b) Determina los máximos y mínimos locales.

c) Dibuja la gráfica de $f(x)$.

**B)** Resuelve la ecuación $\begin{vmatrix} 2x-1 & 3x & x-2 \\ 2x+1 & x & 2x+1 \\ 2x-1 & 3x & 3x-2 \end{vmatrix}=0$.

**Segundo bloque**

**A)** Con una lámina rectangular de $30$ cm de largo por $15$ cm de ancho se quiere construir una caja sin tapa. Para ello se recortan unos cuadrados de los vértices y se doblan en ángulo recto

las pestañas resultantes.
a) calcula el lado del cuadrado recortado para que el volumen sea máximo.
b) calcula el volumen máximo.

**B)** Considera el triángulo de vértices $A(0,0,1)$, $B\left(3,-\sqrt{30},0\right)$ y $C\left(3,\sqrt{30},0\right)$.

a) Calcula cuánto vale cada uno de sus ángulos.
b) Justifica si se trata de un triángulo isósceles.

**Tercer bloque**

**A)** Dada la curva de ecuación $y=x^2-4x+3$ y la recta $y=-x+3$

a) Dibuja la gráfica de la parábola y de la recta
b) Señala el recinto plano comprendido entre ambas.
c) Calcula el área de ese recinto.

**B)** Considera las matrices

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Calcula una matriz $X$ tal que $A^2+AX=I$
b) Existe la inversa de la matriz $X$, justifica tu respuesta

**Cuarto bloque**

**A)** Dada la función

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{4}{x^2+2} & si \quad x\leq 0 \\ x^2-4x+2 & si \quad x>0 \end{cases}$$

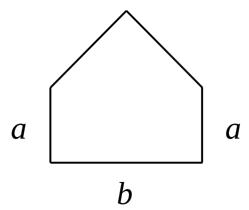
a) Determina los intervalos de continuidad.
b) Determina los intervalos de derivabilidad

**B)** Dados los puntos $A(1,0,0)$, $B(0,2,0)$ y $C(0,0,3)$ sean $A'$ el simétrico de $A$ respecto de $B$, $B'$ el simétrico de $B$ respecto de $C$ y $C'$ el simétrico de $C$ respecto de $A$. Halla la ecuación del plano que pasa por los puntos $A'$ $B'$ y $C'$

# Junio de 2003

**Primer bloque**

**A)** El perímetro de la ventana del dibujo mide $6$ metros. Los dos lados superiores forman entre si un ángulo de $90^o$. Calcula la longitud de los lados $a$ y $b$ para que el área de la ventana sea máxima.




**B)** Utiliza las propiedades de los determinantes y enúncialas para desarrollar:

$$\begin{vmatrix} x & 2x+1 & 3x+2 \\ x & 2x+3 & 3x+4 \\ x & 2x+5 & 3x+6 \end{vmatrix}.$$

**Segundo bloque**

**A)** Enuncia la regla de L'Hôpital. Calcula el siguiente límite: $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\log(1+x)}-\frac{1}{x}\right)$, donde log es el logaritmo natural.

**B)** Las rectas de ecuaciones $r \equiv \begin{cases} x+y-z=4 \\ x+2y=7 \end{cases}$, $s \equiv \begin{cases} x=2 \\ y=-5 \end{cases}$ se cruzan en el espacio.

a) Escribe las ecuaciones paramétricas de ambas rectas.
b) Halla un punto de $r$ y otro de $s$ tales que el vector origen en uno y extremo en el otro sea perpendicular a ambas rectas.

**Tercer bloque**

**A)** Dada la curva $y=x^2-4x$ y la recta $y=3x-6$

a) Dibuja la gráfica de ambas.
b) Señala el recinto plano comprendido entre ellas.
c) Calcula el área del recinto señalado.

**B)** Se consideran las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ \lambda & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ donde $\lambda$ es un número real.

Encuentra los valores de $\lambda$ para los que la matriz $AB$ es invertible.

**Cuarto bloque**

**A)** Determina las ecuaciones de la recta tangente y de la recta normal en el punto de abscisa $x=0$ a la gráfica de la función $f$ dada por $f(x)=2xe^x+\frac{x^3-2}{x^2+4}$.

**B)** Considera la recta $r$ dada por $r \equiv \begin{cases} x-4y+9=0 \\ 3y-z-9=0 \end{cases}$

a) Determina el plano que pasa por el punto $P(1,4,0)$ y contiene a $r$.

b) ¿Para cualquier valor de $\lambda$ el plano $x-4y+9+\lambda(3y-z-0)=0$ contiene a $r$?

c) Determina los valores de $\lambda$ para que el plano diste 3 unidades del origen de coordenadas.

# Septiembre de 2003

**Primer bloque**

**A)** En un semicírculo de radio 10 m se quiere inscribir un rectángulo, uno de cuyos lados este sobre el diámetro y el opuesto a él tenga sus extremos en la parte curva. Calcula las dimensiones del rectángulo para que su área sea máxima.

**B)** Considera la matriz $A=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

a) Comprueba que se verifica $A^3+I=O$ siendo $I$ la matriz identidad y $O$ la matriz nula.
b) Justifica que $A$ tiene inversa.

**Segundo bloque**

**A)** Calcula la siguiente integral $\int_e^{e^3} \frac{\log x}{x}dx$. (log es el logaritmo natural)

**B)** Estudia, según los valores de $a$, la compatibilidad del sistema y resuélvelo para el valor de $a$ que lo haga compatible indeterminado $\begin{cases} ax+y+z=1 \\ x+ay+z=1 \\ x+y+az=-2 \end{cases}$.

**Tercer bloque**

**A)** Dada la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x^3-6x^2+5x$.

a) Halla las coordenadas del punto de inflexión.
b) Halla las coordenadas de los puntos de corte con el eje de abscisas.
c) Determina las ecuaciones de las rectas tangentes a $f(x)$ en el punto de inflexión y en el origen de coordenadas.

**B)** Sea el plano $\pi$ de ecuación $3x-2y-6z=1$ y la recta $r$ dada por

$$(x,y,z)=(1,0,1)+\lambda(2,-1,1).$$

a) Define la relación de paralelismo entre una recta y un plano.
b) Averigua si la recta y el plano son paralelos.
c) Define la relación de perpendicularidad entre recta y plano.
d) Averigua si la recta y el plano son perpendiculares.

**Cuarto bloque**

**A)** Sea la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por

$$f(x)=\begin{cases} x^2-4x+3 & si \quad x\le 3 \\ 2x-4 & si \quad x>3 \end{cases}$$

a) Define continuidad de una función en un punto.
b) ¿En qué puntos es continua la función?
c) ¿En qué puntos es derivable la función?
d) Si una función no es continua en un punto ¿puede ser derivable en él?

**B)** Dados los planos $\pi\equiv x+y+z=1$ y $\pi'\equiv x-y=0$.

a) Calcula el ángulo que forman.
b) Determina las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por $P(1,2,3)$ y es perpendicular al plano $\pi$.

# Reserva 1 de 2003

**Primer bloque**

**A)** De la función $f$ de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

se sabe que tiene un máximo relativo en $x=1$ y un punto de inflexión en $(0,0)$ y que $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{5}{4}$. Calcula $a$, $b$, $c$ y $d$.

**B)** Consideramos las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

a) Determina si $A$ y $B$ son invertibles; b) Resuelve la ecuación matricial $BA - A^2 = AB - X$

**Segundo bloque**

**A)** Dada la función $f$ de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & si \quad x \le 1 \\ x^2-1 & si \quad 1 < x \le 2 \\ x^2 & si \quad x > 2 \end{cases}$$

a) Representa gráficamente la función.
b) Estudia su continuidad en los puntos de abscisa $x=1$ y $x=2$

**B)** Determina la ecuación del plano que pasa por el punto $A(1,1,2)$ y es paralelo a las rectas $r$ y $s$ dadas por $r \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{2}$ $s \equiv \begin{cases} 2x - y + z = -2 \\ -x + y + 3z = 1 \end{cases}$ ¿Pertenece el punto $P(2,1,4)$ a ese plano?

**Tercer bloque**

**A)** Resuelve la siguiente integral $\int \frac{x^2+1}{x^3-3x+2}\,dx$

**B)** Estudia según los valores de $k$ la compatibilidad del sistema y resuélvelo para $k=1$

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+2y+3z=k \\ 2x+3y+4z=k \end{cases}$$

**Cuarto bloque**

**A)** Supongamos que el rendimiento $r(t)$ de una alumna en un examen que dura dos horas viene dado por la relación $r(t) = 75t(2-t)$ donde $t$ con $0 \le t \le 2$ es el tiempo en horas.

a) ¿En qué intervalos aumenta el rendimiento y en que intervalos disminuye?
b) ¿En qué momento se obtiene mayor rendimiento?
c) ¿En qué momento el rendimiento es nulo?

**B)** Considera el plano $\pi$ y la recta $r$ de ecuaciones $\pi \equiv x + y = 2$ $r \equiv \begin{cases} x+z=4 \\ y=0 \end{cases}$.

a) Halla el punto de intersección de $\pi$ y $r$.
b) Halla la ecuación del plano que contiene a $r$ y es perpendicular a $\pi$.

# Reserva 2 de 2003

**Primer bloque**

**A)** Una compañía de venta a domicilio ha determinado que sus beneficios anuales dependen del número de vendedores verificando la expresión $B(x) = -9x^2 + 360x + 1875$ donde $B(x)$ es el beneficio en miles de euros para $x$ vendedores.

a) ¿Qué número de vendedores ha de tener la empresa para que sus beneficios sean máximos?

b) ¿Cuál será el valor máximo de los beneficios?

**B)** Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \lambda & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$ y el sistema lineal en forma matricial $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

a) Determina para que valores del parámetro $\lambda$ no tiene inversa la matriz $A$.

b) Resuelve el sistema para $\lambda = 1$.

**Segundo bloque**

**A)** Dada la función $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 3$.

a) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

b) Halla los puntos máximos mínimos y de inflexión de $f(x)$.

c) Representa su gráfica.

**B)** Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 6 & k & 2 \\ 12 & 4 & k \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calcula los valores de $k$ para que no tenga inversa.

b) Determina paso a paso la inversa de la matriz $A$ para el valor de $k = 3$.

**Tercer bloque**

**A)** Determina los números reales $a$ y $b$ para que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} ae^{\frac{\sin^2 x}{x}} + b\cos x & si \quad x < 0 \\ 6 & si \quad x = 0 \\ 3a\dfrac{\sin x}{x} + b(x-1) & si \quad x > 0 \end{cases}$ sea continua en toda la recta real.

**B)** Considera el plano $\pi$ y la recta $r$ dados por sus ecuaciones $\pi \equiv ax + 2y - 4z + b = 0$, $r \equiv \dfrac{x-3}{4} = \dfrac{y-1}{-4} = \dfrac{z+3}{1}$.

a) Calcula los valores de $a$ y $b$ para que $r$ este contenida en $\pi$.

b) ¿Existen valores de $a$ y $b$ para los que la recta $r$ sea perpendicular a $\pi$?

**Cuarto bloque**

**A)** Dadas las curvas de ecuaciones $y = \sqrt{3x}$ e $y = \dfrac{1}{3}x^2$:

a) Dibuja las gráficas

b) Señala el recinto plano comprendido entre ambas.
c) Calcula el área de dicho recinto.

**B)** Dados los planos de ecuaciones $\pi \equiv x+2y-z+4=0$, $\pi' \equiv 2x+y+Cz-3=0$, ¿para qué valores de $C$ el ángulo formado por $\pi$ y $\pi'$ es de 60º?

# Junio de 2004

**Primer bloque**

**A)** La curva $y=2x^2$ divide al cuadrado de vértices $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(1,1)$ y $D(0,1)$ en dos recintos.

a) Dibuja dichos recintos.
b) Halla el área de cada uno de ellos.

**B)** a) Determina la matriz $X$ para que tenga solución la ecuación $C(A+X)B=I$, donde $A, B$ y $C$ son matrices con inversa de orden $n$ e $I$ es la matriz identidad de orden $n$.

b) Aplica el resultado anterior para

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Segundo bloque**

**A)** Un alambre de 100 metros de largo se divide en dos trozos. Con uno de los trozos se forma un cuadrado y con el otro una circunferencia. Halla la longitud de los trozos para que la suma de las áreas del cuadrado y del círculo sea mínima.

**B)** Se considera el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} (m+2)x+(m-1)y-z = 3 \\ mx-y+z = 2 \\ x+my-z = 0 \end{cases}$$

a) Discútelo para los distintos valores de $m$.
b) Resuélvelo para $m = 1$.

**Tercer bloque**

**A)** Dada la curva $y=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$, se pide:

a) Dominio de definición de la función y puntos de corte con los ejes, si los hay.
b) Asíntotas, si las hay.
c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
d) Máximos y mínimos, si los hay.
e) Una representación aproximada de la misma.

**B)** Se considera la recta $r \equiv \begin{cases} x+2z = 3 \\ y+4z = 5 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv 3x-y+2z=1$. Se pide:

a) Comprueba que $r$ y $\pi$ son paralelos.
b) Calcula la distancia entre $r$ y $\pi$.
c) Determina dos rectas distintas que estén contenidas en $\pi$ y sean paralelas a $r$.

**Cuarto bloque**

**A)** Determina *b* y *c* para que la función

$$f(x)=\begin{cases} x^3 & si \quad x\le 2 \\ -x^2+bx+c & si \quad x>2 \end{cases}$$

a) Sea derivable en todos los puntos de $\mathbb{R}$.
b) Calcula la ecuación de la recta tangente en el punto de abscisa $x = 1$.

**B)** Considera los puntos $A(2,0,0)$, $B(0,2,0)$, $C(2,2,1)$ y $D(1,1,2)$, y calcula:

a) El volumen del tetraedro que determinan.
b) La ecuación cartesiana o implícita del plano que contiene al punto *D* y es paralelo al que contiene a los puntos *A*, *B* y *C*.

# Septiembre de 2004

**Primer bloque**

**A)** Considera la función siguiente $f(x)=\begin{cases} x^3-x^2 & si \quad x\le 1 \\ ax+b & si \quad x>1 \end{cases}$.

a) Determina los valores de *a* y *b* para que sea derivable en todos los puntos
b) Esboza la gráfica de la curva representativa de la función para los valores de *a* y *b* calculados.

**B)** Sean *A* y *B* las matrices siguientes

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ambas son de rango 3.
¿Qué ocurre si las combinamos linealmente? En concreto, estudia el rango de la matriz $A+\lambda B$ según los valores del parámetro $\lambda$.

**Segundo bloque**

**A)** Considera la función $f(x)=-x^4+4x^3$. Calcula:

a) Puntos de corte con los ejes.
b) Máximos y mínimos.
c) Puntos de inflexión.
d) Halla el área de la región encerrada por la gráfica y el eje OX

**B)** Dadas las matrices:

a) Halla la matriz inversa de $(A-I)$, siendo *I* la matriz unidad de orden 3.
b) Halla la matriz *X* solución de la ecuación $XA-2B=X$:

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

**Tercer bloque**

**A)** Expresa el número 60 como suma de tres números positivos de forma que el segundo sea el doble del primero. Si el producto de los tres es máximo, determina el valor de dicho producto.

**B)** Halla la distancia del plano $\pi_1 \equiv 4x - 10y + 2z = -1$ al plano $\pi_2 \equiv \begin{cases} x = 2\lambda + 3\mu \\ y = \lambda + \mu \\ z = \lambda - \mu \end{cases}$.

**Cuarto bloque**

**A)** Considera la función $f(x) = \begin{cases} x^3 & si \quad x < 1 \\ -x^2 + 2x & si \quad x \geq 1 \end{cases}$.

a) Haz un dibujo aproximado de su gráfica.
b) Calcula el área encerrada por la gráfica y el eje X.

**B)** Considera la recta *r* que pasa por los puntos $A(2,1,0)$ y $B(-4,-2,0)$ y la recta *s* determinada por el punto *C*(2,3,5) y el vector dirección $\vec{v} = (1,3,0)$.

a) Calcula el ángulo formado por *r* y *s*.
b) Calcula la distancia de *r* a *s*.

# Reserva 1 de 2004

**Primer bloque**

**A)** a) Estudia la continuidad y derivabilidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} 5x + b & si \quad x < 1 \\ ax^2 + 3x + 5 & si \quad x \geq 1 \end{cases}$$

b) Determina los valores de *a* y *b* para que sea continua y derivable en todo número real.

**B)** a) Estudia según los valores del parámetro *a* el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x - 2y - z & = & -1 \\ ax - y + 2z & = & 2 \\ x + 2y + az & = & 3 \end{cases}$$

b) Resuelve el sistema para *a* = 3.

**Segundo bloque**

**A)** Considera las funciones $f(x) = x^2 - 2x + 8; \qquad g(x) = -x^2 + 8x$.

a) Dibuja sus gráficas utilizando los mismos ejes.
b) Halla el área de la región encerrada por ellas.

**B)** Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, calcula, si es posible, una matriz *X* de números enteros tal que $XA = (10, 6, 2)$.

**Tercer bloque**

**A)** En un concurso se da a cada participante un alambre de dos metros de longitud para que, doblándolo convenientemente, haga con el mismo un cuadrilátero con los cuatro ángulos

rectos. Aquellos que lo logren reciben como premio tantos euros como decímetros cuadrados tenga de superficie el cuadrilátero construido.
Calcula la cuantía del máximo premio que se puede obtener en ese concurso.

**B)** Se consideran las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x - ay &= 1 \\ y - z &= 1 \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} x - 2y - z &= 0 \\ x + y + z &= 8 \end{cases}$$

Prueba que, para ningún valor de *a*, *r* y *s*, pueden ser paralelas y averigua el único valor de *a* para el que se cortan.

**Cuarto bloque**

**A)** Considera la función $f(x) = \begin{cases} x^3 & si \quad x \le 2 \\ -x^2 + 6x & si \quad x > 2 \end{cases}$

a) ¿Cumple las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo [0, 3]?
b) ¿Hay algún punto de la gráfica en el que la recta tangente sea paralela a la recta que pasa por los puntos $(0, f(0))$, $(3, f(3))$?

**B)** Halla la ecuación de la recta que pasa por $A(2,-1,3)$ y es perpendicular al plano que pasa por los puntos $B(1,1,0)$, $C(0,-1,2)$ y $D(-2,2,1)$. Calcula también el volumen del tetraedro *ABCD*.

# Reserva 2 de 2004

**Primer bloque**

**A)** a) Enuncia la regla de L'Hôpital.

b) Calcula $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^{x^2} - 1}{\cos x - 1}$.

**B)** Resuelve la ecuación matricial $AX - B + C = 0$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Segundo bloque**

**A)** Calcula las dimensiones de 3 campos cuadrados de modo que: el perímetro del mayor sea el doble del perímetro del menor, se necesiten exactamente 1120 metros de valla para vallar los tres campos y las sumas de sus áreas sea la mínima posible. Cada campo tiene su propia valla.

**B)** Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Determina los valores de c tales que la matriz $A + cB$ no tenga rango 2.
b) Calcula, para los valores hallados de c, la matriz $A(A + cB)$ y su rango.

**Tercer bloque**

**A)** Determina un polinomio $P(x)$ de segundo grado sabiendo que:

$$P(0) = P(2) = 1.$$

y que

$$\int_0^2 P(x)dx = \frac{1}{3}.$$

**B)** Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$, estudia:

a) Asíntotas.
b) Máximos y mínimos.
c) Intervalos de concavidad y convexidad.
d) Haz un dibujo aproximado de la gráfica aprovechando los apartados anteriores.

**Cuarto bloque**

**A)** Dada la recta $r \equiv \begin{cases} 3x - y + z = 0 \\ x - y = 1 \end{cases}.$

a) Determina la ecuación de la recta *s* que pasa por el punto $P(2,-1,0)$ y corta perpendicularmente a *r*.
b) Calcula el punto *Q* intersección de *r* y *s*.
c) Calcula el simétrico de *P* respecto a *r*.

**B)** Considera los cuatro puntos $A(1,0,1)$, $B(1,1,0)$, $C(0,1,1)$ y $D(1,k,k-1)$.

a) Halla *k* para que los cuatro puntos sean coplanarios (estén en el mismo plano).
b) ¿Qué valores de *k* hacen que el volumen del tetraedro determinado por los cuatro puntos sea 30 unidades de volumen?

# Junio de 2005

**Primer bloque**

**A)** Estudia si la función $f(x) = \begin{cases} x & (x \le -1) \\ 1 - x^2 & (-1 < x \le 2) \\ -3 & (2 < x) \end{cases}$ es continua en los puntos $x = -1$ y $x = 2$

Representa gráficamente dicha función.

**B)** Determina $f(x)$ sabiendo que

$$f'''(x) = 24x;\quad f''(0) = 2,\quad f'(0) = 1 \text{ y } f(0) = 0$$

**Segundo bloque**

**A)** Una imprenta recibe el encargo de diseñar un cartel con las siguientes características: la zona impresa debe ocupar 100 cm², el margen superior debe medir 3 cm, el inferior 2 cm, y los márgenes laterales 4 cm cada uno.

Calcula las dimensiones que debe tener el cartel de modo que se utilice la menor cantidad de papel posible.

**B)** a) Enuncia la regla de L'Hôpital.

b) Resuelve el límite siguiente: $\lim_{x\to 0} \dfrac{x - \operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}$

**Tercer bloque**

**A)** Dado el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro $a$

$$\begin{cases} x+2y+z=a \\ x+y-az=a \\ 2x+3y+z=a \end{cases}$$

se pide:

a) Discusión del mismo en función del valor del parámetro $a$.

b) Resolución en el caso de que $a \neq 0$.

**B)** Si la matriz $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ tiene su determinante igual a *n*, averigua, utilizando las propiedades de los determinantes, el valor del determinante de las matrices siguientes:

$$B=\begin{pmatrix} 6d & 4e & 2f \\ 3g & 2h & i \\ 9a & 6b & 3c \end{pmatrix} \text{ y } C=\begin{pmatrix} d+f & e & f+e \\ a+c & b & c+b \\ g+i & h & i+h \end{pmatrix}$$

**Cuarto bloque**

A) a) Halla la ecuación del plano que contiene a la recta $r \equiv \begin{cases} x=2t \\ y=3+t \\ z=1-t \end{cases}$ y al punto $P(2,-1,2)$.

b) Calcula la distancia desde el plano obtenido al punto $Q(0,1,0)$.

B) Halla el área y las longitudes de las tres alturas de un triángulo cuyos vértices son: $A(1,1,1)$, $B(0,3,5,)$ y $C(4,0,2)$.

# Septiembre de 2005

**Primer bloque**

A) De todos los prismas rectos de base cuadrada y tales que el perímetro de una cara lateral es de 30 cm, halla las dimensiones del que tiene volumen máximo.

**B)** Estudia el crecimiento y la concavidad de la función $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\dfrac{\log x}{x}$. (log es el logaritmo neperiano)

**Segundo bloque**

A) a) Halla los valores de los coeficientes *b*, *c* y *d* para que la gráfica de la función $y=x^3+bx^2+cx+d$ corte al eje OY en el punto $(0,-1)$, pase por el punto $(2,3)$ y, en ese punto, tenga tangente paralela al eje OX.

b) Una vez hallados esos valores, halla los máximos y mínimos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la citada función.

**B)** Calcula la primitiva de $\int \frac{x+\sqrt{x}}{x^2}dx$.

**Tercer bloque**

**A)** a) Discute, en función de los valores de *m*, el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2x-3y=0 \\ x-y+z=0 \\ x+2y+mz=m \end{cases}$$

b) Resuelve, en los casos de compatibilidad, el sistema anterior.

**B)** Se consideran las matrices: $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$,

donde <u>*m*</u> es un número real. Encuentra los valores de <u>*m*</u> para los que *A*·*B* tiene inversa.

**Cuarto bloque**

**A)** Calcula la ecuación de una recta que pasa por el punto de intersección del plano $\pi \equiv x+y-z+6=0$ con la recta $s \equiv \frac{x}{3}=y-2=z+1$ y es paralelo a la recta

$$r \equiv \begin{cases} 3x+y-4=0 \\ 4x-3y+z-1=0 \end{cases}$$

**B)** Dados los puntos $A(1,-2,3)$ y $B(0,2,1)$, se pide:

a) la ecuación paramétrica de la recta que pasa por ambos puntos;

b) la ecuación del plano π que está a igual distancia de *A* y *B*;

c) la distancia al origen de la recta intersección del plano $2y-z=0$ con el plano π del apartado b).

# Reserva 1 de 2005

**Primer bloque**

**A)** Dada la función $f(x)=(2x+1)e^{x^2+x}$, determina la función $g(x)$ tal que $g'(x)=f(x)$, con la condición de que su gráfica pase por el punto (0,2).

**B)** Se desea construir una lata de conservas en forma de cilindro circular recto, de área total 150 cm² y volumen máximo. Determina el radio de la tapa y la altura del cilindro.

**Segundo bloque**

**A)** Se sabe que la función $f:[0,5]\rightarrow\mathbb{R}$ dada por $f(x)=\begin{cases} ax+bx^2 & \text{si } 0\le x<2 \\ c+\sqrt{x-1} & \text{si } 2\le x\le 5 \end{cases}$ es derivable en el intervalo (0,5), y verifica que $f(0)=f(5)$. ¿Cuánto valen $a,b$ y $c$?

**B)** Considera la función $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=(x-2)e^x$.

a) Determina los intervalos en los que la función *f* es creciente.

b) Dibuja la región limitada por la gráfica de $f$, el eje de abscisas y las rectas de ecuaciones $x=1$ y $x=3$.

c) Halla el área de la región descrita en el apartado anterior.

**Tercer bloque**

**A)** Se considera el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 3x+4y+3z=9 \\ mx+2y+z=5 \\ x+y+z=2 \end{cases}$

a) Determina los valores de $m$ para que el sistema dado tenga solución única.

b) Resuelve para $m = 1$.

**B)** Encuentra las matrices A y B, sabiendo que verifican las siguientes ecuaciones matriciales:

$$2A+3B=M \qquad -A+B=N$$

siendo $M=\begin{pmatrix} 8 & 4 & 7 \\ 18 & 11 & -6 \\ 8 & 3 & 13 \end{pmatrix}$ y $N=\begin{pmatrix} 9 & -2 & 16 \\ 17 & 1 & -10 \\ 9 & 4 & 13 \end{pmatrix}$

**Cuarto bloque**

A) Halla la ecuación del haz de planos que tienen por eje o arista la recta

$$r\equiv\begin{cases} x=1+\lambda \\ y=2\lambda \\ z=-1+3\lambda \end{cases}$$

y calcula, después, el que pasa por el punto $P(1,1,1)$.

B) Calcula el volumen del tetraedro que tiene como vértices el punto $D(10,10,10)$ y los puntos en que el plano $\pi\equiv 2x+3y+z-12=0$ corta los ejes de coordenadas.

# Reserva 2 de 2005

**Primer bloque**

**A)** Un objeto se lanza hacia arriba, verticalmente, desde un determinado punto. La altura, en metros, alcanzada al cabo de $t$ segundos viene dada por $h(t)=5-5t-5e^{-2t}$.

Calcula el tiempo transcurrido hasta alcanzar la altura máxima y el valor de ésta.

**B)** De la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ se sabe que tiene un máximo relativo en $x=1$, un punto de inflexión en (0,0) y que $\int_0^1 f(x)dx=\frac{5}{4}$.

Calcula $a$, $b$, $c$ y $d$.

**Segundo bloque**

**A)** La función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por

$$f(x)=\begin{cases} x^2+bx+c & \text{si} \quad x\le 0 \\ \dfrac{\log(x+1)}{x} & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$$

es derivable en el punto $x = 0$. ¿Cuánto valen $b$ y $c$?

**B)** a) Halla el valor positivo de $a$ para que $\int_0^{a-1}(x+1)dx = \frac{9}{2}$.

b) Calcula el área de la superficie comprendida entre el eje $\overline{OX}$, la recta $y = x + 1$ y las rectas $x = 0$ y $x = 2$.

**Tercer bloque**

**A)** Se considera el sistema de ecuaciones siguiente: $\begin{cases} (m+2)x+(m-1)y-z=3 \\ mx-y+z=2 \\ x+my-z=1 \end{cases}$

Se pide:
a) Discutirlo para los distintos valores de $m$.
b) Resolverlo para $m = 1$.

**B)** Estudia para qué valores de $m$ la matriz siguiente tiene inversa:

$$\begin{pmatrix} m & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ m & 0 & m \end{pmatrix}$$

y, en el caso de ser posible, halla su inversa para $m = -1$.

**Cuarto bloque**

**A)** Encuentra un punto R perteneciente a la recta $r \equiv \begin{cases} 2x-y-z+3=0 \\ -2x+3y-z-1=0 \end{cases}$ tal que los segmentos $\overline{PQ}$ y $\overline{PR}$ formen un ángulo recto, siendo $P(1,0,0)$ y $Q(0,-1,5)$.

**B)** Dada la recta de ecuaciones paramétricas: $r \equiv \begin{cases} x=-1+2\alpha \\ y=-1+\alpha \\ z=1 \end{cases}$

y los puntos $P(1,1,2)$ y $Q(1,-1,2)$, se pide que:
a) Encuentres la posición relativa de $r$ y la recta determinada por los puntos $P$ y $Q$.
b) Halla el punto R de $r$ para los que el triángulo $PQR$ sea isósceles de lados iguales $\overline{PR}$ y $\overline{QR}$.

# Junio de 2006

**Primer Bloque**

**A)** Determina los valores $a,b,c \in \mathbb{R}$ para que la función $f(x) = x^3 + ax^2 + c$ pase por el origen de coordenadas, tenga un punto de inflexión en $x = -1$, y su recta tangente en $x = 1$ tenga pendiente $3$.

**B)** Enuncia el teorema de Rolle. En los ejemplos siguientes $f(-2) = f(2)$ pero no hay ningún valor $c \in (-2,2)$ tal que $f'(c) = 0$. Justifica en cada caso porque no contradicen el teorema de Rolle.

a) $f(x)=\dfrac{1}{x^4}$ b) $g(x)=2-|x|$

**Segundo Bloque**

**A)** Calcula la integral indefinida $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^2-2x+1}\,dx$

**B)** Dadas las funciones $f(x)=x^2-1$ y $g(x)=1-x$ a) Esboza el recinto encerrado entre sus gráficas. b) Calcula el área de dicho recinto.

**Tercer Bloque**

**A)** Despeja la matriz $X$ en función de $A$ e $I_2$ en la ecuación $(X+A)^2=X^2+X\cdot A+I_2$ siendo $X$ y $A$ matrices cuadradas de orden dos, e $I_2$ la matriz identidad de orden dos.

**B)** A un compañero le piden que clasifique y resuelva el sistema $\begin{cases}3x-ky=3\\ y+3z=6\\ x+kz=5\end{cases}$ para el valor del parámetro $k\in R$ que el desee. Obtiene que el sistema es compatible determinado y que una expresión de sus soluciones en forma paramétrica es $x=1+2t$ $y=\ldots$ $z=\ldots$ Determina para qué valor del parámetro $k$ ha clasificado y resuelto el sistema y calcula las expresiones de las incógnitas $y$ y $z$ que le faltan.

**Cuarto Bloque**

**A)** El plano $\alpha$ de ecuación general $x+y+z=10$ corta a las rectas $r_1: x=y=1$ $r_2: y=z=2$ y $r_3: x=z=3$ en los puntos $A$, $B$ y $C$ respectivamente.

a) Halla el volumen del tetraedro cuyos vértices son los puntos y $D(1,2,3)$.

b) Determina la distancia desde el vértice $D$ hasta la cara opuesta del tetraedro.

**B)** a) Halla un punto de la recta $r\equiv\begin{cases}x=1+2t\\ y=-t\\ z=-1\end{cases}$ equidistante de los puntos $P(-1,2,1)$ y $Q(0,3,1)$

b) Calcula la ecuación implícita de un plano $\pi$ de modo que el simétrico del punto $P$ respecto del plano $\pi$ sea $Q$.

# Septiembre 2006

**Primer Bloque**

**A)** Determina, si es posible, los valores del parámetro $k\in\mathbb{R}$ para que la función definida por

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+1-e^x}{2x+1-e^{2x}} & si \quad x<0\\ (2x-k)^2-6 & si \quad x\geq 0\end{cases}$$ sea continua en $x=0$

**B)** Para la función $f(x)=(x+2)e^x$ se pide

a) Estudia su dominio y continuidad
b) Determina sus puntos de corte con los ejes
c) Obtén las coordenadas de los máximos y mínimos relativos
d) Determina las coordenadas de los puntos de inflexión

**Segundo Bloque**

A) Calcula la siguiente integral $\int \frac{x^3+1}{x^2+4}dx$

B) Dibuja aproximadamente las gráficas de las funciones $f(x)=x^2-3$ y $g(x)=2x$, y sombrea el área que queda encerrada entre ellas. Calcula el valor de dicha área.

**Tercer Bloque**

**A)** Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = x$ y además

$$\begin{vmatrix} 3b & 6c & 6a \\ e & 2f & 2d \\ 5h & 10i & 10g \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a+2b & b-c & 7c \\ d+2e & e-f & 7f \\ g+2h & h-i & 7i \end{vmatrix} = 50x+6$$

hallar el valor de $x$

**B)** Clasifica en función del parámetro $a\in\mathbb{R}$ el sistema de ecuaciones $\begin{cases} ax-3y-2z=0 \\ -x+(5+a)z=0 \\ 2x+3y+4z=0 \end{cases}$ y resuélvelo si es posible para $a=-4$.

**Cuarto Bloque**

A) Dadas las rectas $r\equiv\begin{cases} x=3+t \\ y=5+t \\ z=6+t \end{cases}$ y $s\equiv\begin{cases} x=1 \\ -2y+z=2 \end{cases}$ se pide

a) Analiza su posición relativa
b) Halla la ecuación general del plano $\pi$ que contiene a $s$ y es paralelo a $r$

**B)** a) Calcula unas ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto $P(2,-1,3)$ y es perpendicular a la recta $r\equiv\begin{cases} x=-1+2\lambda \\ y=3-\lambda \\ z=0 \end{cases}$

b) Halla las coordenadas del punto $P'$ simétrico del punto $P$ respecto de la recta $r$.

# Reserva 1 de 2006

**Primer Bloque**

A) Enuncia el teorema de Bolzano. Aplícalo para demostrar que la ecuación $2^{x-1}=1+(1+x)^2$ tiene al menos una solución, determinando un intervalo $(a,b)$ con $a,b\in\mathbb{R}$ y $a<b$ en el cual

se encuentre dicha solución.

**B)** De entre todos los rectángulos de perímetro 20, ¿Cuál tiene diagonal menor?

**Segundo Bloque**

**A)** Calcula el valor de la integral $\int_0^1 \frac{2\arctan x}{1+x^2}dx$ siendo $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ y $\arctan 0 = 0$

**B)** Para la función $f(x) = \frac{\log x}{x^2}$ se pide: a) Determina las asíntotas horizontales de la función.

b) Calcula el área comprendida entre la gráfica de la función $f(x)$ el eje de abscisas y las rectas $x = e$ y $x = e^2$.

**Tercer Bloque**

**A)** a) Resuelve el sistema matricial $\begin{cases} 2X - Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \\ X - Y = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$

b) Resuelve la ecuación matricial $X \cdot A - X = B$ donde

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

**B)** a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in R$

$$\begin{cases} x + ay + (1-a)z = 2 + a \\ x + 2az = a \\ 2x + ay - z = a \end{cases}.$$

b) Cuando $a = -2$ obtén una solución tal que $z = 0$.

**Cuarto Bloque**

**A)** a) Halla la ecuación general del plano $\pi$ que contiene a la recta $r \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -\lambda \\ z = -3 + 2\lambda \end{cases}$ y es perpendicular al plano $\pi' \equiv x = 3$.

b) Discute en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$ la posición relativa de los planos $\pi_1 \equiv x - 2y + 5z = 1$ y $\pi_2 \equiv -a^2x + 2y - 5z = a$.

**B)** Dado el plano $\alpha \equiv 2x + 3y - 2z = 4$ y la recta

$$s \equiv \begin{cases} -x - y - az = 2 \\ 3x + 5y - 6z = a \end{cases}$$

se pide:

a) Analiza su posición relativa según los valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$.

b) Calcula la distancia de la recta al plano en los casos $a = 2$ y $a = 0$.

# Reserva 2 de 2006

**Primer Bloque**

**A)** Se dispone de 1200 metros cuadrados de chapa para construir un depósito en forma de prisma recto de base cuadrada, que no incluya la tapa superior. Halla el lado de su base $x$ y su altura $y$ de manera que el volumen que se pueda almacenar sea máximo. Calcula dicho volumen.

**B)** Dada la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\frac{1}{4}x^4-2x^2+3$ se pide

a) Determina sus intervalos de crecimiento y decrecimiento
b) Calcula las coordenadas de sus puntos de inflexión

**Segundo Bloque**

**A)** Halla el área encerrada entre la curva $y=x^3-4x^2+3x+2$ y la recta $y=2$

**B)** Sea la función $f(x)=axe^x+b$ con $a,b\in\mathbb{R}$ y $a,b>0$. Calcula $a$ y $b$ para que la recta tangente a la función en $x=0$ tenga pendiente 1 y que además se cumpla que el área comprendida entre la función, el eje de abscisas, y las rectas $x=0$ y $x=1$ sea 3.

**Tercer Bloque**

**A)** Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}\alpha & 0 & 1\\ -1 & 1 & 2\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\\ 2 & \alpha\end{pmatrix}$ se pide

a) Encuentra para que valores de $\alpha\in R$ la matriz $A\cdot B$ tiene inversa

b) Razónese si el sistema $A\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$ puede ser compatible determinado, y si $B\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$ puede ser un sistema incompatible

**B)** Si $T=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 1 & 3 & 3\end{pmatrix}$ halla, en función de $\lambda\in\mathbb{R}$, el rango de la matriz $M=\lambda\cdot T+(1-\lambda)\cdot T^2$

**Cuarto Bloque**

**A)** Discute según los valores del parámetro $a\in R$ la posición relativa de las rectas

$$r\equiv\begin{cases}x+2y-z=0\\ -x+y+2z=1\end{cases}\text{ y } s\equiv\begin{cases}3y+z=1\\ 2x-ay-3z=a\end{cases}$$

**B)** Dados el plano $\alpha\equiv x+3y+z=1$ el plano $\beta\equiv x-y+2z=3$ y el punto $P(2,-1,5)$

a) Calcula el ángulo que forman los planos $\alpha$ y $\beta$
b) Halla unas ecuaciones en forma continua de la recta que es paralela a ambos planos y que contiene al punto $P$

# Junio de 2007

**Primer Bloque**

**A)** a) Define el concepto de función continua en un punto.

b) Si $f(x)=\dfrac{e^{3x}-e^{-3x}}{4x}$, indica de forma razonada en qué valor $x=a$ no está definida $f(x)$.

c) Calcula el valor de $b\in\mathbb{R}$ para que la función $g(x)=\begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x\neq a \\ b & \text{si} \quad x=a \end{cases}$ sea continua.

**B)** Dada la función $f(x)=9x+6x^2-x^4$, se pide:

a) Halla los puntos en los que la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ tiene pendiente 1.

b) Calcula los puntos de inflexión de $f(x)$.

**Segundo Bloque**

**A)** Calcula la siguiente integral: $\displaystyle\int \frac{2}{1+\sqrt{x}}\,dx$

**B)** Dadas las funciones $f(x)=\dfrac{1}{x}$ y $g(x)=-x+\dfrac{5}{2}$, se pide:

a) Esboza sus gráficas y sombrea el recinto encerrado entre ellas.
b) Calcula el área de dicho recinto.

**Tercer Bloque**

**A)** Calcula el rango de la matriz $A=\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ -1 & 2\lambda & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ en función del parámetro $\lambda\in\mathbb{R}$. ¿Para qué valores del parámetro $\lambda\in\mathbb{R}$ tiene inversa la matriz *A*? (No se pide hallarla)

**B)** Discute y resuelve, en función del parámetro $a\in\mathbb{R}$, el sistema $\begin{cases} ax+y=0 \\ -y+2az=0 \\ -x+ay=0 \end{cases}$.

**Cuarto Bloque**

**A)** Consideramos las rectas: $r_1\equiv\begin{cases} x+y=5 \\ y+z=2 \end{cases}$, $r_2\equiv\begin{cases} y=1 \\ x+y+z=6 \end{cases}$ y $r_3\equiv\begin{cases} x-y=1 \\ y-z=3 \end{cases}$. Se pide:

a) Demuestra que las rectas $r_1$ y $r_2$ se cortan en un único punto.

b) Halla las ecuaciones en forma continua de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas $r_1$ y $r_2$, y es paralela a $r_3$.

**B)** Dados los planos $\alpha\equiv x+y-z=1$ y $\beta\equiv\begin{cases} x=1+t+s \\ y=1-t \\ z=2+s \end{cases}$, con $t,s\in\mathbb{R}$, se pide:

a) Determina su posición relativa.
b) Calcula la distancia entre ellos.

# Septiembre de 2007

**Primer Bloque**

A) En agosto de 1548 el matemático Ludovico Ferrari le propuso a su colega Niccolo Fontana, apodado Tartaglia, el siguiente problema: "Halla dos números reales no negativos cuya suma sea 8 de manera que su producto multiplicado por su diferencia sea máximo". Obtén las soluciones de este problema con dos decimales de aproximación.

**B)** De la función $f(x)=\dfrac{ax^2+b}{a-x}$, con $a,b\in\mathbb{R}$, sabemos que pasa por el punto $(1,2)$, y que tiene una asíntota oblicua cuya pendiente es $-6$. a) Determina los valores $a$ y $b$ de la función. b) Determina, si existen, las asíntotas verticales de dicha función.

**Segundo Bloque**

A) Calcula la siguiente integral: $\displaystyle\int\frac{x}{(x+1)^3}dx$

B) Esboza las gráficas de las funciones parabólicas $f(x)=2x^2$ y $g(x)=-x^2+3$, sombreando el recinto cerrado que determinan. Calcula el área de dicho recinto.

**Tercer Bloque**

**A)** Enuncia el Teorema de Rouché-Fröbenius. Contesta razonadamente a las siguientes preguntas para un sistema $AX=B$ en forma matricial:

a) ¿Puede un sistema homogéneo ser incompatible?

b) Si la matriz $2\times 3$, ¿puede ser el sistema $AX=B$ compatible determinado?

**B)** Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, se pide:

a) Resuelve la ecuación matricial $AX+X=B$, donde $X$ es una matriz $2\times 2$.

b) Resuelve el sistema $\begin{cases}2X+2Y=A\\ 4X+3Y=B\end{cases}$, siendo $X$ e $Y$ dos matrices de orden $2\times 2$.

**Cuarto Bloque**

**A)** Consideramos los planos $\pi_1\equiv x+2y-z=1$, $\pi_2\equiv 3x-z=3$ y $\pi_3\equiv -x+2y+z=7$.

a) Determina su posición relativa.

b) El ángulo que forman los planos $\pi_1$ y $\pi_2$.

B) Dados los puntos de coordenadas $A(3,1,1)$, $B(0,2,2)$ y $C(-1,-1,-1)$, se pide:

a) Determina la ecuación general del plano que los contiene.

b) Calcula la distancia desde el punto $P(0,0,4)$ a dicho plano.

# Reserva 1 de 2007

**Primer Bloque**

**A)** Enuncia el Teorema de Bolzano. Aplícalo para probar que la ecuación $\operatorname{sen} x = x^2 - 1$ tiene al menos una solución. (Indicación: el ángulo $x$ lo consideraremos en radianes).

**B)** De entre todos los triángulos rectángulos cuya hipotenusa mide 3 metros, determina la medida de los catetos de aquél que tenga área máxima.

**Segundo Bloque**

**A)** Sea $a \in \mathbb{R}$ una constante real no nula, y considera la parábola $f(x) = ax^2 - 4a$. Encuentra el valor de $a$ para que se verifiquen simultáneamente las dos siguientes condiciones: a) que el área comprendida entre la parábola y el eje de abscisas sea de 32 unidades cuadradas. b) Que la función $f(x)$ sea cóncava hacia arriba $(\cup)$.

**B)** Encuentra una primitiva de $f(x) = x^2 \cdot \operatorname{sen} x$ que pase por el origen de coordenadas.

**Tercer Bloque**

**A)** Razona si existe la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ y, en caso afirmativo, calcúlala.

Resuelve la ecuación matricial $AX + 2A = I$, donde $X$ es una matriz de orden $3\times3$ e $I$ es la matriz identidad de orden $3\times3$.

**B)** Discute el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x + y = 4 \\ ax - y = 6 \\ x - ay = -6 \end{cases}$ en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$, resolviéndolo cuando sea compatible.

**Cuarto Bloque**

**A)** Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} z = 4 \\ x - y = 0 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} z = 0 \\ x + y = 2 \end{cases}$, se pide:

a) Estudia su posición relativa.

b) Determina los puntos, $R \in r$ y $S \in s$ de cada recta, entre los que se alcanza la distancia mínima entre ambas rectas.

**B)** Dado el plano $\pi \equiv x + y + z = 2$ y las rectas $r_1 \equiv \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -t \\ z = 2t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ y $r_2 \equiv \begin{cases} x = 1 + s \\ y = -s \\ z = 2 \end{cases}$, $s \in \mathbb{R}$,

a) ¿Existe algún plano paralelo a $\pi$ que contenga a la recta $r_1$?

b) ¿Existe algún plano paralelo a $\pi$ que contenga a la recta $r_2$?

c) Si en algún caso la respuesta es afirmativa, halla la ecuación general de dicho plano.

# Reserva 2 de 2007

## Primer Bloque

**A)** Enuncia el Teorema del valor medio de Lagrange. Dada la función $f(x)=\dfrac{1+x}{2-x}$, se pide:

a) ¿Se puede aplicar dicho teorema a la función dada en el intervalo $[1,6]$?

b) ¿Se puede aplicar dicho teorema a la función dada en el intervalo $[3,11]$?

c) Si en algún caso se cumplen las hipótesis del teorema, calcula el valor para el cual se verifica la tesis del mismo.

**B)** Dada la función $f(x)=2-x^2\cdot e^{-x}$, se pide:

a) Halla las coordenadas de sus máximos y mínimos relativos.

b) Calcula, si existe, la ecuación de la asíntota horizontal por la derecha (cuando $x\to+\infty$).

## Segundo Bloque

**A)** Se considera la parábola $f(x)=-x^2+4$. Se pide: a) Calcula las ecuaciones de las rectas tangentes a $f(x)$ en $x=2$ y en $x=-2$, esbozando una gráfica con la parábola y las dos rectas tangentes. B) Calcula el área comprendida entre la parábola y dichas rectas tangentes.

**B)** Calcula la siguiente integral: $\displaystyle\int\frac{-x+3}{4x^2+9}dx$.

## Tercer Bloque

**A)** Consideramos las matrices $A=\begin{pmatrix}1&1&2\\-1&-1&2\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}k\\1\\2\end{pmatrix}$. Se pide:

a) Calcula, si es posible, la matriz

$$M=BB^t-A^tA,\ \text{donde } B^t \text{ y } A^t$$

son las matrices traspuestas de las matrices $B$ y $A$.

b) Determina el rango de la matriz $M$ en función del parámetro $k\in\mathbb{R}$.

**B)** a) Clasifica en función del parámetro $\lambda\in\mathbb{R}$ el sistema

$$\begin{cases}\lambda x+y+z=0\\ x+\lambda y=0\\ 3x+\lambda z=0\end{cases}.$$

b) Resuélvelo, si es posible, para los valores $\lambda=-2$ y $\lambda=-3$.

## Cuarto Bloque

**A)** Dadas la recta $\dfrac{x-1}{2}=y+2=\dfrac{z-2}{-1}$ y el punto $P(1,1,2)$, se pide:

a) Ecuación general del plano que contiene a la recta y al punto.

b) Distancia desde el punto $P$ a la recta $r$.

**B)** Dados los puntos de coordenadas

$$A(3,2,2),\ B(1,3,3),\ C(0,0,2) \text{ y } D(0,0,-1)$$

se pide:

**a)** Calcula el área del triángulo de vértices $A$, $B$ y $C$.

**b)** Analiza si los cuatro puntos forman un tetraedro y en caso afirmativo halla su volumen.

# Junio de 2008

**Primer Bloque**

**A)** Calcula los siguientes límites:

**a)** $\lim_{x\to 0} \frac{x^3-8x^2+7x}{x^2-x}$ **b)** $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{2x}{\pi}+\cos x\right)^{\frac{1}{\cos x}}$

**B)** Definición de punto de inflexión de una función.

Calcula el valor de los parámetros $a,b\in\mathbb{R}$ para que la función $f(x)=(x^2-a)e^x+bx$ tenga un punto de inflexión en $x=0$ y un mínimo relativo en $x=1$.

**Segundo Bloque**

**A)** Calcula la integral $\int \frac{2x^3-9x^2+9x+6}{x^2-5x+6}dx$.

**B)** Calcula la integral definida: $\int_0^{\pi} e^x \operatorname{sen} x dx$.

**Tercer Bloque**

**A)** Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, se pide:

a) Encuentra la expresión general de la potencia $n$- ésima de $A$. En otras palabras, calcula la expresión de $A^n$ donde $n$ es un número natural cualquiera.

b) Razona que la matriz $A^n$ tiene inversa para cualquier $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 1$, y calcula dicha matriz inversa.

**B)** Encuentra, si es posible, un valor del parámetro $a\in\mathbb{R}$ de modo que el sistema

$$\begin{cases}x+y-z=1\\x-y+2z=2\\2x+z=a\end{cases}.$$

a) Sea compatible determinado.

b) Sea compatible indeterminado.

c) Sea incompatible.

**Cuarto Bloque**

**A)** Dados los vectores $\vec{u}=(a,b,1)$, $\vec{v}=(-3,4,1)$ y $\vec{w}=(1,2,c)$, determina el valor de los parámetros $a,b,c\in\mathbb{R}$ de manera que los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ sean perpendiculares y además $\vec{u}\times\vec{w}=\vec{v}$, donde $\times$ denota el producto vectorial. ¿Qué ángulo forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$ en dicho caso?

**B)** Dados los puntos de coordenadas $A(1,1,1)$, $B(1+\lambda,2,1-\lambda)$ y $C(1+\lambda,1+\lambda,2+\lambda)$, donde $\lambda\in\mathbb{R}$.

a) Prueba que los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ forman un ángulo de 90º, independientemente del valor de $\lambda$.

b) Determina los valores de $\lambda$ para que la longitud de la hipotenusa del triángulo rectángulo de vértices $A$, $B$ y $C$ sea igual a 3.

# Septiembre de 2008

**Primer Bloque**

**A)** Dadas las funciones $f(x)=\ln(1-x^2)$ y $g(x)=\ln(1+x^2)$, se pide:

a) Determina el dominio de cada una de ellas.

b) Estudia si dichas funciones tienen puntos de inflexión.

**B)** Determina los valores de los parámetros $a,b\in\mathbb{R}$ para que la función $f(x)=(ax^2+bx)e^{-x}$ tenga un extremo relativo en el punto de abscisa $x=3$ y además pase por el punto $\left(1,-\frac{1}{e}\right)$. Halla la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto de abscisa $x=0$.

**Segundo Bloque**

**A)** De la función $f(x)=(x+a)\operatorname{sen} x$ donde $a$ es un número real, se sabe que la integral definida $\int_0^{\pi} f(x)\,dx$ es tres veces el valor de la pendiente de la recta tangente a $f(x)$ en $x=0$. Calcula el valor de $a$.

**B)** Definición de primitiva de una función. Sabiendo que $F(x)=e^{x^2}$ es una primitiva de la función $f(x)$:

a) Comprueba que la función $f(x)$ es creciente en $\mathbb{R}$.

b) Calcula el área determinada por la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas, y las rectas $x=-1$ y $x=1$.

**Tercer Bloque**

**A)** Sabiendo que $\begin{vmatrix} x & -3 & 1 \\ y & 0 & 1 \\ z & 7 & 1 \end{vmatrix}=6$, calcula el valor de $\begin{vmatrix} \frac{z}{2} & z+7 & 3 \\ \frac{y}{2} & y & 3 \\ \frac{x}{2} & x-3 & 3 \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} x & -3 & 1 & 2 \\ y & 0 & 1 & 2 \\ z & 7 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & 0 & 2 \end{vmatrix}$.

**B)** Clasifica el sistema $\begin{cases} x-2y+az=0 \\ -ay+2z=0 \\ 2x-y+(a+1)z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ en función del parámetro $a\in\mathbb{R}$, y resuélvelo para

$a = -2$.

**Cuarto Bloque**

**A)** Dados el plano $\pi \equiv x - y + z + k = 0$, donde $k \in \mathbb{R}$, y la recta $r \equiv \dfrac{x-3}{2} = y + 1 = -z$, se pide:

a) Demuestra que para cualquier $k \in \mathbb{R}$, la recta $r$ es paralela al plano $\pi$.
b) Determina el valor de $k \in \mathbb{R}$, de forma que la recta $r$ esté contenida en el plano $\pi$.

**B)** Dado el punto $P(2,2,1)$ y el plano $\pi \equiv \begin{cases} x = 1 + t - s \\ y = 1 - t + s \\ z = t \end{cases}$, se pide:

a) Distancia desde el punto $P$ al plano $\pi$.
b) Ecuaciones generales de la recta que pasa por el punto $P$ y es perpendicular a $\pi$.

# Reserva 1 de 2008

**Primer Bloque**

**A)** Enuncia el Teorema del valor medio de Lagrange. Explica su interpretación geométrica. Determina los valores de los parámetros $k, p \in \mathbb{R}$ para que la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{k+x}{x-1} & \text{si} \quad x \le 0 \\ e^x + p & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

verifique las hipótesis de dicho teorema en el intervalo $[-1,3]$

**B)** Determina los valores $a, b \in \mathbb{R}$ para que la función $f(x) = a\,\mathrm{sen}\,x + b\cos x$ pase por el punto $\left(\dfrac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right)$ y además cumpla que la pendiente de la recta tangente en el punto de abscisa $x = \dfrac{\pi}{2}$ sea 5. Calcula la derivada de orden 2008 de dicha función.

**Segundo Bloque**

**A)** Enuncia la Regla de Barrow. Calcula la integral definida $\int_0^1 (x^2 + x)e^x dx$.

**B)** Calcula la integral $\int \dfrac{e^{2x} + e^x}{1 + e^{2x}} dx$. Indicación: Puede ayudarte hacer un cambio de variable adecuado.

**Tercer Bloque**

**A)** Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, donde $\lambda \in \mathbb{R}$.

a) Estudia, en función del parámetro $\lambda$, el rango de $A \cdot B$.
b) Razona que la matriz $B \cdot A$ tiene inversa para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$, y calcula dicha matriz inversa.

**B)** Considérese el sistema de ecuaciones lineales en forma matricial $AX = B$, donde:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2a & a & -1 \\ 1 & -a & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ y } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

siendo $a$ un parámetro real. Se pide:

a) Clasifica el sistema en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$.

b) Para $a = 0$, obtén las soluciones mediante el cálculo de $X = A^{-1}B$.

**Cuarto Bloque**

**A)** Dados los planos $\pi_1 \equiv 2x + y + \sqrt{k}z = 3$, donde $k \in \mathbb{R}^+$, y $\pi_2 \equiv 3x + 4y = -5$, se pide:

a) ¿Es posible hallar $k$ para que $\pi_1$ y $\pi_2$ formen un ángulo de 60º? En caso afirmativo, calcúlalo.

b) ¿Es posible hallar $k$ para que $\pi_1$ y $\pi_2$ sean perpendiculares? En caso afirmativo, calcúlalo.

**B)** Considera los puntos $A(1,2,1)$, $B(3,6,3)$, $C(0,-1,5)$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x - y = -1 \\ z - y = 4 \end{cases}$.

a) Halla un punto $D$ de la recta $r$ de forman que los puntos $A$, $B$, $C$ y $D$ estén en un mismo plano.

b) Determina un punto $D'$ de la recta $r$ para que el volumen del tetraedro determinado por los vértices $A$, $B$, $C$ y $D'$ sea $\dfrac{10}{3}$.

# Reserva 2 de 2008

**Primer Bloque**

**A)** Determina el valor de $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$, para que se cumpla que:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{kx} - kx - 1}{kx^2} = \lim_{x \to 0} \frac{8 \operatorname{sen} x + 2 \tan x}{x + \operatorname{sen} x}$$

**B)** Determina los valores de $a, b, c \in \mathbb{R}$ para que la función $f(x) = ax^3 + bx + c$ pase por el punto $(2,8)$, tenga un mínimo relativo en $x = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ y además la recta tangente a $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$ tenga pendiente 4. Calcula la ecuación de la recta normal a $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$.

**Segundo Bloque**

**A)** Calcula el área determinada por la gráfica de la función $f(x) = x^3 - 9x$ y el eje de abscisas.

**B)** Calcula las siguientes integrales: a) $\int \ln x \, dx$, b) $\int \operatorname{tg} x \, dx$.

**Tercer Bloque**

**A)** Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, se pide:

a) Calcula $A^2$.

b) Resuelve la ecuación matricial $6A^{10}X = 3X + I_3$, siendo $I_3$ la matriz identidad de orden 3.

**B)** Enuncia el Teorema de Rouché-Fröbenius.
Sea $AX = B$ un sistema de ecuaciones lineales, escrito en forma matricial, con *m* ecuaciones y *n* incógnitas. Contesta razonadamente las siguientes preguntas:

a) Si $n > m$, ¿puede el sistema ser compatible determinado?

b) Si $n = m$ y $|A| \neq 0$, ¿cuál es el rango de la matriz ampliada $A|B$? Clasifica el sistema en este caso.

**Cuarto Bloque**

A) Dados los planos $\pi_1 \equiv x+y-z=1$, $\pi_2 \equiv 2x+2z=0$ y $\pi_3 \equiv x+3y+kz=3$, donde $k \in \mathbb{R}$.

a) Analiza su posición relativa en función del parámetro $k \in \mathbb{R}$.

b) En el caso en que los tres planos se cortan en una recta, calcula las ecuaciones paramétricas de la misma.

B) Encuentra el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$ sabiendo que la proyección del punto $P(a, 2a, 3a)$ sobre el plano $\pi \equiv 2x+y-z=12$ es $P'(8,13,17)$.

# Junio de 2009

**Primer Bloque**

**A)** Encuentra el punto de la recta $x+y=4$, que cumpla que la suma de los cuadrados de sus coordenadas sea mínima.

**B)** Enuncia el Teorema de Bolzano. Como aplicación de este teorema, demuestra que las gráficas de las funciones $f(x)=e^{x^2}$ y $g(x)=2\cos(x^2)$ se cortan en, al menos, un punto.

**Segundo Bloque**

**A)** Encuentra una primitiva de la función $f(x)=\dfrac{x+36}{4+9x^2}$.

**B)** Calcula la integral definida: $\displaystyle\int_1^4 \frac{\sqrt{x}+e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$. (Puede ayudarte hacer un cambio de variable).

**Tercer Bloque**

**A)** a) Sean $A$, $B$ y $X$ matrices cuadradas de tamaño *n*. Despeja $X$ de la ecuación $AXB = B^2$:

b) Calcula la matriz $X$ siendo

$$A=\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&1&-1\\1&-1&0\end{pmatrix} \text{ y } B=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&3\\1&0&1\end{pmatrix}.$$

**B)** a) Calcula, en función del parámetro $a\in\mathbb{R}$, las soluciones de la ecuación:
b) ¿Para qué valor de $a$ la ecuación anterior tiene una única solución?

**Cuarto Bloque**

**A)** a) Estudia, en función del parámetro $k\in\mathbb{R}$, la posición relativa de los planos $\pi_1\equiv x+y-z=1$ y $\pi_2\equiv x+y-k^2z=k$.

b) ¿Existe algún valor de $k$ para el que los planos $\pi_1$ y $\pi_2$ sean perpendiculares?

**B)** a) Halla la ecuación general de un plano $\pi$ que contenga a la recta $r\equiv\begin{cases}x+z=1\\y+z=0\end{cases}$ y pase por el origen de coordenadas.

b) Halla las ecuaciones paramétricas de una recta $r'$ contenida en dicho plano, que sea perpendicular a $r$ y que pase por el punto $P(1,0,0)$.

# Septiembre de 2009

**Primer Bloque**

**A)** Un depósito cilíndrico construido sin la tapa superior tiene una capacidad de $27\pi$ m$^3$. Determina cuánto miden el radio de su base y su altura sabiendo que se ha construido de forma que su superficie sea mínima.

**B)** Se sabe que la recta $y=9$ es una asíntota horizontal de la función $f(x)=\dfrac{x^2}{ax^2-4}$. Calcula valor del parámetro $a\in\mathbb{R}$. Estudia si para dicho valor del parámetro tiene asíntotas verticales u oblicuas.

**Segundo Bloque**

**A)** Calcula las integrales:

a) $\int \tan x dx$   b) $\int (1+\tan^2 x)dx$   c) $\int \arctan x dx$.

**B)** a) Estudia la continuidad y derivabilidad de la función

$$f(x)=\begin{cases}x^2+4x+3 & \text{si} \quad x<-1\\ 1-x^2 & \text{si} \quad x\ge -1\end{cases}.$$

b) Determina el área encerrada por la gráfica de la función $f(x)$ y el eje de abscisas.

**Tercer Bloque**

**A)** a) Sean $A$, $B$ y $X$ matrices cuadradas de tamaño *n*. Despeja $X$ de la ecuación $XA=2X+B^2$

b) Calcula la matriz $X$ siendo

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&-1\end{pmatrix} \text{ y } B=\begin{pmatrix}2&2&0\\0&4&0\\0&0&4\end{pmatrix}.$$

**B)** a) Clasifica, en función del parámetro $\lambda\in\mathbb{R}$, el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \lambda x + y - z = 2 \\ 5x + 3y + 3z = 0 \\ 3x + 2y + \lambda z = 1 \end{cases}$$

b) Resuélvelo para $\lambda = 0$, si es posible.

**Cuarto Bloque**

**A)** Di si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas y razona tus respuestas.

a) Dados un plano $\pi$ y un punto $P$ que no esté contenido en $\pi$, existe un único plano perpendicular a $\pi$ que pasa por $P$.

b) Dados una recta $r$ y un punto $P$ que no esté contenido en la recta $r$, existe un único plano perpendicular a $r$ que pasa por $P$.

**B)** Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 1 - t \end{cases}$ y $r' \equiv \begin{cases} x = 2 + s \\ y = s \\ z = a + s \end{cases}$, con $s, t \in \mathbb{R}$.

a) Encuentra un valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para que las rectas $r$ y $r'$ estén contenidas en un mismo plano. Halla la ecuación general de dicho plano.

b) Para $a = 0$, calcula unas ecuaciones paramétricas de un plano $\pi$ que contenga a la recta $r$ y unas ecuaciones paramétricas de otro plano $\pi'$ que contenga a la recta $r'$, de modo que $\pi$ y $\pi'$ sean paralelos.

# Reserva 1 de 2009

**Primer Bloque**

**A)** Según el artículo “*The design of honeycombs*” de A. L. Peressini, el área de la superficie de una celda de un panel de abejas está determinada por la función:

$$A(\theta) = p + q\frac{\sqrt{3} - \cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$$

donde $p$ y $q$ son dos constantes reales positivas, y $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ un cierto ángulo. Calcula con qué ángulo $\theta$ construyen las abejas las celdas de un panel, sabiendo que minimizan dicha área.

**B)** Se sabe que la recta $x = -3$ es una asíntota vertical de la función $f(x) = \frac{x^2}{x - a}$. Calcula el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$. Estudia si para dicho valor del parámetro la función $f(x)$ tiene asíntotas horizontales u oblicuas.

**Segundo Bloque**

**A)** Enuncia la fórmula de integración por partes. Aplícala para hallar $\int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \ln x dx$.

**B)** Determina una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sabiendo que cumple que $f'''(x) = 3e^x + 2$, $f''(0) = 7$, $f'(0) = 3$ y $f(1) = 3(e + 1)$.

**Tercer Bloque**

**A)** Determina en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$, el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & a & 2 \\ 1 & -a & a & a \end{pmatrix}$.

**B)** a) Clasifica, en función del parámetro $k \in \mathbb{R}$, el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x - y + z = 4 \\ 3x + y - z = k \\ y + z = -2 \end{cases}$$

b) Resuélvelo cuando sea compatible determinado.

**Cuarto Bloque**

**A)** Consideremos los planos

$$\pi_1 \equiv x - 2y + z = 0 \ \text{ y } \ \pi_2 \equiv 2x + ay + bz = 24 .$$

a) Calcula $a, b \in \mathbb{R}$ para que los planos $\pi_1$ y $\pi_2$ sean paralelos. ¿Son coincidentes en dicho caso?

b) Calcula la ecuación general de un plano $\pi_3$ que equidiste de $\pi_1$ y $\pi_2$ para los valores $a$ y $b$ antes obtenidos.

**B)** Dado el punto $P(0,-1,0)$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + t \\ z = -t \end{cases}$ con $t \in \mathbb{R}$.

a) Determina la ecuación general del plano perpendicular a $r$ que pasa por el punto $P$.

b) Halla las coordenadas de un punto $Q$ de la recta $r$ de modo que la distancia de $P$ a $r$ sea igual a la distancia de $P$ a $Q$. Calcula dicha distancia.

# Reserva 2 de 2009

**Primer Bloque**

**A)** Encuentra el punto de la gráfica de la función $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ en el que la pendiente de la recta tangente sea mínima.

**B)** Dada la función $f(x) = \dfrac{1}{\ln x}$, donde $\ln x$ es el logaritmo neperiano de $x$:

a) Determina su dominio y sus asíntotas.

b) Razona que la función es decreciente en su dominio.

**Segundo Bloque**

**A)** Calcula la integral indefinida $\displaystyle\int \frac{2x^3 - 9x^2 + 9x + 6}{x^2 - 5x + 6} dx$.

**B)** Halla una primitiva $F(x)$ de la función $f(x) = 8x^3 + 2x$, que cumpla que $F(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, y de forma que el área comprendida entre la gráfica de $F(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = 1$ sea $\dfrac{41}{15}$.

**Tercer Bloque**

**A)** Determina en función del parámetro $m \in \mathbb{R}$, el rango de la matriz $A=\begin{pmatrix} m & 2 & -1 & m-1 \\ 2 & 4 & m & m+2 \\ 3 & 6 & -3 & 0 \end{pmatrix}$.

**B)** Enuncia el Teorema de Rouché-Fröbenius. Sean $A$ una matriz $3\times3$, $B$ una matriz columna no nula de tamaño $3\times1$, $O$ la matriz nula de tamaño $3\times1$, y consideremos los sistemas expresados en forma matricial $AX=B$ y $AX=O$.

a) Sabiendo que $AX=B$ es incompatible, clasifica el sistema $AX=O$.

b) Sabiendo que la matriz $A$ tiene inversa, clasifica el sistema $AX=B$.

**Cuarto Bloque**

**A)** Dados los puntos $A(1,0,1)$, $B(2,1,0)$ y $C(1,1,a)$ con $a \in \mathbb{R}$:

a) ¿Existe algún valor de $a$ para el que los tres puntos estén alineados?

b) ¿Existe algún valor de $a$ para el que el plano que el plano que contiene a los tres puntos $A$, $B$ y $C$ sea paralelo al plano $\pi \equiv 4x-6y-2z=7$?

**A)** Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x-2y=1 \\ y-z=-1 \end{cases}$ y $r' \equiv \begin{cases} x=a-s \\ y=a+s, \\ z=s \end{cases}$ con $s \in \mathbb{R}$.

a) Estudia en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$ su posición relativa.

b) Para el valor del parámetro $a$ que hace que $r$ y $r'$ se corten en un punto, halla el punto $P$ de intersección entre ambas rectas, y las ecuaciones paramétricas de una recta $s$ perpendicular a $r$ y a $r'$ que pase por dicho punto $P$.

# Junio de 2010

**Propuesta A**

**1A.** a) Enuncia el teorema de Bolzano

b) ¿Se puede aplicar dicho teorema a la función $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ en algún intervalo?

c) Demuestra que la función $f(x)$ anterior y $g(x)=2x-1$ se cortan en al menos un punto.

**2A.** a) Representa gráficamente las parábolas $f(x)=x^2-3x-1$ y $g(x)=-x^2+x+5$.

b) Calcula el área del recinto limitado por ambas gráficas.

**3A.** a) Clasifica en función del parámetro $k \in \mathbb{R}$ el sistema de ecuaciones $\begin{cases} kx+y+z=k \\ x+ky+z=k \\ x+y+kz=k \end{cases}$.

b) Resuélvelo, si es posible, para $k=1$.

**4A.** a) Estudia la posición relativa de la recta $r \equiv \begin{cases} x = -\lambda \\ y = 0 \\ z = 1+\lambda \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ y el plano de ecuación general $\pi \equiv 2x - y + 3z = 6$.

b) Encuentra la ecuación general de un plano $\pi'$ perpendicular a $\pi$ que contenga a $r$.

**Propuesta B**

**1B.** La velocidad de una partícula, medida en *m/s*, está determinada en función del tiempo $t \geq 0$, medido en segundos, por la expresión $v(t) = (t^2 + 2t)e^{-t}$. Se pide

a) ¿En qué instante de tiempo del intervalo $[0,3]$ se alcanza la velocidad máxima?

b) Calcula $\lim\limits_{t\to\infty} v(t)$ e interpreta el resultado obtenido.

**2B.** Calcula la integral indefinida $\int \frac{\cos x}{1+\operatorname{sen}^2 x}dx$

**3B.** Consideremos las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & a-3 \\ b+2 & c \end{pmatrix}$. Determina los valores $a, b, c \in \mathbb{R}$ de forma que se cumpla que el determinante de la matriz $B$ sea igual a 8, y además se verifique que $A \cdot B = B \cdot A$.

**4B.** Dado el plano $\pi \equiv x + z = 4$ y el punto $P(1,1,0)$ se pide:

a) Encuentra la ecuación general del plano $\pi'$ paralelo a $\pi$ que pasa por $P$.

b) Halla unas ecuaciones paramétricas de la recta $r$ perpendicular a $\pi$ que pasa por $P$.

# Septiembre de 2010

**Propuesta A**

**1A.** Definición de derivada de una función en un punto. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{ax + \operatorname{sen} x}{2x - x^2} & \text{si} \quad x < 0 \\ bx + c & \text{si} \quad 0 \leq x < 1 \\ \dfrac{1}{1+x} & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

determina los parámetros $a, b, c \in \mathbb{R}$ para que $f(x)$ sea una función continua en $x = 0$ y además sea continua y derivable en $x = 1$.

**2A.** Determina el dominio de la función $f(x) = \sqrt{2x+1}$. Calcula la integral definida $\int_{-\frac{1}{2}}^{0} f(x)dx$.

**3A.** Dadas las matrices $M=\begin{pmatrix}\lambda & \lambda & -1\\ 4 & 3 & \lambda\\ 2 & 1 & -3\end{pmatrix}$ y $F=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$ se pide:

a) ¿Para qué valores de $\lambda \in R$ existe matriz inversa de $M$.
b) Para $\lambda = 0$ resuelve si es posible la ecuación $X \cdot M = 2F$ donde $X$ es una matriz cuadrada de orden 3.

**4A.** Dado el punto $P(0,0,1)$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x+y+z=3 \\ x-y=0 \end{cases}$ se pide

a) Calcula la distancia desde el punto $P$ a la recta $r$.
b) Halla unas ecuaciones paramétricas de una recta $s$ que pase por el punto $P$ y corte perpendicularmente a la recta $r$.

**Propuesta B**

**1B.** Dada la función definida por $f(x)=\begin{vmatrix}3x & 1 & 0\\ 0 & x & 1\\ -1 & 0 & x-6\end{vmatrix}$ se pide:

a) Halla su expresión polinómica simplificada calculando el determinante.
b) Calcula las coordenadas de su punto de inflexión y los intervalos en donde sea cóncava hacia arriba y cóncava hacia abajo.

**2B.** Enuncia la fórmula de integración por partes. Calcula la integral indefinida $\int x \log x dx$.

**3B.** Clasifica en función del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$ y resuelve para $\lambda = -3$ el sistema $\begin{cases} 2x+y+\lambda z=0 \\ x-2y+z=0 \\ x+3y+z=10 \end{cases}$.

**4B.** Consideramos los planos $\pi \equiv ax+by+3z=c,\ \pi' \equiv 2x-y+z=3$ y la recta $r \equiv \begin{cases} 2x+3z=0 \\ y+2z=-4 \end{cases}$

a) Determina los parámetros $a,b \in \mathbb{R}$ para que los planos sean paralelos.
b) Para los valores $a$ y $b$ obtenidos estudia la posición relativa del plano $\pi$ y la recta $r$ en función de $c \in \mathbb{R}$.

# Reserva 1 de 2010

**Propuesta A**

**1A.** Dada la función $f(x)=3x^3-36x+2$, se pide:

a) Determina las coordenadas de sus máximos y mínimos relativos.
b) Enuncia el teorema del valor medio de Lagrange. Analiza si es posible aplicarlo a la función $f(x)$ en el intervalo $[-2,2]$ y en caso afirmativo, calcula en que puntos se verifica la tesis del teorema en dicho intervalo.

**2A.** Dado un número real $a>0$, calcula el área del recinto encerrado entre la gráfica de la función $f(x)=\frac{1}{x^2}$ el eje de abscisas y las rectas $x=a$ y $x=a+1$. Explica razonadamente que cuando $a$ tiende a $\infty$ dicha área tiende a cero.

**3A.** Clasifica en función del parámetro $k\in\mathbb{R}$ el sistema de ecuaciones y resuélvelo en el caso en que sea compatible indeterminado $\left\{\begin{array}{l} x+100y-z=100 \\ x-100y+2z=0 \\ x+300y+kz=200 \end{array}\right.$.

**4A.** Comprueba que las direcciones de las rectas $r\equiv\left\{\begin{array}{l} x=0 \\ y+z=1 \end{array}\right.$ y $r'\equiv\left\{\begin{array}{l} x=1+2\lambda \\ y=2+\lambda \\ z=\lambda \end{array}\right.$ $\lambda\in\mathbb{R}$ son perpendiculares. Halla la ecuación general de un plano $\pi$ que contenga a la recta $r$ y sea paralelo a $r'$.

**Propuesta B**

**1B.** El espacio recorrido por una partícula en metros está determinado en función del tiempo $t\geq 0$ en segundos por la expresión $e(t)=At^2+B\log(t+1)+C$. Se pide:

a) Determina los coeficientes $A,B,C\in\mathbb{R}$ sabiendo que el instante $t=0$ la partícula ha recorrido $6$ m la velocidad inicial para $t=0$ es de 8 m/s y que la aceleración cuando $t=1$ es de 2 m/s$^2$.
b) Para los valores obtenidos de $A,B$ y $C$ calcula $\lim_{t\to\infty}\frac{e(t)}{t^2}$.

**2B.** Calcula la integral indefinida $\int\frac{1}{x^3+x^2}dx$.

**3B.** Despeja $X$ en la ecuación matricial $X\cdot A=B-2X$ donde $A$, $B$ y $X$ son matrices cuadradas de orden 3. Calcula la matriz $X$ siendo $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}4&1&2\\2&2&5\\1&4&4\end{pmatrix}$.

**4B.** Calcula los parámetros $a,b,c\in\mathbb{R}$ de la ecuación del plano $\pi\equiv ax+y+bz=c$ sabiendo que pasa por el origen de coordenadas, es perpendicular al plano de ecuación $\pi'\equiv x+2y=3$ y que contiene a la recta de ecuaciones $r \equiv \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 1+\lambda \\ z = 1+\lambda \end{cases}$ con $\lambda \in R$.

# Reserva 2 de 2010

**Propuesta A**

**1A.** Dada la función $f(x) = \arcsin\left(\sqrt{x-1}\right)$ definida para $x \geq 1$ se pide:

a) Calcula y simplifica $f'(x)$.

b) Explica razonadamente porque en ningún punto de la gráfica de la función $f(x)$ la recta tangente es horizontal.

**2A.** Calcula $a \in \mathbb{R}$ siendo $a > 0$ para que el área de la región limitada por la gráfica de la función $f(x) = 6x^2$ el eje de abscisas y la recta $x = a$ sea igual a 2000 u$^2$.

**3A.** Dadas las matrices $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ se pide:

a) Estudia para que valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ el rango de la matriz $M - \lambda N$ es igual a 3.

b) Resuelve el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 3X + Y = M \\ X + Y = N \end{cases}$ donde $X$ e $Y$ son matrices cuadradas de orden 3.

**4A.** Dado el plano de ecuación general $\pi \equiv 2x + ay - z = 4$ se pide

a) Determina, si es posible, un valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$ de modo que el plano $\pi$ sea paralelo al plano de ecuación $\pi' \equiv x + y + z = 2$.

b) Determina si es posible un valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$ de modo que el plano $\pi$ sea paralelo a la recta $r \equiv \begin{cases} x = 1-\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 2+\lambda \end{cases}$.

**Propuesta B**

**1B.** Determina los valores de los parámetros $a, b, c \in \mathbb{R}$ de forma que la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ cumpla que pasa por el punto de coordenadas $(3,10)$ y tiene un extremo relativo en el punto $(1,-2)$.

**2B.** Calcula la integral indefinida $\int \frac{x+2}{\sqrt{x+1}}\,dx$.

**3B.** Sabiendo que $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 4 & 0 & 2 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 10$ obtén el valor de los siguientes determinantes

a) $\begin{vmatrix} 3x & 3y & 3z \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 0 & 4 & 2 \\ y & x & z \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} x+1 & y+1 & z+1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix}$

**4B.** Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x = 2-\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 2+\lambda \end{cases}$ y $r' \equiv \begin{cases} x = 2+\mu \\ y = -2\mu \\ z = 4+\mu \end{cases}$ se pide:

a) Comprueba que las dos rectas se cortan en un punto calculando dicho punto de corte.
b) Determina el ángulo de corte entre ambas rectas.

# Junio de 2011

**Propuesta A**

**1A.** Dada la función $f(x) = \frac{4x^2+3x+4}{2x}$, se pide:

a) Calcula las asíntotas verticales y oblicuas de $f(x)$.

b) Coordenadas de los máximos y mínimos relativos de $f(x)$.

**2A**. Calcular las siguientes integrales:

a) $\int \left(\cos(2x) + \text{sen}\, x \cos x\right)\, \mathrm{d}x$

b) $\int \frac{x^3-1}{x+2}\, \mathrm{d}x$

**3A.** Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Resuelve el sistema matricial $\begin{cases} 2X + 3Y = A \\ X + Y = B \end{cases}$.

b) Encuentra una fórmula general para $B^n$, $n\in\mathbb{N}$. (Indicación: Calcula las primeras potencias de la matriz $B$)

**4A**. Consideremos el plano $\pi\equiv x-z=0$ y la recta $r\equiv\begin{cases}x=1+at\\ y=1-t\\ z=2t\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$

a) Determina el parámetro $a\in\mathbb{R}$ para que la recta y el plano sean paralelos.

b) Para el valor de $a$ determinado, obtén las ecuaciones paramétricas de una recta $r'$ paralela al plano $\pi$ y que corte perpendicularmente a $r$ en el punto $P(1,1,0)$.

**Propuesta B**

**1B**. En cierto experimento la cantidad de agua en estado líquido $C(t)$, medida en litros, está determinada en función del tiempo $t$, medido en horas, por la expresión:

$$C(t)=\frac{2}{3}+10t+\frac{10}{t}+\frac{240}{t^3}\qquad t\in[1,10]$$

Halla cuál es la cantidad mínima de agua en estado líquido y en qué instante de tiempo se obtiene en el intervalo comprendido entre $t=1$ hora y $t=10$ horas.

**2B**. a) Representa gráficamente la región del primer cuadrante limitada por las gráficas de las funciones $f(x)=\frac{1}{x}$ y $g(x)=\frac{1}{x^2}$, y la recta $x=2$.

b) Calcula el área de dicha región.

**3B**. a) Clasifica, en función del parámetro $\lambda\in\mathbb{R}$, el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases}\lambda x+2y-z=\lambda\\ 3x-y-z=1\\ 5x+y-2z=3\end{cases}$$

b) Resuélvelo, si es posible, para $\lambda=2$.

**4B**. Dados los puntos de coordenadas $A(0,1,0)$, $B(1,2,3)$, $C(0,2,1)$ y $D(k,1,1)$, donde $k\in\mathbb{R}$:

**a)** Determina el área del triángulo de vértices $A$, $B$ y $C$.

**b)** ¿Para qué valores del parámetro $k$ el tetraedro cuyos vértices son $A$, $B$, $C$ y $D$ tiene un volumen de $5\,\text{u}^3$?

# Septiembre de 2011

**Propuesta A**

**1A.** a) Determina el valor del parámetro $a\in\mathbb{R}$, para que la función

$$f(x)=(x-a)e^x$$

tenga un mínimo relativo en $x=0$. Razona que, de hecho, es un mínimo absoluto.
b) Para el valor de $a$ obtenido, calcula los puntos de inflexión de la función $f(x)$.

**2A**. Calcula la integral $\int \frac{x^2-3x+1}{x^3-5x^2+8x-4}\,dx$.

**3A**. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & k \\ 1 & 4 & k \\ 0 & 5k & 1 \end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y $O=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ se pide:

a) Calcula en función del parámetro $k\in\mathbb{R}$ el rango de la matriz $A$.
b) ¿Existe algún valor de $k\in\mathbb{R}$ para el cuál el sistema $AX=O$ sea incompatible?
c) ¿Para qué valores de $k\in\mathbb{R}$ el sistema $AX=O$ es compatible indeterminado?

**4A**. Dadas las rectas $r\equiv\begin{cases} x-y=1 \\ y+z=1 \end{cases}$ y $s\equiv\begin{cases} x=t \\ y=1-t,\ t\in\mathbb{R} \\ z=t \end{cases}$, se pide:

a) Determina su posición relativa.
b) Halla el ángulo que forman sus vectores directores.

**Propuesta B**

**1B**. a) Enuncia el teorema de Bolzano y el teorema de Rolle.
b) Demuestra que la ecuación $e^x+x^7=0$ tiene al menos una solución real.
c) Demuestra que, de hecho, dicha solución es única.

**2B**. Sean las funciones $f(x)=x^2$ y $g(x)=a$, con $a\in\mathbb{R}$, $a>0$. Calcula el valor del parámetro $a$ para que el área encerrada entre las gráficas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$ sea $\frac{32}{3}$.

**3B**. a) Clasifica, en función del parámetro $m\in\mathbb{R}$, el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x-y+z=1 \\ 2x-3y=-1 \\ x+2y+mz=m+3 \end{cases}$$

b) Resuélvelo, si es posible, para $m=7$.

**4B**. Consideremos el plano $\pi\equiv x-ky=0$, y la recta $r\equiv\begin{cases} x+y-z=3 \\ x-y=1 \end{cases}$.

a) Halla el valor del parámetro $k\in\mathbb{R}$ para que el plano $\pi$ y la recta $r$ sean paralelos.
b) Para el valor de $k$ obtenido, calcula la distancia desde la recta $r$ al plano $\pi$.

# Reserva 1 de 2011

## Propuesta A

**1A**. a) Definición de función continua en un punto.
b) Determina el valor del parámetro $a\in\mathbb{R}$ para que la función

$$f(x)=\begin{cases} ax^2 & \text{si} \quad x\le 3 \\ \dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} & \text{si} \quad x>3 \end{cases}$$ sea continua en $x=3$.

**2A.** Calcula las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int \frac{1+8x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int (x^2+x)\cos x\,\mathrm{d}x$

**3A.** He pensado en tres números, de manera que la suma de los primeros es igual al tercero. Si al triple del primer número le resto el doble del segundo vuelvo a obtener el tercero. Si al doble del primero le resto la mitad del segundo también obtengo el tercero. Por último, si al doble del primero le resto el segundo y sumo uno, de nuevo vuelvo a obtener el tercer número.

a) Plantea un sistema de ecuaciones que recoja la información anterior y clasifícalo.
b) Determina, si el problema tiene solución, los tres números que he pensado.

**4A.** Consideremos las rectas

$$r\equiv\begin{cases} x=1-at \\ y=b+t \\ z=2t \end{cases} \text{ con } t\in\mathbb{R} \ \text{ y } \ s\equiv x-2=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+6}{2}:$$

a) Determinar los parámetros $a,b\in\mathbb{R}$ para que las dos rectas se corten perpendicularmente en un punto.
b) Calcula para los parámetros obtenidos en el apartado anterior, las coordenadas del punto de corte.

## Propuesta B

**1B**. Calcula los siguientes límites:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^{\frac{1}{x-1}}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} x - x\cos x}{x^2}\right)$

**2B**. a) Representar gráficamente la región limitada por las funciones $f(x)=x^2$, $g(x)=\dfrac{1}{x}$, el eje de abscisas y la recta $x=e$.

b) Calcula el área de dicha región.

**3B**. Consideremos la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & k\\ 0 & k & 1\end{pmatrix}$, con $k\in\mathbb{R}$. Demuestra que el rango de la matriz $AA^t$ es siempre igual al rango de la matriz $A^tA$, cualquiera que sea el valor de $k\in\mathbb{R}$. (Recuerda que $A^t$ representa la matriz traspuesta de $A$.

**4B**. a) Dada la recta $r\equiv\begin{cases}x+y+z=0\\ 2y-z=-1\end{cases}$ y el punto $P(0,1,0)$, obtén las ecuaciones paramétricas de una recta $r'$ que pase por $P$ y corte perpendicularmente a $r$.

b) Encuentra las coordenadas del punto $P'$ simétrico de $P$ respecto de $r$.

# Reserva 2 de 2011

**Propuesta A**

**1A**. a) Determina el valor del parámetro $a\in\mathbb{R}$, $a>1$, de forma que el área del triángulo de vértices $A(0,0)$, $B(0,a)$ y $C\left(\dfrac{a}{a-1},0\right)$ sea mínima.

**2A.** Calcula las siguientes integrales:

a) $\int x\ln(x)\,\mathrm{d}x$

(Indicación: $\ln(x)$ representa el logaritmo neperiano de $x$)

b) $\int\dfrac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

**3A.** a) Despeja $X$ de la ecuación matricial $XB-I=XA+A$, donde $X$, $B$, $A$ e $I$ son matrices de tipo $3\times3$.

b) Calcula la matriz $X$ de tamaño $3\times3$, solución de la ecuación, siendo

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2 & 2 & 0\\ 0 & 3 & 2\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix} \text{ e } I=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

**4A**. a) Analiza, en función del parámetro $m\in\mathbb{R}$, la posición relativa de los planos $\pi_1\equiv 2x-y+z=0$, $\pi_2\equiv y+z=m$ y $\pi_3\equiv mx+y-z=8$.

b) Razona que, independientemente del valor del parámetro $m$, los planos $\pi_2$ y $\pi_3$ son perpendiculares.

**Propuesta B**

**1B**. Dada la función $f(x)=\dfrac{x^2}{2-x}$, se pide:

a) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

b) Asíntotas verticales y oblicuas.

**2B.** a) Representa gráficamente la región encerrada por las gráficas de las funciones $f(x) = x^2 - 2x - 2$ y $g(x) = -x^2 + 2x - 2$.

b) Calcula el área de dicha región.

**3B.** a) Enuncia el teorema de Rouché-Fröbenius.

b) Considera el sistema $AX = B$, donde $A$ es una matriz $3\times 4$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ y $B$ es una matriz con una sola columna. ¿De qué dimensiones es la matriz $B$?

c) ¿Puede el sistema ser compatible determinado?

d) Si el sistema es incompatible y el rango de la matriz $A$ es dos, ¿cuál es el rango de la matriz ampliada $(A|B)$?

**4B.** Dados los puntos $P(1,1,2)$ y $Q(1,1,0)$, y la recta $r \equiv \begin{cases} x + 2y = 1 \\ y + z = 0 \end{cases}$, se pide:

a) Ecuación general del plano $\pi$ que contiene al punto $P$ y a la recta $r$.

b) Halla la distancia desde el punto medio de los puntos $P$ y $Q$ al plano $\pi$ calculado en el apartado anterior.

# Junio de 2012

**Propuesta A**

**1A**. Dada la función

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

calcula los parámetros $a,b,c \in \mathbb{R}$ sabiendo que:

- La recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = -1$ tiene pendiente $-3$.
- $f(x)$ tiene un punto de inflexión de coordenadas $(1,2)$.

**2A**. a) Esboza la región encerrada entre la parábola $f(x) = x^2 - 1$ y la recta $g(x) = 5 - x$.

b) Calcula el área de la región anterior.

**3A.** a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $m \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \\ mx + (m+1)y + (m-1)z = m - 2 \\ 3x + (m+3)y + 4z = m - 2 \end{cases}$$

b) Calcula la solución cuando el sistema sea compatible determinado.

**4A.** a) Calcula el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de intersección del plano $\pi \equiv x - y + 3z = -3$ con los ejes de coordenadas.

**b)** Si llamamos $A, B$ y $C$ a los vértices del triángulo del apartado anterior, encuentra el valor del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$ para que el tetraedro de vértices $A, B, C$ y $D(-\lambda^2, 2+\lambda, -3)$ tenga volumen mínimo.

**Propuesta B**

**1B.** La concentración (en %) de nitrógeno de un compuesto viene dada, en función del tiempo $t \in [0, +\infty)$ medido en segundos, por la función

$$N(t) = \frac{60}{1+2e^{-t}}$$

a) Comprueba que la concentración de nitrógeno crece con el tiempo. ¿Para qué $t \in [0, +\infty)$ la concentración de nitrógeno es mínima y cuál es esa concentración?
b) ¿A qué valor tiende la concentración de nitrógeno cuando el tiempo tiende a infinito?

**2B.** Calcula las siguientes integrales:

$$\int \frac{1}{4+9x^2}\,dx \qquad\qquad \int \left(\tan x + \frac{1}{\tan x}\right) dx$$

**3B.** a) Sean $A$ y $B$ matrices cuadradas de orden $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, tales que $B$ es la inversa de $A$:

- Si $|A| = 3$ razona cuánto vale $|B|$.
- ¿Cuál es el rango de $B$?

b) Calcula el determinante de la matriz cuadrada $X$ de orden 3 que verifica:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 0 & 10 & -3 \\ 0 & 7 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

**4B.** Dados el plano $\pi \equiv 2x - z = 6$ y la recta $r \equiv \begin{cases} y + z = 0 \\ x - y + az = 4 \end{cases}$.

a) Encuentra el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para que $\pi$ y $r$ sean paralelos.
b) Para el valor de $a$ del apartado anterior, da la ecuación general del plano $\pi'$ que contiene a $r$ y es perpendicular a $\pi$.

# Septiembre de 2012

**Propuesta A**

**1A**. a) Enuncia el Teorema de Bolzano y el Teorema de Rolle.
b) Demuestra, usando el Teorema de Bolzano, que existen al menos tres raíces reales distintas de la ecuación $x^5 - 5x + 3 = 0$.
c) Demuestra, usando el Teorema de Rolle, que la ecuación anterior no puede tener más de tres raíces reales distintas.

**2A.** Calcula las siguientes integrales:

$$\int \operatorname{sen}^2 x \cos x \, \mathrm{d}x \qquad\qquad \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x$$

**3A.** Sabiendo que

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 5$$

calcula el valor de los determinantes

$$\begin{vmatrix} b & b+a & 2c \\ e & e+d & 2f \\ h & h+g & 2i \end{vmatrix} \qquad\qquad \begin{vmatrix} a+d+g & b+e+h & c+f+i \\ d+g & e+h & f+i \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

indicando las propiedades que usas en cada caso para justificar tu respuesta.

**4A.** Dado el plano $\pi \equiv x+y+2z=7$ y el punto $P(1,0,0)$:

**a)** Calcula el punto $Q$ de $\pi$ que hace mínima la distancia a $P$.

**b)** Calcula el punto simétrico $P'$ de $P$ respecto del plano $\pi$.

**Propuesta B**

**1B.** Dada la función

$$f(x) = \frac{ax^2+b}{2x+6}$$

Calcula los parámetros $a,b \in \mathbb{R}$ sabiendo que:

- $f(x)$ tiene una asíntota oblicua de pendiente 2.
- $f(x)$ tiene un mínimo relativo en el punto de abscisa $x=0$.

**2B.** Calcula el área encerrada entre las gráficas de las funciones $f(x)=x^3-3x^2+2x+1$ y $g(x)=1$

**3B.** a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x+y+2z=0 \\ ax-3z=a \\ 2x+ay-z=a \end{cases}$$

b) Resuélvelo para el valor $a=1$.

**4B.** Dado el punto $P(1,0,0)$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x=2\lambda \\ y=3+\lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ z=-1 \end{cases}$:

a) Da unas ecuaciones paramétricas de la recta $s$ que pasa por $P$ y corta perpendicularmente a $r$.

b) Calcula la distancia de $P$ a $r$.

# Reserva 1 de 2012

**Propuesta A**

**1A**. a) Enuncia el Teorema del valor medio de Lagrange y da su interpretación geométrica.
b) Calcula un punto del intervalo $[0,2]$ en el que la recta tangente a la gráfica de $f(x)=3x^2+2x+1$ sea paralela a la cuerda (o segmento) que une los puntos de la gráfica de $f(x)$ en $x=0$ y $x=2$.

**2A.** Calcula la integral:

$$\int \frac{x+2}{x^3+x^2}\,\mathrm{d}x$$

**3A.** Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad B=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{pmatrix}$$

se pide:

a) Calcula $A^n$ cuando $n\in\mathbb{N}$ es par.

b) Resuelve la ecuación matricial $6A^{20}X=B-3AX$, donde $X$ es una matriz cuadrada de orden 3. (Indicación: Sustituye de inicio el valor de $A^{20}$ para facilitar los cálculos).

**4A.** Dadas las rectas

$$r\equiv\frac{x+1}{2}=y=\frac{z-1}{3} \qquad s\equiv\begin{cases}x=\lambda\\y=a+\lambda\\z=-\lambda\end{cases} \qquad \lambda\in\mathbb{R}$$

a) Calcula el valor del parámetro $a\in\mathbb{R}$ para que $r$ y $s$ se corten en un punto. Da dicho punto de corte.
b) Para el valor de $a$ obtenido, calcula la ecuación general del plano $\pi$ que contiene a $r$ y $s$.

**Propuesta B**

**1B**. Sabiendo que la función

$$f(x)=\frac{ax+b}{x^2+1} \qquad a,b\in\mathbb{R}$$

tiene un punto crítico en $(1,1)$, calcula $a$ y $b$ y demuestra que el punto crítico es un máximo.

**2B.** a) Esboza la región encerrada entre el eje de abscisas y las parábolas

$$f(x)=x^2 \text{ y } g(x)=x^2-4x+4.$$

b) Calcula el área de la región anterior.

**3B.** a) Discute el sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $m\in\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} mx + z = 1 \\ my + z = m \\ -mx - my + (m+1)z = -m-1 \end{cases}$$

b) Calcula la solución cuando el sistema sea compatible indeterminado.

**4B.** Dados el plano $\pi \equiv y - z = 3$ y la recta

$$r \equiv \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

a) Estudia la posición relativa de $\pi$ y $r$.
b) Da unas ecuaciones paramétricas de la recta $s$ paralela a $\pi$ que corta a $r$ perpendicularmente en el punto $P(0,1,-1)$.

# Reserva 2 de 2012

**Propuesta A**

**1A**. a) Interpretación geométrica de la derivada de una función en un punto.
b) Encuentra el punto de la función $f(x) = x^4 - 8x^3 + 18x^2 + 30x + 1$ en el que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ es mínima. Encuentra también el punto donde la pendiente es máxima.

**2A.** Encuentra una primitiva $F(x)$ de la función $f(x) = (x^2+1)e^x$ tal que $F(0) = 5$.

**3A.** Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & -b \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & -b & a & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \text{ con } a, b \in \mathbb{R},\ a \neq 0,\ b \neq 0$$

a) Calcula $AA^T$, donde $A^T$ es la matriz traspuesta de $A$.
b) Razona que siempre existe la matriz inversa de $A$, independientemente de los valores $a, b \in \mathbb{R},\ a \neq 0, b \neq 0$.

**4A.** Dados los planos $\pi_1 \equiv x - 2y - z = 0$ y $\pi_2 \equiv 2x - y + \lambda z = 4$:
a) Calcula el valor del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$ para que los planos $\pi_1$ y $\pi_2$ sean perpendiculares.
b) Para el valor de $\lambda \in \mathbb{R}$ obtenido en el apartado anterior, obtén unas ecuaciones paramétricas de la recta $r$ paralela a $\pi_1$ y a $\pi_2$ que pasa por el punto $P(1,2,3)$.

**Propuesta B**

**1B**. Calcula el valor del parámetro $a \in \mathbb{R},\ a > 0$, para que se verifique la igualdad

$$\lim_{x\to 0} e^{\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x}} = \lim_{x\to 0}\left(\cos 2x\right)^{\frac{a}{x^2}}$$

**2B.** a) Esboza la región encerrada entre la parábola $f\left(x\right)=x^2-6x+9$ y la recta $g\left(x\right)=2x+2$.
b) Calcula el área de la región anterior.

**3B.** Un grupo de amigos se reúne cada sábado en la misma cafetería. Hace dos sábados tomaron 4 cafés, 6 refrescos y 2 infusiones, siendo el precio total 15,40 euros. El sábado pasado tomaron 5 cafés, 4 refrescos y 3 infusiones, siendo el precio total 14,40 euros. Hoy sábado han pedido 3 cafés, 8 refrescos y 1 infusión. Cuando piden la cuenta, el camarero les dice que el precio total es 18 euros.
Se pide:

a) Plantea un sistema de ecuaciones lineales con los datos del enunciado anterior.
b) Asumiendo que los dos sábados anteriores los precios totales estaban bien calculados y que los precios de los cafés, refrescos e infusiones no han cambiado, razona que hay un error en la cuenta de este sábado.

**4B**. Dadas las rectas

$$r \equiv \frac{x}{2}=y+1=\frac{z-1}{3}, \qquad s \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=\lambda \\ z=1-\lambda \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

a) Estudia su posición relativa.
b) Calcula la distancia entre $r$ y $s$.

# Junio de 2013

## PROPUESTA A

**1A.** a) Enuncia el Teorema de Bolzano.
b) Razona que las gráficas de las funciones $f\left(x\right)=3x^5-10x^4+10x^3+3$ y $g\left(x\right)=e^x$ se cortan en algún punto con coordenada de abscisa entre $-1$ y 0.
c) Calcula los puntos de inflexión de $f\left(x\right)$.

**2A.** Calcula el valor del parámetro $a\in\mathbb{R}$, $a>0$, para que el valor (en unidades de superficie) del área de la región determinada por la parábola $f\left(x\right)=-x^2+a^2$ y el eje de abscisas, coincida con la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f\left(x\right)$ en el punto de abscisa $x=-a$.

**3A.** a) Encuentra dos matrices $A$, $B$ cuadradas de orden 2 que cumplan:

- Su suma es la matriz identidad de orden 2.
- Al restar a la matriz $A$ la matriz $B$ se obtiene la traspuesta de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

b) Si $M$ es una matriz cuadrada de orden 2 tal que $|M|=7$, razona cuál es el valor de los determinantes $|M^2|$ y $|2M|$.

**4A.** a) Estudia la posición relativa del plano $\pi \equiv x - y - z = a$ y la recta

$$r \equiv \begin{cases} 2x + y + az = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$$

en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$.

b) Calcula la distancia entre $\pi$ y $r$ para cada valor de $a \in \mathbb{R}$.

## PROPUESTA B

**1B.** a) Calcula los valores de los parámetros $a, b \in \mathbb{R}$ para que la función

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx}{x + 1}$$

tenga como asíntota oblicua la recta $y = 2x + 3$.

b) Para los valores encontrados, escribe la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisas $x = 0$.

**2B.** Calcula las siguientes integrales:

$$\int \frac{2 \operatorname{sen} x \cos x}{1 + \operatorname{sen}^2 x}\, \mathrm{d}x, \qquad \int \frac{x^2 + x - 4}{x^3 - 4x}\, \mathrm{d}x$$

**3B.** a) Sabiendo que

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = 2$$

donde $a, b, c \in \mathbb{R}$, calcula los determinantes

$$\begin{vmatrix} a-1 & b-1 & c-1 \\ a^2-1 & b^2-1 & c^2-1 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} (a+1)^2 & (b+1)^2 & (c+1)^2 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

indicando las propiedades que usas en cada caso para justificar tu respuesta.

b) Razona que, puesto que $|A| = 2$, los parámetros $a, b, c \in \mathbb{R}$ deben ser distintos entre sí (no puede haber dos iguales).

**4B.** a) Estudia la posición relativa de las rectas

b) Calcula la distancia entre las rectas $r$ y $s$:

$$r \equiv \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + y - 2z = 1 \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \begin{cases} x - z = 0 \\ x + 2y - z = 12 \end{cases}$$

# Septiembre de 2013

## PROPUESTA A

**1A.** a) Calcula el valor de $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, para que la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - e^{-x}}{ax} & \text{si} \quad x < 0 \\ \left(\dfrac{2x+7}{2x+1}\right)^x & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

sea continua en $x = 0$.

b) Calcula el límite $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

**2A.** Calcula las siguientes integrales:

$$\int \frac{1 + x + \sqrt{x}}{x^2}\, \mathrm{d}x, \qquad \int \frac{e^x}{e^{2x} - 3e^x + 2}\, \mathrm{d}x$$

**Observación:** El cambio de variable $t = e^x$ puede ayudarte a calcular la segunda integral.

**3A.** a) Despeja $X$ en la ecuación matricial $XA - B = 2X$ , donde $A$, $B$ y $X$ son matrices cuadradas de orden 3.

b) Calcula $X$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

**4A.** a) Estudia la posición relativa de las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x - 2z = 1 \\ y - z = 2 \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - 2y + 2z = a \end{cases}$$

en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$ .

b) Encuentra el punto de corte de las rectas en el caso en que sean secantes.

## PROPUESTA B

**1B.** a) Interpretación geométrica de la derivada de una función en un punto.

b) Halla el punto de la gráfica de la función $f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$ donde la recta tangente tiene pendiente mínima.

**2B.** a) Esboza la región encerrada entre las gráficas de las funciones $f(x) = \dfrac{1}{x}$ y $g(x) = -2x + 3$

b) Calcula el área de la región anterior.

**3B.** a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $m \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x + y - 5z = -1 \\ 2x - y - 3z = 1 - m \\ x - 2y + 2z = m \end{cases}$$

b) Calcula la solución cuando el sistema sea compatible indeterminado.

**4B.** a) Dados los puntos $P(4, 2, 3)$ y $Q(2, 0, -5)$, da la ecuación implícita del plano $\pi$ de modo que el punto simétrico de $P$ respecto a $\pi$ es Q.

b) Calcula el valor del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$ para que el plano determinado por los puntos

$P$, $Q$ y $R(\lambda,1,0)$ pase por el origen de coordenadas.

# Reserva 1 de 2013

## PROPUESTA A

**1A.** a) Enuncia el Teorema de Rolle.

b) Razona que existe al menos un punto en el intervalo (1, 2) donde la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^5 + 3x^4 - 5x^3 - 15x^2 + 4x + 12$ tiene pendiente nula.

**2A.** Calcula el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, para que el área de la región comprendida entre las gráficas de las parábolas $f(x) = -x^2 + a^2$ y $g(x) = -4x^2 + 4a^2$ sea 32 unidades de superficie.

**3A.** a) Despeja $X$ en la ecuación matricial $AX = I_3 - 2BX$, donde $I_3$ es la matriz identidad de orden 3 y A, $B$ y $X$ son matrices cuadradas de orden 3.

b) Calcula $X$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**4A.** Dados los planos $\pi \equiv ax + 2y + z = 4,\ a \in \mathbb{R}$ y $\pi' \equiv 2x - 4y - 2z = b,\ b \in \mathbb{R}$:

a) Razona para que valores de $a, b \in \mathbb{R}$ son $\pi$ y $\pi'$ coincidentes.

b) Razona para que valores de $a, b \in \mathbb{R}$ son $\pi$ y $\pi'$ paralelos no coincidentes.

c) Razona para que valores de $a, b \in \mathbb{R}$ son $\pi$ y $\pi'$ perpendiculares.

## PROPUESTA B

**1B.** a) Calcula para que valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$ se verifica la igualdad

$$\lim_{x \to 0} \left(\cos(ax)\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-2}$$

b) Calcula el límite

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x}\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}\right)$$

**2B.** Calcula las siguientes integrales:

$$\int \frac{2\cos x}{1 + \operatorname{sen}^2 x}\, dx, \qquad \int \left(x^2 + 2x\right) \ln x \, dx$$

**3B.** Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ -4x - 2y + mz = 0, \quad m \in \mathbb{R} \\ 3x + y + 2z = 0 \end{cases}$$

a) ¿Existe algún valor del parámetro $m$ para el que el sistema sea incompatible?

b) Estudia para que valor del parámetro *m* el sistema tiene alguna solución distinta de la trivial $x = y = z = 0$.

c) Resuelve el sistema para todos los valores de $m \in \mathbb{R}$.

**4B.** Dados el punto $P(1,0,1)$ y la recta

$$r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

a) Da unas ecuaciones paramétricas de la recta 5 que corta perpendicularmente a r y pasa por el punto P.

b) Calcula el punto simétrico Q de P respecto a r.

# Reserva 2 de 2013

## PROPUESTA A

**1A.** Si la media aritmética de dos números reales positivos es 24, calcula el valor de dichos números para que el producto de uno de ellos por el cuadrado del otro sea máximo.

**2A.** Calcula las siguientes integrales:

$$\int \left( \frac{2\ln x}{x} + \ln x \right) dx, \qquad \int 3\sqrt{2x+1}\, dx$$

**3A.** a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $m \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} 2y - z = m \\ 3x - 2z = 11 \\ y + z = 6 \\ 2x + y - 4z = m \end{cases}$$

b) Calcula la solución cuando el sistema sea compatible determinado.

**4A.** Dado el plano $\pi \equiv x - z = 0$ y las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 \\ z = -1 - \lambda \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \qquad \text{y} \qquad s \equiv \begin{cases} x + y = 2 \\ 4y + 2z = 6 \end{cases}$$

a) Halla el ángulo que forman $\pi$ y $r$. Razona cuántos planos hay perpendiculares a $\pi$ que contengan la recta $r$.

b) Halla la posición relativa de $\pi$ y s. Razona cuantos planos hay perpendiculares a $\pi$ que contengan la recta s.

## PROPUESTA B

**1B.** a) Enuncia el Teorema del valor medio de Lagrange.

b) Calcula un punto del intervalo $\left[-2,2\right]$ en el que la recta tangente a la gráfica de la función $f\left(x\right)=x^2+3x+2$ sea paralela a la recta que pasa por los puntos ( $-2$ , 0) y (2,12).

**2B.** El área del recinto encerrado entre la gráfica de la parábola $f\left(x\right)=a\left(x^2-2x\right),\ a\in\mathbb{R},\ a>0$, y el eje de abscisas, es de 12 unidades de superficie. Calcula el valor de *a*.

**3B.** Evariste Galois, Niels Abel y Srinivasa Ramanujan fueron tres genios matemáticos que antes de sus prematuras muertes dejaron desarrollada una importante obra matemática. Calcula las edades que tenían cuando fallecieron, sabiendo que su suma es 78, que su media aritmética coincide con la edad de Abel, y que cuatro veces la edad de Ramanujan más dos veces la de Abel es nueve veces la edad de Galois.

**4B.** a) Determina el valor del parámetro $k\in\mathbb{R}$ para que la recta

$$r\equiv\begin{cases}x=1+\lambda\\ y=k-\lambda, \quad \lambda\in\mathbb{R}\\ z=\lambda\end{cases}$$

este contenida en el plano $\pi\equiv x+2y+z=7$.

b) Para el valor de $k$ obtenido en el apartado anterior, obtén la ecuación implícita de un plano $\pi'$ que corte perpendicularmente a $\pi$, de modo que la intersección de ambos planos sea $r$.

# Junio de 2014

## PROPUESTA A

**1A.** a) Calcula los valores de los parámetros $a,b\in\mathbb{R}$ para que la función

$$f\left(x\right)=\begin{cases}x^2-2x+a & \text{si} \quad x\le 0\\ x^2+be^x+3 & \text{si} \quad x>0\end{cases}$$

sea continua y derivable en $x=0$.

b) Para los valores encontrados, calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f\left(x\right)$ en el punto de abscisa $x=0$.

**2A.** Calcula la integral definida

$$\int_0^1\left(x^2+x+1\right)e^{-x}\ \mathrm{d}x$$

**3A.** a) Sabiendo que $A$ es una matriz cuadrada de orden 2 tal que $\left|A\right|=5$, calcula razonadamente el valor de los determinantes $\left|-A\right|,\ \left|A^{-1}\right|,\ \left|A^T\right|,\ \left|A^3\right|$

b) Sabiendo que

$$\begin{vmatrix}a & b & c\\ 1 & 1 & 1\\ 3 & 0 & 1\end{vmatrix}=2$$

calcula, usando las propiedades de los determinantes,

$$\begin{vmatrix} 3-a & -b & 1-c \\ 1+a & 1+b & 1+c \\ 3a & 3b & 3c \end{vmatrix} \qquad \text{y} \qquad \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2a & 2b & 2c \\ 0 & 30 & 0 & 10 \\ 1 & 4 & 4 & 4 \end{vmatrix}$$

**4A.** a) Halla $a \in \mathbb{R}$ para que las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x+2y-z=1 \\ -x+y-3z=2 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad s \equiv \begin{cases} x+y=0 \\ 3x+2y+z=a \end{cases}$$

se corten en un punto.

b) Para dicho valor de *a*, da la ecuación implícita de un plano $\pi$ que contenga a $r$ y $s$.

## PROPUESTA B

**1B.** a) Calcula los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)=1+x^2e^{-x}$.

b) Calcula las asíntotas de $f(x)$.

**2B.** Para cada $c>2$ definimos $A(c)$ como el área de la región encerrada entre la gráfica de

$$f(x)=\frac{1+x^2}{x^4}$$

el eje de abscisas, y las rectas $x = 1$ y $x = c$.

a) Calcula $A(c)$.

b) Calcula $\lim\limits_{c\to+\infty} A(c)$

**3B.** a) Se sabe que el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x-2y+3z=4 \\ 2x-y+z=8 \\ x-5y+az=4 \end{cases} \qquad a\in\mathbb{R}$$

es compatible indeterminado. Calcula $a$ y resuelve el sistema para dicho valor del parámetro.

b) Para el valor de $a$ encontrado, da una solución particular del sistema tal que $x = y$.

**4B.** Dados el plano $\pi \equiv x-y=4$ y la recta

$$r \equiv \begin{cases} x+z=1 \\ 2x+y+az=0 \end{cases} \qquad a\in\mathbb{R}$$

se pide:

a) Estudia si existe algún valor del parámetro $a$ para el que $r$ y $\pi$ sean paralelos.

b) Estudia si existe algún valor del parámetro $a$ para el que $r$ y $\pi$ se corten perpendicularmente.

c) Para $a = 1$, da la ecuación implícita de un plano $\pi'$ que contenga a $r$ y corte perpendicularmente a $\pi$.

# Septiembre de 2014

## PROPUESTA A

**1A.** a) Calcula los intervalos de concavidad y convexidad de la función

$$f(x)=\frac{x-1}{2x+2}$$

Estudia si tiene puntos de inflexión.
b) ¿En qué puntos de la gráfica de $f(x)$ la recta tangente es paralela a la recta $y=x-2$?

**2A.** a) Esboza la región encerrada entre las gráficas de las funciones $f(x)=\operatorname{sen} x,\ g(x)=-\operatorname{sen} x$ y las rectas $x=\frac{\pi}{2}$ y $x=\frac{3\pi}{2}$.
b) Calcula el área de la región anterior.

**3A.** a) Discute, en función del parámetro $m\in\mathbb{R}$, el rango de la matriz

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ m+1 & 3 & m-1 \\ m-1 & m+3 & -1 \end{pmatrix}$$

b) ¿Para qué valores del parámetro $m\in\mathbb{R}$ existe la matriz inversa de $A$?

**4A.** a) Estudia la posición relativa de las rectas

$$r\equiv x=-y=z \qquad \text{y} \qquad s\equiv x=y=z-2$$

b) Calcula la distancia entre $r$ y $s$.

## PROPUESTA B

**1B.** Para la función $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}$:

a) Estudia sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como sus extremos relativos.
b) Estudia si tiene asíntota oblicua cuando $x\to+\infty$.

**2B.** Calcula las integrales

$$\int\frac{e^x}{e^x-e^{-x}}\,dx \qquad \text{y} \qquad \int\frac{2}{4+x^2}\,dx$$

Nota: en la primera integral puede ayudarte hacer el cambio de variable $t=e^x$.

**3B.** Encuentra dos matrices $A,\ B$ cuadradas de orden 2 que sean solución del sistema matricial

$$\begin{cases} 2A+B=C^2 \\ A-B=C^{-1} \end{cases}$$

siendo

$$C=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

**4B.** a) Estudia, en función del valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$, la posición relativa de los planos

$$\pi_1 \equiv x + y - z = 3$$
$$\pi_2 \equiv x - y + az = -1$$
$$\pi_3 \equiv ax + y - z = 5$$

b) Calcula, en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$, la distancia entre los planos $\pi_1$ y $\pi_3$.

# Junio de 2015

## PROPUESTA A

**1A.** Dada la función $f(x) = e^{senx} + ax^2 + b$ con $a, b \in \mathbb{R}$:

a) Determina los parámetros $a, b \in \mathbb{R}$ sabiendo que la gráfica de $f(x)$ pasa por el punto $(0,2)$ y que en dicho punto tiene un extremo relativo.

b) Para los valores de los parámetros encontrados, estudia si dicho extremo relativo es un máximo o un mínimo.

**2A.** Dada la función

$$g(x) = \begin{cases} 2x+4 & \text{si} \quad -2 \le x < 0 \\ (2x-2)^2 & \text{si} \quad 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

a) Esboza la región encerrada entre la gráfica de $g(x)$ y el eje de abscisas.

b) Calcula el área de la región anterior.

**3A.** a) Despeja $X$ en la ecuación matricial $XA + B = X$, donde $A$, $B$ y $X$ son matrices cuadradas de orden 3.
b) Calcula $X$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

**4A.** a) Calcula la distancia del punto $P(-1,2,0)$ a la recta

$$r \equiv \begin{cases} -x + y + 2z = 0 \\ y + z = 1 \end{cases}$$

b) Calcula el punto simétrico de $P$ respecto de $r$.

## PROPUESTA B

**1B.** Calcula el dominio y las asíntotas de las siguientes funciones

$$f(x) = \frac{\sqrt{2x} - x}{x-2} \qquad \text{y} \qquad g(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4x + 4}$$

**2B.** Dada la función $f(x) = (x+1)e^{2x}$, se pide:

**a)** Calcula los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión de $f(x)$.

**b)** Encuentra una primitiva de la función $f(x)$ que pase por el origen de coordenadas.

**3B**. He pensado un número de tres cifras tal que la cifra de las decenas es la media aritmética de las otras dos. Además, si a dicho número se le resta el que resulta de invertir el orden de sus cifras, la diferencia es 198. Por último, las tres cifras de mi número suman 12.

a) Plantea un sistema de ecuaciones lineales que recoja la información anterior y clasifícalo. Para ello, puede serte útil observar que el número cuya cifra de las centenas es $x$, la de las decenas $y$, y la de las unidades $z$, puede expresarse como $100x+10y+z$.

b) Determina, si el problema tiene solución, el número de tres cifras que he pensado.

**4B**. Dados los puntos $A(1,\lambda+1,-1)$, $B(2,\lambda,0)$ y $C(\lambda+2,0,1)$, se pide:

a) Estudia si existe algún valor del parámetro $\lambda\in\mathbb{R}$ para el que $A$, $B$ y $C$ estén alineados.

b) Para $\lambda=-1$, da la ecuación implícita del plano $\pi$ que contiene a los puntos $A$, $B$ y $C$.

# Septiembre de 2015

## PROPUESTA A

**1A.** Calcula los siguientes límites:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{xe^{\operatorname{sen}x}} \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 0}(1+\tan x)^{\frac{1}{x+\operatorname{sen}x}}$$

Nota: $\tan x$ denota a la tangente de $x$.

**2A.** a) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)=x^2$ en el punto de abscisa $x=2$

b) Esboza la región encerrada entre la gráfica de $f(x)$, la recta calculada en el apartado a) y el eje de ordenadas.

c) Calcula el área de la región anterior.

**3A.** a) Enuncia el Teorema de Rouché-Fröbenius.

b) Razona que el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x+3y-3z=4 \\ 2x-y+z=1 \\ 3x+2y-az=5 \end{cases} \qquad a\in\mathbb{R}$$

no es compatible para ningún valor de $a\in\mathbb{R}$.

c) Resuelve el sistema en el caso en que sea compatible indeterminado.

**4A.** Dada la recta $r\equiv\begin{cases} 2x-y+z=3 \\ x-z=1 \end{cases}$

a) Da la ecuación del plano $\pi$ perpendicular a $r$ que pasa por el punto $P(2,1,1)$.

b) Halla el volumen del tetraedro cuyos vértices son el origen de coordenadas y los tres puntos que resultan al hacer la intersección de $\pi$ con los ejes coordenados.

**PROPUESTA B**

**1B.** Determina cómo dividir un segmento de 90 cm en dos trozos, de forma que la suma del área de semicírculo cuyo diámetro es uno de ellos y el área de un triángulo rectángulo que tiene como base el otro trozo y cuya altura es $\pi$ veces su base, sea mínima.

Nota: recuerda que el área de un círculo de radio $r$ es $\pi r^2$.

**2B.** Calcula las integrales

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}}\left(4x^3-\sqrt[4]{x}\right)\mathrm{d}x \qquad \text{y} \qquad \int x\ln x\,\mathrm{d}x$$

**3B.** a) Despeja $X$ en la ecuación matricial $AX-A=2A^2$, donde $A$ y $X$ son matrices cuadradas de orden 3.

b) Calcula $X$, siendo

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

c) Calcula los determinantes de las matrices $A^{101}$ y $A^{1000}$.

**4B.** Dados el plano $\pi\equiv x+ay+3z=2,\ a\in\mathbb{R}$, y la recta

$$r\equiv\begin{cases}x-2y+z=-1\\ 2x-y=0\end{cases}$$

a) Halla $a$ para que $\pi$ y $r$ se corten perpendicularmente.

b) Halla $a$ para que $\pi$ y $r$ sean paralelos.

# Junio de 2016

**PROPUESTA A**

**1A.** Dada la función $f(x)=x^3+3x^2+ax-6,\ a\in\mathbb{R}$, se pide:

a) Determinar el valor del parámetro $a\in\mathbb{R}$ para que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en su punto de inflexión sea $-3$.

b) Para el valor del parámetro encontrado, calcular los extremos relativos e intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

**2A.** Calcula la integral definida

$$\int_0^{\frac{\pi^2}{2}} \frac{\cos\sqrt{x}}{2}\,\mathrm{d}x$$

Nota: puede ayudarte hacer el cambio de variable $t=\sqrt{x}$ y a continuación aplicar integración por partes.

**3A.** a) Discute el sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $m \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x - y + mz = 0 \\ 4x - 3y + 2z = m \\ -mx + y - z = 1 - m \end{cases}$$

b) Calcula la solución cuando el sistema sea compatible indeterminado.

**4A.** Sea $r$ la recta determinada por el punto $P(1,0,1)$ y el vector $\vec{v} = (1,-1,0)$.

a) Calcula el punto de $r$ más cercano al punto $Q(0,0,1)$.

b) Calcula el punto simétrico de $Q$ respecto a $r$.

## PROPUESTA B

**1B.** a) Enuncia los teoremas de Bolzano y de Rolle.

b) Razona que la ecuación $3e^x + x^5 = 0$ tiene al menos una solución real.

c) Razona que, de hecho, dicha solución es única.

**2B.** a) Calcula el área de la región acotada por las gráficas de las parábolas $f(x) = x^2 - 4x + 3$ y $g(x) = -x^2 + 2x + 11$.

b) Calcula $c \in \mathbb{R}$ para que las rectas tangentes a las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ en el punto de abscisa $x = c$ tengan la misma pendiente.

**3B.** Sabiendo que

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ x & y & z \\ a & 2b & 3c \end{vmatrix} = 10$$

donde $x, y, z, a, b, c \in \mathbb{R}$, calcula los determinantes

$$\begin{vmatrix} 14 & 14 & 21 \\ x+4 & y+4 & z+6 \\ \frac{a}{5} & \frac{2b}{5} & \frac{3c}{5} \end{vmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} 0 & 3x & y & z \\ 0 & 3a & 2b & 3c \\ 0 & 6 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

indicando las propiedades que usas en cada caso para justificar tu respuesta.

**4B.** Dados los planos

$$\pi_1 \equiv ax + y + 2z = 2, \qquad \pi_2 \equiv x + y + z = 0 \qquad \text{y} \qquad \pi_3 \equiv x + ay + z = a$$

donde $a \in \mathbb{R}$, se pide:

a) Estudiar la posición relativa de los planos anteriores en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$.

b) Para el valor $a = 1$, calcular la distancia entre $\pi_2$ y $\pi_3$.

# Septiembre de 2016

## PROPUESTA A

**1A.** Se quiere construir un depósito de chapa abierto superiormente con forma de prisma recto de base cuadrada, de 100 m$^3$ de capacidad, lo más económico posible, sabiendo que:

- El coste de la chapa usada para los laterales es de 100 euros el metro cuadrado.
- El coste de la chapa usada para la base es de 200 euros el metro cuadrado.

**2A.** Dada la función

$$g(x)=(x+b)\cos x \ , \ b\in\mathbb{R}$$

a) Calcula la primitiva $G(x)$ de $g(x)$ que verifique $G(0)=1$.

b) Calcula el valor de $b\in\mathbb{R}$ sabiendo que

$$\lim_{x\to 0}\frac{G(x)-g'(x)}{x}=2$$

**3A.** Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 2 & -3\end{pmatrix} \text{ y } D=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

a) ¿Qué dimensión debe tener una matriz $X$ para poder efectuar el producto matricial $AXB$?

b) Despeja $X$ en la ecuación matricial $AXB+C=D$

c) Calcula la matriz $X$.

**4A.** Dadas las rectas

$$r\equiv 2-x=y-2=\frac{z}{3} \quad \text{y} \quad s\equiv\begin{cases}x=-1+2\lambda\\ y=-1+\lambda\\ z=c-3\lambda\end{cases} \text{ con } \lambda\in\mathbb{R}$$

donde $c\in\mathbb{R}$, se pide:

a) Estudiar la posición relativa de $r$ y $s$ en función del parámetro $c\in\mathbb{R}$.

b) Hallar el punto de intersección de $r$ y $s$ cuando dichas rectas sean secantes.

## PROPUESTA B

**1B.** Dada la función

$$f(x)=2xe^{1-x}$$

se pide:

a) Estudiar si tiene asíntotas horizontales.

b) Calcular sus puntos de inflexión.

**2B.** Dadas las funciones $f(x)=\dfrac{2}{x}$ y $g(x)=3-x$, se pide:

a) Esbozar la región encerrada entre las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$.

b) Calcular el área de la región anterior.

**3B.** a) Enuncia el Teorema de Rouché-Fröbenius.

b) Razona que un sistema de tres ecuaciones lineales con cuatro incógnitas no puedes ser compatible determinado.

c) Determina para qué valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$ el sistema

$$\begin{cases} 2x + y - z + 2t = 2 \\ 5x + y + 2z = 1 \\ x + 8y - 5z + 6t = a \end{cases}$$

es incompatible.

**4B.** Dados los planos

$$\pi \equiv 2x - 3y + z = 0 \quad \text{y} \quad \pi' \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda + \mu \\ y = \lambda - \mu \\ z = 2 + 2\lambda + \mu \end{cases} \quad \text{con } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

y el punto $P(2,-3,0)$, se pide:

a) Hallar la ecuación continua de la recta $r$ que pasa por $P$ y es paralela a la recta $s$ determinada por la intersección de $\pi$ y $\pi'$.

b) Calcular el ángulo entre los planos $\pi$ y $\pi'$.

# Junio de 2017

## PROPUESTA A

**1A.** Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + a & \text{si} \quad x \le 2 \\ -x^2 + bx - 9 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

a) Calcula razonadamente los parámetros $a$ y $b$ para que $f(x)$ sea derivable en todo $\mathbb{R}$.

b) Enuncia el teorema de Rolle y comprueba si, para los valores hallados en el apartado anterior, la función $f(x)$ verifica las hipótesis del teorema en el intervalo $[-2,6]$.

**2A.** Con una chapa metálica de $8 \times 5$ metros se desea construir, cortando cuadrados en las esquinas, un cajón sin tapa de volumen máximo. Halla razonadamente las dimensiones de dicho cajón.

**3A.** a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} ax - y + z = a - 4 \\ 2x + y - az = a - 1 \\ y - z = -3 \end{cases}$$

b) Resuelve razonadamente para el valor $a = -1$.

**4A.** Dado el punto $P(2,0,-1)$ y las rectas

$$r \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{0} \quad \text{y} \quad s \equiv \begin{cases} x - y + 2z + 4 = 0 \\ x + z + 1 = 0 \end{cases}$$

a) Determina razonadamente la posición relativa de las rectas $r$ y $s$.

b) Encuentra razonadamente la ecuación general del plano que pasando por $P$ es paralelo a $r$ y a $s$.

**5A.** a) Los operarios A, B y C producen, respectivamente, el 50 %, el 30 % y el 20 % de las resistencias que se utilizan en un laboratorio de electrónica. Resultan defectuosas el 6 % de las resistencias producidas por A, el 5 % de las producidas por B y el 3 % de las producidas por C. Se selecciona al azar una resistencia:

a.1) Calcula razonadamente la probabilidad de que sea defectuosa.

a.2) Si es defectuosa, calcula razonadamente la probabilidad de que proceda del operario A.

b) Las resistencias se empaquetan al azar en cajas de 5 unidades. Calcula razonadamente la probabilidad de:

b.1) Que en una caja haya exactamente tres resistencias fabricadas por B.

b.2) Que en una caja haya al menos dos fabricadas por B.

| n | k \ p | 0,01 | 0,05 | 0,10 | 0,15 | 0,20 | 0,25 | 0,30 | 0,33 | 0,35 | 0,40 | 0,45 | 0,49 | 0,50 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 0 | 0,9510 | 0,7738 | 0,5905 | 0,4437 | 0,3277 | 0,2373 | 0,1681 | 0,1317 | 0,1160 | 0,0778 | 0,0503 | 0,0345 | 0,0313 |
| | 1 | 0,0480 | 0,2036 | 0,3281 | 0,3915 | 0,4096 | 0,3955 | 0,3602 | 0,3292 | 0,3124 | 0,2592 | 0,2059 | 0,1657 | 0,1563 |
| | 2 | 0,0010 | 0,0214 | 0,0729 | 0,1382 | 0,2048 | 0,2637 | 0,3087 | 0,3292 | 0,3364 | 0,3456 | 0,3369 | 0,3185 | 0,3125 |
| | 3 | 0,0000 | 0,0011 | 0,0081 | 0,0244 | 0,0512 | 0,0879 | 0,1323 | 0,1646 | 0,1811 | 0,2304 | 0,2757 | 0,3060 | 0,3125 |
| | 4 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0005 | 0,0022 | 0,0064 | 0,0146 | 0,0284 | 0,0412 | 0,0488 | 0,0768 | 0,1128 | 0,1470 | 0,1563 |
| | 5 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0001 | 0,0003 | 0,0010 | 0,0024 | 0,0041 | 0,0053 | 0,0102 | 0,0185 | 0,0282 | 0,0313 |

## PROPUESTA B

**1B.** Calcula razonadamente los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3+3x^2-4}{x^3+5x^2+8x+4}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\ln(x+1)}{2-2\cos x}$

Nota: $\ln$ denota el logaritmo neperiano.

**2B.** Dadas las funciones $f(x)=-x^2$ y $g(x)=x^2-2x-4$:

a) Calcula razonadamente el área del recinto cerrado limitado por sus gráficas.

b) Encuentra razonadamente la ecuación de la recta normal a la gráfica de $g(x)$ en el punto de abscisa $x=-3$.

**3B.** Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } C=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a) ¿Tiene inversa la matriz $2I_3+B$? Razona la respuesta.

b) Calcula razonadamente la matriz $X$ que verifica que $2X+C=A-XB$.

**4B.** a) Encuentra razonadamente la ecuación de la recta, en su forma general o implícita, que contiene a los puntos $P(0,1,-2)$ y $Q(4,-3,0)$.

b) Encuentra razonadamente un punto que equidiste de $P$ y $Q$, y que pertenezca a la recta:

$$r \equiv \begin{cases} x = 2+\lambda \\ y = -\lambda \\ z = -5 \end{cases} \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

**5B.** a) En mi casa dispongo de dos estanterías A y B. En A tengo 20 novelas, 10 ensayos y 10 libros de matemáticas y en la B tengo 12 novelas y 8 libros de matemáticas. Elijo una estantería al azar y de ella, también al azar, un libro. Calcula razonadamente la probabilidad de que:

a1) El libro elegido sea de matemáticas.

a2) Si el libro elegido resultó ser de matemáticas, que fuera de la estantería B.

b) El tiempo de espera en una parada de autobús se distribuye según una distribución normal de media 15 minutos y desviación típica 5 minutos.

b1) Calcula razonadamente la probabilidad de esperar menos de 13 minutos.

b2) ¿Cuántos minutos de espera son superados por el 33 % de los usuarios? Razona la respuesta.

| a | 0,00 | 0,01 | 0,02 | 0,03 | 0,04 | 0,05 | 0,06 | 0,07 | 0,08 | 0,09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,0 | 0,5000 | 0,5040 | 0,5080 | 0,5120 | 0,5160 | 0,5199 | 0,5239 | 0,5279 | 0,5319 | 0,5359 |
| 0,1 | 0,5398 | 0,5438 | 0,5478 | 0,5517 | 0,5557 | 0,5596 | 0,5636 | 0,5675 | 0,5714 | 0,5753 |
| 0,2 | 0,5793 | 0,5832 | 0,5871 | 0,5910 | 0,5948 | 0,5987 | 0,6026 | 0,6064 | 0,6103 | 0,6141 |
| 0,3 | 0,6179 | 0,6217 | 0,6255 | 0,6293 | 0,6331 | 0,6368 | 0,6406 | 0,6443 | 0,6480 | 0,6517 |
| 0,4 | 0,6554 | 0,6591 | 0,6628 | 0,6664 | 0,6700 | 0,6736 | 0,6772 | 0,6808 | 0,6844 | 0,6879 |

# Septiembre de 2017

## PROPUESTA A

**1A.** a) Calcula razonadamente el área de la región determinada por la curva $f(x) = (x-1)(x+2)$, las rectas $x=-3$, $x=2$ y el eje de abscisas. Esboza dicha región.

b) Encuentra razonadamente la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x=2$.

**2A.** a) Determina el valor de $k \in \mathbb{R}$ para que la siguiente función sea continua en $x=0$:

$$f(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{x+1}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}} & \text{si} \quad x<0 \\ 6x+k & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

b) Enuncia el teorema de Bolzano y comprueba si la ecuación $\cos x = 2-x$ tiene alguna solución real en el intervalo $[0, 2\pi]$.

**3A.** a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} ax & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & ay & + & z & = & 0 \\ x & + & y & + & az & = & 0 \end{array}\right\}$$

b) Resuélvelo razonadamente para el valor $a=0$.

**4A.** Dados los planos $\alpha \equiv -x+2y+z+2=0$ y $\beta \equiv -2y+z=0$:

a) Calcula razonadamente el volumen del tetraedro formado por el origen de coordenadas y los puntos de intersección del plano $\alpha$ con los tres ejes coordenados.

b) Encuentra razonadamente la ecuación general o implícita de la recta paralela a los planos $\alpha$ y $\beta$ que pasa por el punto $P(0,-1,3)$.

**5A.** a) En una empresa hay tres robots A, B y C dedicados a soldar componentes electrónicos en placas de circuito impreso. El 25 % de los componentes son soldados por el robot A, el 20 % por el B y el 55 % por el C. Se sabe que la probabilidad de que una placa tenga un defecto de soldadura es de 0,03 si ha sido soldado por el robot A, 0,04 por el robot B y 0,02 por el robot C.

a1) Elegida una placa al azar, calcula razonadamente la probabilidad de que tenga un defecto de soldadura.

a2) Se escoge al azar una placa y resulta tener un defecto de soldadura. Calcula razonadamente la probabilidad de que haya sido soldada por el robot C.

b) Lanzamos cinco veces una moneda trucada. La probabilidad de obtener cara es 0,6. Calcula razonadamente la probabilidad de:

b1) Obtener exactamente tres caras.

b2) Obtener más de tres caras.

| n | k \ p | 0,01 | 0,05 | 0,10 | 0,15 | 0,20 | 0,25 | 0,30 | 0,33 | 0,35 | 0,40 | 0,45 | 0,49 | 0,50 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 0 | 0,9510 | 0,7738 | 0,5905 | 0,4437 | 0,3277 | 0,2373 | 0,1681 | 0,1317 | 0,1160 | 0,0778 | 0,0503 | 0,0345 | 0,0313 |
| | 1 | 0,0480 | 0,2036 | 0,3281 | 0,3915 | 0,4096 | 0,3955 | 0,3602 | 0,3292 | 0,3124 | 0,2592 | 0,2059 | 0,1657 | 0,1563 |
| | 2 | 0,0010 | 0,0214 | 0,0729 | 0,1382 | 0,2048 | 0,2637 | 0,3087 | 0,3292 | 0,3364 | 0,3456 | 0,3369 | 0,3185 | 0,3125 |
| | 3 | 0,0000 | 0,0011 | 0,0081 | 0,0244 | 0,0512 | 0,0879 | 0,1323 | 0,1646 | 0,1811 | 0,2304 | 0,2757 | 0,3060 | 0,3125 |
| | 4 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0005 | 0,0022 | 0,0064 | 0,0146 | 0,0284 | 0,0412 | 0,0488 | 0,0768 | 0,1128 | 0,1470 | 0,1563 |
| | 5 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0001 | 0,0003 | 0,0010 | 0,0024 | 0,0041 | 0,0053 | 0,0102 | 0,0185 | 0,0282 | 0,0313 |

## PROPUESTA B

**1B.** Halla razonadamente las dimensiones más económicas de una piscina de 32 m$^3$ con un fondo cuadrado, de manera que la superficie de sus paredes y el suelo necesiten la cantidad mínima de material.

**2B.** Calcula razonadamente las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int \frac{x^3+2x^2+x-10}{x^2+x-2}\,dx$ b) $\displaystyle\int x^2 \ln x\,dx$

Nota: $\ln$ denota el logaritmo neperiano

**3B.** Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calcula razonadamente $A^{-1}$.

b) Calcula razonadamente la matriz $X$ que verifica que $AX+B=C^2$.

**4B.** a) Halla razonadamente el valor de $a\in\mathbb{R}$ para que el plano $\alpha \equiv x-y-az+5=0$ sea paralelo a la recta

$$r \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y}{-5} = \frac{z}{2}$$

b) Calcula razonadamente la distancia del punto $P(1,2,3)$ a la recta $r \equiv \frac{x-3}{2} = y-1 = z$.

**5B.** a) De una urna que contiene tres bolas blancas y dos bolas rojas extraemos, sucesivamente y sin reemplazamiento, dos bolas. Calcula razonadamente la probabilidad de:

a1) Que la segunda bola extraída sea blanca.

a2) Si la segunda bola extraída ha sido blanca, que la primera fuera roja.

b) El tiempo de duración de las llamadas telefónicas a través de cierta centralita se distribuye según una distribución normal de media 5 minutos y varianza 4. Calcula razonadamente:

b1) La probabilidad de que una llamada dure menos de 4,5 minutos.

b2) El tiempo de duración que no es superado por el 33 % de las llamadas.

| a | 0,00 | 0,01 | 0,02 | 0,03 | 0,04 | 0,05 | 0,06 | 0,07 | 0,08 | 0,09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,0 | 0,5000 | 0,5040 | 0,5080 | 0,5120 | 0,5160 | 0,5199 | 0,5239 | 0,5279 | 0,5319 | 0,5359 |
| 0,1 | 0,5398 | 0,5438 | 0,5478 | 0,5517 | 0,5557 | 0,5596 | 0,5636 | 0,5675 | 0,5714 | 0,5753 |
| 0,2 | 0,5793 | 0,5832 | 0,5871 | 0,5910 | 0,5948 | 0,5987 | 0,6026 | 0,6064 | 0,6103 | 0,6141 |
| 0,3 | 0,6179 | 0,6217 | 0,6255 | 0,6293 | 0,6331 | 0,6368 | 0,6406 | 0,6443 | 0,6480 | 0,6517 |
| 0,4 | 0,6554 | 0,6591 | 0,6628 | 0,6664 | 0,6700 | 0,6736 | 0,6772 | 0,6808 | 0,6844 | 0,6879 |

# Junio de 2018

## PROPUESTA A

**1A.** a) Enuncia el teorema de Bolzano y justifica razonadamente que la gráfica de la función $f(x) = x^{15} + x + 1$ corta al eje $OX$ al menos una vez en el intervalo $[-1,1]$.

b) Calcula razonadamente el número exacto de puntos de corte con el eje $OX$ cuando $x$ recorre toda la recta real.

**2A.** Calcula razonadamente las siguientes integrales:

a) $\int_0^{\pi} (x^2 - 1)\cos x \, dx$ b) $\int \frac{e^x}{e^{2x} + e^x - 2} \, dx$

**Nota:** En la integral b) puede ayudarte hacer el cambio de variable $e^x = t$.

**3A.** a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + 3y - az = 4 \\ x + ay + z = 2 \\ x + 4y - 5z = 6 \end{cases}$$

b) Resuélvelo razonadamente para el valor $a = 2$.

**4A.** Dado el plano $\alpha \equiv 4x + 2y + 4z - 15 = 0$ y el punto $A(2,-3,1)$:

a) Calcula la distancia del punto $A$ al plano $\alpha$.

b) Calcula razonadamente el lugar geométrico de los puntos del espacio cuya distancia al plano $\alpha$ sea igual a la distancia del punto $A$ al plano $\alpha$.

**5A.** a) Una planta industrial tiene tres máquinas. La máquina A produce 500 condensadores diarios, con un 3 % de defectuosos, la máquina B produce 700 con un 4 % de defectuosos y la C produce 800 con un 2 % de defectuosos. Al final del día se elige un condensador al azar.

a1) Calcula razonadamente la probabilidad de que sea defectuoso.

a2) Si es defectuoso, calcula razonadamente la probabilidad de que haya sido producido por la máquina A.

b) Lanzamos un dado perfecto cinco veces. Sea $X$ la variable "Número de múltiplos de tres que pueden salir".

b1) Calcula razonadamente la media y la desviación típica de la variable $X$.

b2) Calcula razonadamente la probabilidad de obtener cuatro o más múltiplos de tres.

| n | k \ p | 0,01 | 0,05 | 0,10 | 0,15 | 0,20 | 0,25 | 0,30 | 0,33 | 0,35 | 0,40 | 0,45 | 0,49 | 0,50 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 0 | 0,9510 | 0,7738 | 0,5905 | 0,4437 | 0,3277 | 0,2373 | 0,1681 | 0,1317 | 0,1160 | 0,0778 | 0,0503 | 0,0345 | 0,0313 |
| | 1 | 0,0480 | 0,2036 | 0,3281 | 0,3915 | 0,4096 | 0,3955 | 0,3602 | 0,3292 | 0,3124 | 0,2592 | 0,2059 | 0,1657 | 0,1563 |
| | 2 | 0,0010 | 0,0214 | 0,0729 | 0,1382 | 0,2048 | 0,2637 | 0,3087 | 0,3292 | 0,3364 | 0,3456 | 0,3369 | 0,3185 | 0,3125 |
| | 3 | 0,0000 | 0,0011 | 0,0081 | 0,0244 | 0,0512 | 0,0879 | 0,1323 | 0,1646 | 0,1811 | 0,2304 | 0,2757 | 0,3060 | 0,3125 |
| | 4 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0005 | 0,0022 | 0,0064 | 0,0146 | 0,0284 | 0,0412 | 0,0488 | 0,0768 | 0,1128 | 0,1470 | 0,1563 |
| | 5 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0001 | 0,0003 | 0,0010 | 0,0024 | 0,0041 | 0,0053 | 0,0102 | 0,0185 | 0,0282 | 0,0313 |

## PROPUESTA B

**1B.** a) Prueba que cualquiera que sea la constante $a$, la función $f(x)=x^3-5x^2+7x+a$ cumple las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[1,3]$.

b) Calcula razonadamente un punto del intervalo abierto $(1,3)$ cuya existencia asegura el teorema de Rolle.

c) Calcula razonadamente los puntos de la gráfica $f(x)=x^3-5x^2+7x$ donde la recta tangente tenga la misma pendiente que la recta $y=4x+2$.

**2B.** Dadas las funciones $f(x)=2xe^{-x}$ y $g(x)=x^2e^{-x}$, calcula razonadamente el área del recinto cerrado limitado por las gráficas de las funciones.

**3B.** a) Encuentra los valores del parámetro $a\in\mathbb{R}$ para que la siguiente matriz tenga inversa:

$$A=\begin{pmatrix} a-1 & 1 & -1 \\ 0 & a-2 & 1 \\ a & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

b) Para $a=2$ calcula razonadamente $A^{-1}$ y comprueba el resultado.

c) Para $a=0$ calcula razonadamente el valor de los determinantes $|A^{-1}|$ y $|2A|$.

**4B.** Dados los vectores $\vec{u}=(0,1,1)$, $\vec{v}=(1,1,-1)$ y $\vec{w}=(2,0,3)$:

a) Determina el valor de $\lambda\in\mathbb{R}$ tal que el vector $\vec{u}-\lambda\vec{v}$ sea perpendicular a $\vec{w}$.

b) ¿Son linealmente dependientes los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$?

c) Encuentra razonadamente las ecuaciones implícitas o cartesianas de la recta que pase por el punto $P(2,0,2)$ y que sea perpendicular simultáneamente a los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

**5B.** a) El 60 % del censo de una ciudad son mujeres. Las preferencias de las mujeres por los tres partidos que se presentan so: el 30 % vota a A, el 50 % vota a B y el resto a C; mientras que entre los hombres las preferencias son: el 10 % vota a A, el 60 % a B y el recto a C. Elegida al azar una persona del censo, calcula razonadamente la probabilidad de:

a1) Ser hombre y votante de C.

a2) Si resultó ser votante de B, que sea mujer.

b) Las notas que se han obtenido por 1000 opositores han seguido una distribución normal de media 4,05 y desviación típica 2,5.

Bb1) ¿Cuántos opositores han superado el 5? Razona la respuesta.

b2) Si tenemos que adjudicar 330 plazas, calcula razonadamente la nota de corte.

| a | 0,00 | 0,01 | 0,02 | 0,03 | 0,04 | 0,05 | 0,06 | 0,07 | 0,08 | 0,09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **0,0** | 0,5000 | 0,5040 | 0,5080 | 0,5120 | 0,5160 | 0,5199 | 0,5239 | 0,5279 | 0,5319 | 0,5359 |
| **0,1** | 0,5398 | 0,5438 | 0,5478 | 0,5517 | 0,5557 | 0,5596 | 0,5636 | 0,5675 | 0,5714 | 0,5753 |
| **0,2** | 0,5793 | 0,5832 | 0,5871 | 0,5910 | 0,5948 | 0,5987 | 0,6026 | 0,6064 | 0,6103 | 0,6141 |
| **0,3** | 0,6179 | 0,6217 | 0,6255 | 0,6293 | 0,6331 | 0,6368 | 0,6406 | 0,6443 | 0,6480 | 0,6517 |
| **0,4** | 0,6554 | 0,6591 | 0,6628 | 0,6664 | 0,6700 | 0,6736 | 0,6772 | 0,6808 | 0,6844 | 0,6879 |

# Julio de 2018

## PROPUESTA A

**1A.** Después de la administración vía oral de un fármaco, la concentración de este en sangre sigue el modelo: $C(t)=at^2e^{-bt}$, donde $t\in[0,+\infty)$ es el tiempo en horas transcurridas desde la administración y $a,b\in\mathbb{R}^+$.

a) Determina los valores de $a$ y $b$ para que el modelo de la concentración tenga un extremo relativo en el punto $(2,8e^{-2})$.

b) Según el modelo anterior, ¿a qué valor tiende la concentración de este fármaco a largo plazo? Interpreta el resultado. **Nota:** a largo plazo se entiende como que $t\to+\infty$.

**2A.** Dada la función

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+a}{x-1} & \text{si} \quad x<0\\ bx-1 & \text{si} \quad x\geq 0\end{cases}$$

**a)** Calcula razonadamente los parámetros $a$ y $b$ para que $f(x)$ sea derivable en todo $\mathbb{R}$.

**b)** Calcula razonadamente el parámetro $b$ para que $\int_1^2 f(x)\,dx=4$.

**3A.** a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a\in\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x - y - z = 1 \\ x + 2y + z = -4 \\ x - 4y - 3z = a^2 - 3 \end{cases}$$

b) Resuélvelo razonadamente para el valor $a = -3$.

**4A.** Dados los puntos $A(-1,3,0)$, $B(2,0,-1)$ y la recta $r$ intersección de los planos $\alpha \equiv x - 2y - 6 = 0$ y $\beta \equiv 2y + z = 0$.

a) Calcula la distancia del punto $A$ a la recta $r$.

b) Encuentra razonadamente el punto de la recta $r$ cuya distancia al punto $A$ sea mínima.

c) Encuentra razonadamente la ecuación general del plano que pasando por $A$ y $B$ sea paralelo a la recta $r$.

**5A.** a) En una tienda de lámparas tienen tres proveedores *A*, *B* y *C*. A suministra el 20 %, *B* el 10% y *C* el resto. De las lámparas de *A* salen defectuosas el 5 %, de las de *B* el 4 % y de las de *C* el 2 %. Elegida una lámpara al azar de la tienda, calcula razonadamente la probabilidad de:

a1) No salgan defectuosas.

a2) Si resultó defectuosa, que fuera suministrada por *B*.

b) Una parte de un examen consta de cinco peguntas tipo test. Se aprueba dicha parte si contestas correctamente al menos tres preguntas. Calcula razonadamente la probabilidad de aprobar dicha parte, contestando al azar, cuando:

b1) Cada respuesta tiene dos ítems, solamente uno verdadero.

b2) Cada respuesta tiene cuatro ítems, solamente uno verdadero.

| n | k \ p | 0,01 | 0,05 | 0,10 | 0,15 | 0,20 | 0,25 | 0,30 | 0,33 | 0,35 | 0,40 | 0,45 | 0,49 | 0,50 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 0 | 0,9510 | 0,7738 | 0,5905 | 0,4437 | 0,3277 | 0,2373 | 0,1681 | 0,1317 | 0,1160 | 0,0778 | 0,0503 | 0,0345 | 0,0313 |
| | 1 | 0,0480 | 0,2036 | 0,3281 | 0,3915 | 0,4096 | 0,3955 | 0,3602 | 0,3292 | 0,3124 | 0,2592 | 0,2059 | 0,1657 | 0,1563 |
| | 2 | 0,0010 | 0,0214 | 0,0729 | 0,1382 | 0,2048 | 0,2637 | 0,3087 | 0,3292 | 0,3364 | 0,3456 | 0,3369 | 0,3185 | 0,3125 |
| | 3 | 0,0000 | 0,0011 | 0,0081 | 0,0244 | 0,0512 | 0,0879 | 0,1323 | 0,1646 | 0,1811 | 0,2304 | 0,2757 | 0,3060 | 0,3125 |
| | 4 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0005 | 0,0022 | 0,0064 | 0,0146 | 0,0284 | 0,0412 | 0,0488 | 0,0768 | 0,1128 | 0,1470 | 0,1563 |
| | 5 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0001 | 0,0003 | 0,0010 | 0,0024 | 0,0041 | 0,0053 | 0,0102 | 0,0185 | 0,0282 | 0,0313 |

## PROPUESTA B

**1B.** Determina razonadamente el punto $(x, y)$ de la parábola $y = x^2 + 1$ en el que la suma de sus coordenadas alcanza su mínimo valor.

b) Encuentra razonadamente la ecuación de la recta normal a la gráfica de la parábola dada en el punto de abscisa $x = -\frac{1}{2}$.

**2B.** Calcula razonadamente las siguientes integrales:

**a)** $\int \frac{2x^3 - x^2 + 2}{x^2 - x}\,dx$ **b)** $\int_1^2 (2x-3)e^{x-1}\,dx$

**3B.** Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Halla razonadamente dos parámetros $a$ y $b$ tales que $A^2 = aA + bI$.

b) Calcula razonadamente todas las matrices $X$ que verifican que $(A-X)(A+X)=A^2-X^2$.

**4B.** Dados los puntos $A(-1,2,0)$, $B(1,0,-4)$ y la recta

$$r\equiv\begin{cases}x&=&1&-&\lambda\\y&=&&&\lambda\\z&=&3&+&\lambda\end{cases}$$

a) Calcula razonadamente un punto $C$ de la recta $r$ que forme con $A$ y $B$ un triángulo isósceles con el lado desigual en $AB$.
b) Encuentra razonadamente las ecuaciones paramétricas de la recta perpendicular a la recta $r$ y al vector $\overrightarrow{AB}$ y que pase por el punto $A$.

**5B.** a) En una clase el 80 % aprueba la asignatura de Biología, el 70 % aprueba la asignatura de Matemáticas y el 60 % aprueba Biología y Matemáticas.

a1) Si se elige un estudiante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que apruebe alguna de las asignaturas?

a2) Si se elige un estudiante y ha aprobado Biología, ¿cuál es la probabilidad de que también haya aprobado Matemáticas?

b) Un dispensador de cierto refresco está regulado de manera que cada vez descargue 25 cl de media. Si la cantidad de líquido dispensado sigue una distribución normal de varianza 4:

b1) Calcula razonadamente la probabilidad de que descargue entre 22 y 28 cl. (0,75 puntos)

b2) Calcula razonadamente la capacidad mínima de los vasos que se usen, redondeada a cl, para que la probabilidad de que se derrame el líquido sea inferior al 2,5 %.

| a | 0,00 | 0,01 | 0,02 | 0,03 | 0,04 | 0,05 | 0,06 | 0,07 | 0,08 | 0,09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1,5 | 0,9332 | 0,9345 | 0,9357 | 0,9370 | 0,9382 | 0,9394 | 0,9406 | 0,9418 | 0,9429 | 0,9441 |
| 1,6 | 0,9452 | 0,9463 | 0,9474 | 0,9484 | 0,9495 | 0,9505 | 0,9515 | 0,9525 | 0,9535 | 0,9545 |
| 1,7 | 0,9554 | 0,9564 | 0,9573 | 0,9582 | 0,9591 | 0,9599 | 0,9608 | 0,9616 | 0,9625 | 0,9633 |
| 1,8 | 0,9641 | 0,9649 | 0,9656 | 0,9664 | 0,9671 | 0,9678 | 0,9686 | 0,9693 | 0,9699 | 0,9706 |
| 1,9 | 0,9713 | 0,9719 | 0,9726 | 0,9732 | 0,9738 | 0,9744 | 0,9750 | 0,9756 | 0,9761 | 0,9767 |

# Junio de 2019

## PROPUESTA A

**1A.** a) Determina el valor de $a$ y de $b$ para que la función $f(x)$ sea derivable en todo $\mathbb{R}$

$$f(x)=\begin{cases}ax^2+bx+2 & \text{si} \quad x\le 1\\ a\sqrt{x}-\dfrac{b}{x^2} & \text{si} \quad x>1\end{cases}$$

b) Comprueba si la función $f(x)=x^2-4$ verifica las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[-3,3]$.

**2A.** a) Calcula razonadamente el área de los recintos limitados por la función $g(x)=-x^2+2x+3$, la recta $x=-2$ y el eje de abscisas.

b) Encuentra razonadamente la ecuación de la recta normal a la gráfica de la función $g(x)$ en el punto de abscisa $x = 4$.

**3A.** a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} ax + 2y = a^2 \\ -x + y + z = 5 \\ x - ay - z = -(4+a) \end{cases}$$

b) Resuélvelo razonadamente para el valor de $a = 1$.

**4A.** Dados los puntos $A(1,2,0)$, $B(0,-1,2)$, $C(2,-1,3)$ y $D(1,0,1)$:

a) Encuentra razonadamente la ecuación general del plano que contiene a la recta que por $A$ y $B$ y es paralelo a la recta que pasa por $C$ y $D$.

b) Calcula razonadamente el volumen del tetraedro cuyos vértices son los puntos $A, B, C$ y $D$.

**5A.** a) Una fábrica A produce el 30 % de los tractores que se demandan en una Comunidad Autónoma, una fábrica B produce el 20 % y la fábrica C el resto. El controlador de calidad sabe que son defectuosos el 4 % de los tractores fabricados por A, el 10 % de los fabricados por B y el 2 % de los fabricados por C.

Elegido un tractor al azar, calcula razonadamente la probabilidad de:

a1) No salga defectuoso.

a2) Si resultó defectuoso, que no fuera fabricado por C.

b) En una clase hay 16 chicas y 4 chicos. Cada día elijo a un estudiante al azar para que salga a la pizarra. Calcula razonadamente la probabilidad de que los cinco días laborables de la semana salgan a la pizarra:

b1) Tres chicas.

b2) Al menos tres chicos.

| n | k \ p | 0,01 | 0,05 | 0,10 | 0,15 | 0,20 | 0,25 | 0,30 | 0,33 | 0,35 | 0,40 | 0,45 | 0,49 | 0,50 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 0 | 0,9510 | 0,7738 | 0,5905 | 0,4437 | 0,3277 | 0,2373 | 0,1681 | 0,1317 | 0,1160 | 0,0778 | 0,0503 | 0,0345 | 0,0313 |
| | 1 | 0,0480 | 0,2036 | 0,3281 | 0,3915 | 0,4096 | 0,3955 | 0,3602 | 0,3292 | 0,3124 | 0,2592 | 0,2059 | 0,1657 | 0,1563 |
| | 2 | 0,0010 | 0,0214 | 0,0729 | 0,1382 | 0,2048 | 0,2637 | 0,3087 | 0,3292 | 0,3364 | 0,3456 | 0,3369 | 0,3185 | 0,3125 |
| | 3 | 0,0000 | 0,0011 | 0,0081 | 0,0244 | 0,0512 | 0,0879 | 0,1323 | 0,1646 | 0,1811 | 0,2304 | 0,2757 | 0,3060 | 0,3125 |
| | 4 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0005 | 0,0022 | 0,0064 | 0,0146 | 0,0284 | 0,0412 | 0,0488 | 0,0768 | 0,1128 | 0,1470 | 0,1563 |
| | 5 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0001 | 0,0003 | 0,0010 | 0,0024 | 0,0041 | 0,0053 | 0,0102 | 0,0185 | 0,0282 | 0,0313 |

## PROPUESTA B

**1B.** Calcula razonadamente los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to 1} \left( \dfrac{2e^{x-1}}{x+1} \right)^{\frac{x}{x-1}}$ b) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{-e^{x^2-1} - x}{x^2 + 4x + 3}$

**2B.** Dadas las funciones $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ y $g(x) = \dfrac{x^2}{2}$ con $x \in \mathbb{R}$.

a) Encuentra razonadamente las coordenadas de los extremos relativos de las funciones $f(x)$ y $g(x)$

b) Calcula razonadamente el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$

**3B.** Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix}-1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}\ \text{y}\ C=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

a) Calcula razonadamente la matriz inversa de $A$.
b) Calcula razonadamente la matriz $X$ que verifica que $AX-2B=C$.

**4B.** Sean la recta $r\equiv\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{2}$, el punto $P(3,1,-1)$ y el plano $\pi\equiv 2x+y-z=0$.
a) Calcula la distancia del punto $P$ a la recta $r$.
b) Encuentra razonadamente las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto $P$ y por el punto $Q$, siendo $Q$ el punto de corte de la recta $r$ y el plano paralelo a $\pi$ que contiene a $P$.

**5B.** a) Una alarma de seguridad tiene instalados dos sensores. Ante una emergencia los sensores se activan de forma independiente. La probabilidad de que se active el primer sensor es de 0,98 y de que se active el segundo es de 0,96. Calcula razonadamente la probabilidad de que ante una emergencia:
a1) Se active al menos uno de los dos sensores.
a2) Se active solo uno de los sensores.
b) El tiempo, en horas, empleado en realizar cierta intervención quirúrgica sigue una distribución normal $N(10,2)$. Calcular razonadamente el porcentaje de estas intervenciones que se pueden realizar:
b1) Entre 6,5 y 13 horas.
b2) En menos de siete horas.

| a | 0,00 | 0,01 | 0,02 | 0,03 | 0,04 | 0,05 | 0,06 | 0,07 | 0,08 | 0,09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1,5** | 0,9332 | 0,9345 | 0,9357 | 0,9370 | 0,9382 | 0,9394 | 0,9406 | 0,9418 | 0,9429 | 0,9441 |
| **1,6** | 0,9452 | 0,9463 | 0,9474 | 0,9484 | 0,9495 | 0,9505 | 0,9515 | 0,9525 | 0,9535 | 0,9545 |
| **1,7** | 0,9554 | 0,9564 | 0,9573 | 0,9582 | 0,9591 | 0,9599 | 0,9608 | 0,9616 | 0,9625 | 0,9633 |
| **1,8** | 0,9641 | 0,9649 | 0,9656 | 0,9664 | 0,9671 | 0,9678 | 0,9686 | 0,9693 | 0,9699 | 0,9706 |
| **1,9** | 0,9713 | 0,9719 | 0,9726 | 0,9732 | 0,9738 | 0,9744 | 0,9750 | 0,9756 | 0,9761 | 0,9767 |

# Julio de 2019

## PROPUESTA A

**1A.** a) Estudia la continuidad en todo $\mathbb{R}$ de la función $f(x)=\dfrac{2x^3-x^2-x}{x^2-1}$ indicando los tipos de discontinuidad que aparecen.
b) Calcula las coordenadas de los extremos relativos de la función $g(x)=xe^{-x}$.

**2A.** a) Calcula razonadamente el área del recinto cerrado limitado por las gráficas de las funciones $f(x)=16-x^2$ y $g(x)=(x+2)^2-4$.
b) Encuentra razonadamente la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)=16-x^2$ en el punto de abscisa $x=1$.

**3A.** a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x - (a-2)y - z = 1 \\ x - 2y + z = -4 \\ x - 3y + az = -a^2 \end{cases}$$

b) Resuélvelo razonadamente para el valor de $a = 3$.

**4A.** Dada la recta $r \equiv \dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{2}$ y el plano $\pi \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda + \mu \\ y = \lambda - \mu \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases}$ con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

a) Determina razonadamente la posición relativa de $r$ y $\pi$.

b) Encuentra razonadamente la ecuación general del plano perpendicular al plano $\pi$ y que contiene a la recta $r$.

**5A.** a) Sean $A$ y $B$ dos sucesos de un experimento aleatorio cuyas probabilidades son $P(A) = 0,75$ y $P(B) = 0,35$. Calcula razonadamente las probabilidades que deben asignarse a los sucesos $A \cup B$ y $A \cap B$ en cada uno de los siguientes casos:

a1) Si $A$ y $B$ fuesen independientes.

a2) Si $P\left(A/B\right) = 0,6$.

Nota: $P\left(A/B\right)$ denota la probabilidad condicionada.

b) El 1 % de los cheques que recibe un banco no tienen fondos. Razona la respuesta de las siguientes preguntas:

b1) Si en una hora recibe cinco cheques, ¿cuál es la probabilidad de que tenga algún cheque sin fondos? Redondea el resultado a la centésima.

b2) El banco dispone de cinco sucursales en una ciudad, ¿cuál es la probabilidad de que al menos tres sucursales de esa ciudad reciban algún cheque sin fondos?

| n | k \ p | 0,01 | 0,05 | 0,10 | 0,15 | 0,20 | 0,25 | 0,30 | 0,33 | 0,35 | 0,40 | 0,45 | 0,49 | 0,50 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 0 | 0,9510 | 0,7738 | 0,5905 | 0,4437 | 0,3277 | 0,2373 | 0,1681 | 0,1317 | 0,1160 | 0,0778 | 0,0503 | 0,0345 | 0,0313 |
| | 1 | 0,0480 | 0,2036 | 0,3281 | 0,3915 | 0,4096 | 0,3955 | 0,3602 | 0,3292 | 0,3124 | 0,2592 | 0,2059 | 0,1657 | 0,1563 |
| | 2 | 0,0010 | 0,0214 | 0,0729 | 0,1382 | 0,2048 | 0,2637 | 0,3087 | 0,3292 | 0,3364 | 0,3456 | 0,3369 | 0,3185 | 0,3125 |
| | 3 | 0,0000 | 0,0011 | 0,0081 | 0,0244 | 0,0512 | 0,0879 | 0,1323 | 0,1646 | 0,1811 | 0,2304 | 0,2757 | 0,3060 | 0,3125 |
| | 4 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0005 | 0,0022 | 0,0064 | 0,0146 | 0,0284 | 0,0412 | 0,0488 | 0,0768 | 0,1128 | 0,1470 | 0,1563 |
| | 5 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0001 | 0,0003 | 0,0010 | 0,0024 | 0,0041 | 0,0053 | 0,0102 | 0,0185 | 0,0282 | 0,0313 |

## PROPUESTA B

**1B.** a) Demuestra que la ecuación $\operatorname{sen} x - 2x + 1 = 0$ tiene al menos una solución real en el intervalo $[0, \pi]$.

b) Calcula razonadamente el número exacto de soluciones de la ecuación anterior cuando $x \in [-200, 200]$.

**2B.** Calcula razonadamente las siguientes integrales:

a) $\int_0^1 (x+1)e^{-x}dx$ **b)** $\int \dfrac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx$

Nota: en la integral b) puede ayudarte hacer el cambio de variable $t=\sqrt{x}$ .

**3B.** Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & a+2 \end{pmatrix} \text{ y } B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Calcula razonadamente el rango de la matriz $A$ según los valores del parámetro $a\in\mathbb{R}$ .
b) Para $a=1$ calcula razonadamente la matriz $X$ que verifica que $XA=B-X$ .

**4B.** a) Dados los vectores $\vec{u}=(-1,0,-2)$, $\vec{v}=(a,b,1)$ y $\vec{w}=(2,5,c)$, halla razonadamente el valor de $a$, $b$ y $c$ para que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean ortogonales y para que el vector $\vec{w}$ sea igual al producto vectorial de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ .
b) Determina razonadamente las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto $P(-1,3,1)$ y es perpendicular al plano $\pi\equiv x+y+2z-3=0$. Comprueba si los puntos $Q(1,5,5)$ y $R(0,4,2)$ pertenecen o no a la recta.

**5B.** a) En la sala de pediatría de un hospital el 70 % de los pacientes son niñas. De los niños el 40 % son menores de 36 meses y de las niñas el 30 % tienen menos de 36 meses. Un pediatra entra en la sala y selecciona un paciente al azar. Calcula razonadamente la probabilidad de:

a1) Que no tenga menos de 36 meses.

a2) Si el paciente resulta ser menor de 36 meses, que sea niña.

b) En una de las pruebas de acceso al cuerpo de ingenieros de la Administración Pública se realiza un test de 100 ítems a 450 opositores. Cada ítem vale un punto y se supera la prueba si se obtienen al menos 75 puntos. Suponiendo que las puntuaciones obtenidas por los opositores siguen una distribución normal de media 60 puntos y desviación típica 10 puntos, calcula razonadamente:

b1) La probabilidad de obtener 75 o más puntos.

b2) El número de opositores que obtuvieron menos de 75 puntos.

| a | 0,00 | 0,01 | 0,02 | 0,03 | 0,04 | 0,05 | 0,06 | 0,07 | 0,08 | 0,09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1,5 | 0,9332 | 0,9345 | 0,9357 | 0,9370 | 0,9382 | 0,9394 | 0,9406 | 0,9418 | 0,9429 | 0,9441 |
| 1,6 | 0,9452 | 0,9463 | 0,9474 | 0,9484 | 0,9495 | 0,9505 | 0,9515 | 0,9525 | 0,9535 | 0,9545 |
| 1,7 | 0,9554 | 0,9564 | 0,9573 | 0,9582 | 0,9591 | 0,9599 | 0,9608 | 0,9616 | 0,9625 | 0,9633 |
| 1,8 | 0,9641 | 0,9649 | 0,9656 | 0,9664 | 0,9671 | 0,9678 | 0,9686 | 0,9693 | 0,9699 | 0,9706 |
| 1,9 | 0,9713 | 0,9719 | 0,9726 | 0,9732 | 0,9738 | 0,9744 | 0,9750 | 0,9756 | 0,9761 | 0,9767 |

# Modelo de 2020

**1. a)** Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a\in\mathbb{R}$

$$\begin{cases} ax + 2y = a^2 \\ -x + y + z = 5 \\ x - ay - z = -(4+a) \end{cases}$$

**b)** Resuélvelo razonadamente para el valor $a=1$.

**2.** Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix}-1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}\text{ y } C=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

a) Calcula razonadamente la matriz inversa de $A$.

b) Calcula razonadamente la matriz $X$ que verifica que $AX-2B=C$.

**3.** a) Determina el valor de $a$ y de $b$ para que la siguiente función $f(x)$ sea derivable en todo $\mathbb{R}$

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+2 & \text{si } x\le 1\\ a\sqrt{x}-\dfrac{b}{x^2} & \text{si } x>1\end{cases}$$

b) Comprueba si la función $f(x)=x^2-4$ verifica las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[-3,3]$.

**4.** Calcula razonadamente los siguientes límites:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\left(\frac{2e^{x-1}}{x+1}\right)^{\frac{x}{x-1}}$  b) $\displaystyle\lim_{x\to -1}\frac{-e^{x^2-1}-x}{x^2+4x+3}$

**5.** a) Calcula razonadamente el área de los recintos limitados por la función $g(x)=-x^2+2x+3$, la recta $x=-2$ y el eje de abscisas.

b) Encuentra razonadamente la ecuación de la recta normal a la gráfica de la función $g(x)$ en el punto de abscisa $x=4$.

**6.** Sean la recta $r\equiv\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{2}$, el punto $P(3,1,-1)$ y el plano $\pi\equiv 2x+y-z=0$.

a) Calcula la distancia del punto $P$ a la recta $r$.

b) Encuentra razonadamente las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto $P$ y por el punto $Q$, siendo $Q$ el punto de corte de la recta $r$ y el plano paralelo a $\pi$ que contiene a $P$.

**7.** Dados los puntos $A(1,2,0)$, $B(0,-1,2)$, $C(2,-1,3)$ y $D(1,0,1)$:

a) Encuentra razonadamente la ecuación general del plano que contiene a la recta que pasa por $A$ y $B$ y es paralelo a la recta que pasa por $C$ y $D$.

b) Calcula razonadamente el volumen del tetraedro cuyos vértices son los puntos $A$, $B$, $C$ y $D$.

**8.** a) Una fábrica A produce el 30 % de los tractores que se demandan en una Comunidad Autónoma, una fábrica B produce el 20 % y la fábrica C el resto. El controlador de calidad sabe que son defectuosos el 4 %. de los tractores fabricados por A, el 10 % de los fabricados por B y el 2 % de los fabricados por C. Elegido un tractor al azar, calcula razonadamente la probabilidad de:

a1) No salga defectuoso.

a2) Si resultó defectuoso, que no fuera fabricado por C.

b) En mía clase hay 16 chicas y 4 chicos. Cada día elijo a un estudiante al azar para que salga a la pizarra. Calcula razonadamente la probabilidad de que los cinco días laborables de la semana salgan a la pizarra:

b1) Tres chicas.

b2) Al menos tres chicos.

| n | k \ p | 0,01 | 0,05 | 0,10 | 0,15 | 0,20 | 0,25 | 0,30 | 0,33 | 0,35 | 0,40 | 0,45 | 0,49 | 0,50 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 0 | 0,9510 | 0,7738 | 0,5905 | 0,4437 | 0,3277 | 0,2373 | 0,1681 | 0,1317 | 0,1160 | 0,0778 | 0,0503 | 0,0345 | 0,0313 |
| | 1 | 0,0480 | 0,2036 | 0,3281 | 0,3915 | 0,4096 | 0,3955 | 0,3602 | 0,3292 | 0,3124 | 0,2592 | 0,2059 | 0,1657 | 0,1563 |
| | 2 | 0,0010 | 0,0214 | 0,0729 | 0,1382 | 0,2048 | 0,2637 | 0,3087 | 0,3292 | 0,3364 | 0,3456 | 0,3369 | 0,3185 | 0,3125 |
| | 3 | 0,0000 | 0,0011 | 0,0081 | 0,0244 | 0,0512 | 0,0879 | 0,1323 | 0,1646 | 0,1811 | 0,2304 | 0,2757 | 0,3060 | 0,3125 |
| | 4 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0005 | 0,0022 | 0,0064 | 0,0146 | 0,0284 | 0,0412 | 0,0488 | 0,0768 | 0,1128 | 0,1470 | 0,1563 |
| | 5 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0001 | 0,0003 | 0,0010 | 0,0024 | 0,0041 | 0,0053 | 0,0102 | 0,0185 | 0,0282 | 0,0313 |

# Julio de 2020

**1.** a) Determina razonadamente los valores de $a$ para los que la matriz $A$ no tiene inversa

$$A=\begin{pmatrix} 1 & a+1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & a \\ a & 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Calcula razonadamente todos los posibles valores $x,\ y,\ z$ para que el producto de las matrices $C=\begin{pmatrix} x & 1 \\ y & z \end{pmatrix}$ y $D=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ conmute.

**2.** a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a\in\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} ax - ay - z = a \\ ax - ay = a \\ ax + 2y - z = 1 \end{cases}$$

b) Resuelve razonadamente el sistema anterior para $a=2$, si es posible.

3. Dada la función

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{3}{x-2} & \text{si} \quad x<2 \\ \cos(\pi x) & \text{si} \quad 2\le x\le 3 \\ \dfrac{\ln(x-2)}{3-x} & \text{si} \quad x>3 \end{cases}$$

a) Determina razonadamente los puntos en los que la función es continua, calcula los puntos en los que es discontinua y clasifica el tipo de discontinuidad, si los hubiera.

b) Calcula razonadamente el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{xe^{-x}}{1+2x-\cos\left(x^2\right)}$$

**4.** Sea la función $f\left(x\right)=\dfrac{x^2-2x+1}{x^2+1}$.

a) Halla razonadamente las coordenadas de los extremos relativos de la función $f\left(x\right)$ y clasifícalos.

b) Calcula la ecuación de la recta tangente y la ecuación de la recta normal a la gráfica de la función $f\left(x\right)$ en el punto de abscisa $x=0$.

**5. a)** Calcula razonadamente la siguiente integral: $\displaystyle\int\frac{3x-2}{x^2-2x+1}dx$

**b)** Calcula, justificadamente, el área acotada del recinto limitado por la gráfica de la función $g\left(x\right)=-x^3+2x^2+3x$ y el eje de abscisas.

**6.** Dados los planos $\pi_1\equiv 2x+y+z-2=0$ y $\pi_2\equiv\begin{cases}x=-1+\lambda-\mu\\ y=-\lambda+\mu\\ z=-2+2\lambda\end{cases}$.

**a)** Calcula razonadamente el ángulo que forman los dos planos.

**b)** Halla razonadamente el volumen del tetraedro formado por el punto $P\left(3,-3,2\right)$ y los puntos de corte del plano $\pi_1$ con los ejes coordenados.

**7.** Dados el plano $\pi\equiv\begin{cases}x=-1+\mu\\ y=1+\lambda+a\mu\\ z=1+2\lambda-\mu\end{cases}$ y la recta $s\equiv\begin{cases}x-2y=1-b\\ z=-3\end{cases}$.

**a)** Calcula razonadamente el valor de los parámetros $a$ y $b$ para que la recta $s$ esté contenida en el plano $\pi$.

**b)** Si $a=0$ y $b=3$, calcula razonadamente la ecuación en forma implícita de la recta $r$ que pasa por el punto $P\left(1,-1,-8\right)$ es paralela al plano $\pi$ y es perpendicular a la recta $s$.

**8. a)** En un servicio de emergencias el 60 % de los avisos que se reciben se clasifican con el código amarillo, el 30 % con el naranja y el 10 % con el rojo. Se sabe que el porcentaje de avisos recibidos que son falsas alarmas es 3 % en el caso de código amarillo, 2 % en el naranja y 1 % en el rojo. Si se recibe un aviso,

**a.1)** ¿Qué probabilidad hay de que se trate de una falsa alarma?

**a.2)** Si se sabe que el aviso recibido no ha sido falsa alarma, ¿qué probabilidad hay de que haya sido un aviso código rojo o naranja?

**b)** Si en una centralita se reciben 9 avisos,

**b.1)** ¿Qué probabilidad hay de que la centralita reciba 2 o menos avisos naranjas?

**b.2)** ¿Qué probabilidad hay de que todos los avisos sean amarillos o naranjas?

| n | k \ p | 0.01 | 0.05 | 0.10 | 0.15 | 0.20 | 0.25 | 0.30 | 0.33 | 0.35 | 0.40 | 0.45 | 0.49 | 0.50 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 9 | 0 | 0.9135 | 0.6302 | 0.3874 | 0.2316 | 0.1342 | 0.0751 | 0.0404 | 0.0272 | 0.0207 | 0.0101 | 0.0046 | 0.0023 | 0.0020 |
| | 1 | 0.0830 | 0.2985 | 0.3874 | 0.3679 | 0.3020 | 0.2253 | 0.1556 | 0.1206 | 0.1004 | 0.0605 | 0.0339 | 0.0202 | 0.0176 |
| | 2 | 0.0034 | 0.0629 | 0.1722 | 0.2597 | 0.3020 | 0.3003 | 0.2668 | 0.2376 | 0.2162 | 0.1612 | 0.1110 | 0.0776 | 0.0703 |
| | 3 | 0.0001 | 0.0077 | 0.0446 | 0.1069 | 0.1762 | 0.2336 | 0.2668 | 0.2731 | 0.2716 | 0.2508 | 0.2119 | 0.1739 | 0.1641 |
| | 4 | 0.0000 | 0.0006 | 0.0074 | 0.0283 | 0.0661 | 0.1168 | 0.1715 | 0.2017 | 0.2194 | 0.2508 | 0.2600 | 0.2506 | 0.2461 |
| | 5 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0008 | 0.0050 | 0.0165 | 0.0389 | 0.0735 | 0.0994 | 0.1181 | 0.1672 | 0.2128 | 0.2408 | 0.2461 |
| | 6 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0001 | 0.0006 | 0.0028 | 0.0087 | 0.0210 | 0.0326 | 0.0424 | 0.0743 | 0.1160 | 0.1542 | 0.1641 |
| | 7 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0003 | 0.0012 | 0.0039 | 0.0069 | 0.0098 | 0.0212 | 0.0407 | 0.0635 | 0.0703 |
| | 8 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0001 | 0.0004 | 0.0008 | 0.0013 | 0.0035 | 0.0083 | 0.0153 | 0.0176 |
| | 9 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0001 | 0.0003 | 0.0008 | 0.0016 | 0.0020 |

# Septiembre de 2020

**1.** Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -2\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\ \text{y}\ C=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 0 & -2\end{pmatrix}$$

a) Calcula razonadamente la matriz inversa de $A$.

b) Calcula razonadamente la matriz $X$ de la ecuación matricial $AX+I_3=BC$, donde $I_3$ es la matriz identidad.

**2.** **a)** Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a\in\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + 2y + az = a\\ x + ay + 2z = a\\ -x + y + z = 1\end{cases}$$

**b)** Resuelve el sistema anterior para $a=2$, si es posible.

**3.** **a)** Calcula razonadamente el siguiente límite: $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\operatorname{sen}(2x)}\right)$

**b)** Dada la función

$$f(x)=\begin{cases}2^{x-1} & \text{si}\quad x\le 1\\ x-2 & \text{si}\quad 1<x<2\\ \ln(x-1) & \text{si}\quad x\ge 2\end{cases}$$

Donde $\ln$ es el logaritmo neperiano, estudia la continuidad de la función $f(x)$ en $x=1$ y en $x=2$, y clasifica el tipo de discontinuidad si las hubiera.

**4.** **a)** Calcula las dimensiones de una caja de base cuadrada (prisma cuadrangular) sin tapa superior y con un volumen de $108\,\text{dm}^3$ para que la super cie total de la caja (formada por las caras laterales y la base) sea mínima.

**b)** Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)=x^2+x+1$ en el punto de abscisa $x=1$.

**5. a)** Calcula razonadamente la siguiente integral: $\int \frac{-dx}{1+e^x}$

(Cambio de variable sugerido: $e^x=t$)

**b)** Determina justificadamente el área acotada que encierran las gráficas de las funciones $f(x)=-x^2+2x+4$ y $g(x)=x+2$.

**6.** Sean el plano $\pi \equiv x+2y-z-4=0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x-2y-2=0 \\ y-z-2=0 \end{cases}$.

**a)** Calcula razonadamente la distancia del punto $P(1,2,-1)$ al plano $\pi$.

**b)** Halla razonadamente el área del triángulo que forman el punto de intersección de la recta $r$ con el plano $\pi$, y los puntos $B(1,-1,2)$ y $C(0,1,1)$.

**7.** Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} 2x-2y=4 \\ z=0 \end{cases}$, $s \equiv \frac{x}{3}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z-1}{1}$ y el punto $P(-1,0,2)$.

**a)** Determina razonadamente la posición relativa de las rectas $r$ y $s$.

**b)** Halla razonadamente la ecuación general del plano que pasa por el punto $P$ y es paralelo a las rectas $r$ y $s$.

**8. a)** El 70 % de los usuarios de Instagram tiene menos de 34 años, el 25 % entre 34 y 54 años (ambos incluidos) y el 5 % más de 54 años. Se sabe que acceden a diario a dicha red: el 98 % de los menores de 34 años, el 40 % de los usuarios entre 34 y 54 años (ambos incluidos) y el 10 % de los mayores de 54 años. Si se selecciona un usuario al azar:

**a.1)** ¿Qué probabilidad hay de que no acceda a diario a dicha red social?

**a.2)** Si el usuario seleccionado al azar con esa que accede diariamente, ¿qué probabilidad hay de que pertenezca al grupo que tiene entre 34 y 54 años (ambos incluidos)?

**b)** El tiempo que un usuario de la red Instagram pasa conectado a diario a dicha red social sigue una ley normal de media 53 minutos y desviación típica 10 minutos.

**b.1)** ¿Qué probabilidad hay de que un usuario seleccionado al azar se conecte más de 30 minutos al día?

**b.2)** ¿Qué porcentaje de usuarios (tanto por ciento) se conectan entre 40 y 67 minutos al día?

| a | 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.04 | 0.05 | 0.06 | 0.07 | 0.08 | 0.09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1.3** | 0.9032 | 0.9049 | 0.9066 | 0.9082 | 0.9099 | 0.9115 | 0.9131 | 0.9147 | 0.9162 | 0.9177 |
| **1.4** | 0.9192 | 0.9207 | 0.9222 | 0.9236 | 0.9251 | 0.9265 | 0.9279 | 0.9292 | 0.9306 | 0.9319 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| **2.2** | 0.9861 | 0.9864 | 0.9868 | 0.9871 | 0.9875 | 0.9878 | 0.9881 | 0.9884 | 0.9887 | 0.9890 |
| **2.3** | 0.9893 | 0.9896 | 0.9898 | 0.9901 | 0.9904 | 0.9906 | 0.9909 | 0.9911 | 0.9913 | 0.9916 |
| **2.4** | 0.9918 | 0.9920 | 0.9922 | 0.9925 | 0.9927 | 0.9929 | 0.9931 | 0.9932 | 0.9934 | 0.9936 |

# Junio de 2021

**1.** Sean las matrices

$$A=\begin{pmatrix}2&1&2\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix} \text{ y } B=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$$

a) Calcula razonadamente el determinante de $A^T$, es decir, la matriz traspuesta de $A$.

b) Calcula razonadamente la matriz $X$ de la ecuación matricial $XA+3A=B$.

**2. a)** Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a\in\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + y + z = a+1 \\ ax + z = a-1 \\ x - y + z = 3 \end{cases}$$

**b)** Resuelve razonadamente el sistema anterior para $a=0$, si es posible.

**3. a)** Calcula razonadamente la siguiente integral: $\int \frac{2}{3+e^x}dx$

(Cambio de variable sugerido: $e^x=t$).

**b)** Calcula razonadamente la siguiente integral: $\int \frac{-x+1}{x^2+3}dx$

**4. a)** Sea el punto $P(1,0,1)$ y la recta $r\equiv \frac{x+1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{x-1}{-1}$. Calcula razonadamente la distancia del punto $P$ a la recta $r$.

**b)** Sean las rectas $s\equiv\begin{cases}x=0+2\lambda\\ y=1-2a\lambda\\ z=0+2\lambda\end{cases}$ y $t\equiv\frac{x-1}{a}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-2}{1}$. Calcula razonadamente el valor de $a\in\mathbb{R}$ para que las dos rectas sean paralelas.

**5.** Sean los puntos $A(0,0,1)$, $B(2,1,0)$, $C(1,1,1)$ y $D(1,1,2)$.

**a)** Calcula razonadamente el volumen del tetraedro de vértices $A$, $B$, $C$ y $D$

**b)** Calcula razonadamente la ecuación del plano que pasa por los puntos $A$, $B$ y $C$, y de la recta perpendicular a este plano que pasa por el punto $D$.

**6. a)** Sea la función $f(x)=ax^3-2x^2-x+b$ con $a,b\in\mathbb{R}$. Determina razonadamente los valores de $a$ y $b$ para que la gráfica de la función pase por el punto $(1,2)$ y la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en este punto sea 1.

**b)** Sea la función $f(x)=\begin{cases} x^2-ax+1 & \text{si} \quad x<0 \\ be^x & \text{si} \quad x\geq 0 \end{cases}$, con $a,b\in\mathbb{R}$. Determina razonadamente los valores de $a$ y $b$ para que la función sea continua y derivable en $x=0$.

**7.** **a)** Calcula razonadamente el siguiente límite: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{e^{x-2}-1}{2x-4}$

**b)** Dada la función

$$f(x)=\begin{cases} x^2-2 & \text{si} \quad x<1 \\ \dfrac{2x-1}{x-2} & \text{si} \quad 1\leq x\leq 3 \\ 2e^x & \text{si} \quad x>3 \end{cases}$$

determina razonadamente su dominio y estudia su continuidad. En los puntos en lo que no lo sea indica razonadamente el tipo de discontinuidad.

**8.** **a)** Se sabe que el 20 % de los usuarios de una red social nunca comparte fotografías, mientras que el otro 80 % sí que lo hace. Además, de los usuarios que no comparten fotografías, el 50 % ha comentado alguna vez una fotografía de alguno de sus contactos. De los usuarios que comparten fotografías, se sabe que el 90 % ha comentado alguna vez una fotografía de sus contactos. Elegimos un usuario de esta red social al azar.

**a.1)** ¿Qué probabilidad hay de que haya comentado alguna vez una fotografía de alguno de sus contactos?

**a.2)** Si se sabe que nunca ha comentado una fotografía de alguno de sus contactos, ¿cuál es la probabilidad de que comparta fotos?

**b)** Un algoritmo de reconocimiento facial es capaz de identificar de manera correcta al 80 % de las personas a partir de sus fotografías. Se procesan las fotografías de 4 personas con este algoritmo.

**b.1)** ¿Qué probabilidad hay de que identifique correctamente a las 4 personas de las fotografías?

**b.2)** ¿Cuál es la probabilidad de que identifique correctamente al menos a una persona?

| n | k \ p | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.6 | 0.7 | 0.8 | 0.9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 0 | 0.6561 | 0.4096 | 0.2401 | 0.1296 | 0.0625 | 0.0256 | 0.0081 | 0.0016 | 0.0001 |
| | 1 | 0.2916 | 0.4096 | 0.4116 | 0.3456 | 0.2500 | 0.1536 | 0.0756 | 0.0256 | 0.0036 |
| | 2 | 0.0486 | 0.1536 | 0.2646 | 0.3456 | 0.3750 | 0.3456 | 0.2646 | 0.1536 | 0.0486 |
| | 3 | 0.0036 | 0.0256 | 0.0756 | 0.1536 | 0.2500 | 0.3456 | 0.4116 | 0.4096 | 0.2916 |
| | 4 | 0.0001 | 0.0016 | 0.0081 | 0.0256 | 0.0625 | 0.1296 | 0.2401 | 0.4096 | 0.6561 |

# Julio de 2021

**1.** Sean las matrices

$$A=\begin{pmatrix}3&1&2\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix} \quad \text{e} \quad I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

a) Calcula razonadamente la matriz inversa de $A$.

b) Calcula razonadamente la matriz $X$ de la ecuación matricial $AX+3I=A$.

**2.** **a)** Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a\in\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + ay + z = 2 \\ x + z = a \\ ax + 2y + z = 3 \end{cases}$$

**b)** Resuelve razonadamente el sistema anterior para $a=2$, si es posible.

**3.** **a)** Calcula razonadamente la siguiente integral: $\int x\cos(3x)\,dx$

**b)** Calcula razonadamente la siguiente integral: $\int \frac{dx}{2x^2+1}$

**4.** Sean los planos $\pi_1 \equiv ax+y+2z=3$ y $\pi_2 \equiv 2x-y+az=0$.

**a)** Determina razonadamente el valor de $a$ para que los planos $\pi_1$ y $\pi_2$ sean perpendiculares.

**b)** Para $a=1$ calcula la distancia del punto $P(2,0,1)$ al plano $\pi_1$.

**5.** **a)** Calcula razonadamente el siguiente límite: $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{e^{x-1}-1}$

**b)** Dada la función

$$f(x)=\begin{cases} e^x & \text{si} \quad x<0 \\ \dfrac{1}{x-1} & \text{si} \quad 0\le x\le 2 \\ x & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$$

estudia su continuidad en $x=0$ y en $x=2$ e indica el tipo de discontinuidad, si la hubiera.

**6.** Sea la función $f(x)=\dfrac{2x^2+2x-2}{3x^2+3}$.

**a)** Halla razonadamente las coordenadas de los extremos relativos de la función $f(x)$ y clasifícalos.

**b)** Calcula la ecuación de la recta tangente y la ecuación de la recta normal a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x=1$.

**7.** **a)** Sea la función $f(x)=ax^3+bx^2+x-1$, con $a,b\in\mathbb{R}$. Determina los valores de $a$ y $b$ para que la gráfica de $f(x)$ pase por el punto $(1,1)$ y tenga aquí un punto de inflexión.

**b)** Sea la función $f(x) = x \operatorname{sen} x - \cos x$. Enuncia el teorema de Rolle y úsalo para razonar si la función $f(x)$ tiene al menos un extremo relativo en el intervalo $[-1,1]$.

**8.** **a)** En el servicio de urgencias clasifican a los pacientes en leves y graves según llegan al hospital. El 20 % de los pacientes leves debe ingresar en el hospital, mientras que el 60 % de los pacientes graves debe hacerlo. En un día cualquiera llegan al servicio de urgencias un 90 % de pacientes leves y un 10 % de pacientes graves. Si se selecciona un paciente al azar:

**a.1)** ¿Qué probabilidad hay de que deba ingresar en el hospital?

**a.2)** Si se sabe que el paciente tuvo que ingresar, ¿cuál es la probabilidad de que llegará al hospital con una dolencia leve?

**b)** En un momento dado llegan 8 pacientes a urgencias.

**b.1)** ¿Qué probabilidad hay de que exactamente 4 pacientes se clasifiquen como leves?

**b.2)** ¿Cuál es la probabilidad de que como mucho 7 pacientes sean clasificados como leves?

| **n** | **k \ p** | **0.1** | **0.2** | **0.3** | **0.4** | **0.5** | **0.6** | **0.7** | **0.8** | **0.9** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **8** | **0** | 0.4305 | 0.1678 | 0.0576 | 0.0168 | 0.0039 | 0.0007 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 |
| | **1** | 0.3826 | 0.3355 | 0.1977 | 0.0896 | 0.0313 | 0.0079 | 0.0012 | 0.0001 | 0.0000 |
| | **2** | 0.1488 | 0.2936 | 0.2965 | 0.2090 | 0.1094 | 0.0413 | 0.0100 | 0.0011 | 0.0000 |
| | **3** | 0.0331 | 0.1468 | 0.2541 | 0.2787 | 0.2188 | 0.1239 | 0.0467 | 0.0092 | 0.0004 |
| | **4** | 0.0046 | 0.0459 | 0.1361 | 0.2322 | 0.2734 | 0.2322 | 0.1361 | 0.0459 | 0.0046 |
| | **5** | 0.0004 | 0.0092 | 0.0467 | 0.1239 | 0.2188 | 0.2787 | 0.2541 | 0.1468 | 0.0331 |
| | **6** | 0.0000 | 0.0011 | 0.0100 | 0.0413 | 0.1094 | 0.2090 | 0.2965 | 0.2936 | 0.1488 |
| | **7** | 0.0000 | 0.0001 | 0.0012 | 0.0079 | 0.0313 | 0.0896 | 0.1977 | 0.3355 | 0.3826 |
| | **8** | 0.0000 | 0.0000 | 0.0001 | 0.0007 | 0.0039 | 0.0168 | 0.0576 | 0.1678 | 0.4305 |

# Junio de 2022

**1.** **a)** Encuentra todas las matrices $X$ que conmutan con la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

es decir, que verifican que $AX = XA$.

**b)** ¿Existe alguna matriz simétrica que conmute con $A$ y cuyo determinante valga 4?

**2.** **a)** Tres lápices, un cuaderno y una agenda han costado 5 euros, lo mismo que dos cuadernos y una agenda. ¿Podemos saber el precio de cada artículo si ninguno es gratis y en céntimos todos son múltiplos de 50?

**b)** Calcula razonadamente el siguiente límite:

$$\lim_{x \to +\infty} \left( \frac{x+1}{x} \right)^{\frac{x^2+1}{x}}$$

**3.** **a)** Sea la curva $f(x) = a - x^2$.

**a.1)** ¿Qué valores puede tomar $a \in \mathbb{R}$ para que la curva $f(x) = a - x^2$ corte al eje de abscisas (eje $OX$) en dos puntos y, por tanto, delimite con dicho eje un recinto cerrado?

**a.2)** Encuentra razonadamente $a \in \mathbb{R}$ para que el área de dicho recinto valga 36.

**b)** Resuelve la siguiente integral:

$$\int \frac{2x}{\sqrt{1+3x^2}}\,dx$$

El cambio de variable $t = 1 + 3x^2$ te puede ayudar.

**4.** Sean las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = -\lambda \\ z = a \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \begin{cases} x = -1 \\ y = \mu \\ z = -5\mu \end{cases}$$

Donde $\lambda,\ \mu$ son los parámetros y $a \in \mathbb{R}$.

**a)** Estudia su posición relativa en función de los valores que toma $a$.

**b)** Encuentra razonadamente un plano que contenga a $s$ y que sea paralelo a $r$.

**5. a)** Expresa razonadamente en forma de ecuaciones paramétricas la recta intersección de los planos $\pi_1 \equiv x = y + 1$ y $\pi_2 \equiv y + 2z = 5$.

**b)** Enuncia el teorema del valor medio del cálculo integral. Encuentra razonadamente el punto al que hace alusión dicho teorema para la función $f(x) = \dfrac{3}{x^2}$ en el intervalo $[1,3]$. Interpreta geométricamente lo hallado.

**6. a)** Estudia el rango de la matriz $M$ en función del parámetro $m \in \mathbb{R}$, siendo

$$M = \begin{pmatrix} 2 & m & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & m \\ 4 & 1 & m & 2 \end{pmatrix}$$

**b)** Sean los planos $\pi_1 \equiv 2x + my = 1$, $\pi_2 \equiv 2x + y = m$ y $\pi_3 \equiv 4x + y + mz = 2$. Estudia su posición relativa según los valores de $m$. Puedes utilizar los resultados obtenidos en el apartado anterior.

**7. a)** Sean los vectores $\vec{u} = (1,1,1)$ y $\vec{v} = (1,0,1)$. Calcula el plano que pasa por el punto $A(0,0,1)$ y con vector normal el producto vectorial de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

**b)** El EVAU club de fútbol tiene una probabilidad del 90 % de ganar un partido cuando juega Benceno (su delantero estrella) y del 60 % cuando no lo hace. Se sabe que la probabilidad de que Benceno juegue un partido es del 80 %.

**a.1)** ¿Cuál es la probabilidad de que el EVAU C.F. gane un partido cualquiera?

**a.2)** Si el EVAU C.F. acaba de ganar un partido, ¿cuál es la probabilidad de que Benceno haya jugado?

**8. a)** Se calcula que una quinta parte de los niños españoles presentan algún tipo de intolerancia alimentaria. En una cantina escolar los niños se sientan en mesas de 4 comensales.

**a.1)** ¿Cuál es la probabilidad de que en una mesa haya algún niño con intolerancia alimentaria?

**a.2)** Cuando en una mesa hay algún niño con intolerancia alimentaria, a esa mesa se le sirve el pan sin gluten. Si un día hay ocupadas 8 mesas, ¿cuál es la probabilidad de que haya que servir pan sin gluten en alguna mesa?

**b)** El peso de los paquetes de 1 kg de arroz que comercializa determinada marca siguen una distribución normal de 985 g de media y 25 g de desviación típica.

**b.1)** ¿Cuántos pesarán más de 1 kg?

**b.2)** ¿Cuánto pesará el más ligero del 70 % de los que más pesan?

| a | 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.04 | 0.05 | 0.06 | 0.07 | 0.08 | 0.09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **0.10** | 0.5398 | 0.5438 | 0.5478 | 0.5517 | 0.5557 | 0.5596 | 0.5636 | 0.5675 | 0.5714 | 0.5753 |
| **0.20** | 0.5793 | 0.5832 | 0.5871 | 0.5910 | 0.5948 | 0.5987 | 0.6026 | 0.6064 | 0.6103 | 0.6141 |
| **0.30** | 0.6179 | 0.6217 | 0.6255 | 0.6293 | 0.6331 | 0.6368 | 0.6406 | 0.6443 | 0.6480 | 0.6517 |
| **0.40** | 0.6554 | 0.6591 | 0.6628 | 0.6664 | 0.6700 | 0.6736 | 0.6772 | 0.6808 | 0.6844 | 0.6879 |
| **0.50** | 0.6915 | 0.6950 | 0.6985 | 0.7019 | 0.7054 | 0.7088 | 0.7123 | 0.7157 | 0.7190 | 0.7224 |
| **0.60** | 0.7257 | 0.7291 | 0.7324 | 0.7357 | 0.7389 | 0.7422 | 0.7454 | 0.7486 | 0.7517 | 0.7549 |

# Julio de 2022

**1. a)** Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = a+1 \\ ax + z = 0 \\ x + ay + 2z = 1 \end{cases}$$

**b)** Resuelve razonadamente el sistema anterior para $a = 1$, si es posible.

**2. a)** Encuentra razonadamente el valor de $a, b \in \mathbb{R}$ para que la función

$$f(x) = \frac{ax+1}{2x+b}$$

tenga una discontinuidad de salto infinito en $x = 1$ y tienda a 2 cuando $x \to +\infty$.

**b)** Resuelve la siguiente integral:

$$\int x \cos(2x)\, dx$$

**3. a)** Estudia la continuidad en $\mathbb{R}$ de la función

$$f(x) = \frac{2e^{x^2-4} - 8x + 14}{x^2 - 2x}$$

**b)** Sea el determinante

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2$$

Donde $x, y, z, a, b, c \in \mathbb{R}$. Calcula razonadamente (e indicando las propiedades de los determinantes que utilizas) el determinante de

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a-2 & b-4 & c-6 \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix}$$

**4.** Sea el punto $A(1,0,1)$ y el plano $\pi \equiv x+y+z=8$.

**a)** Calcula la recta perpendicular a $\pi$ y que pasa por $A$. ¿En qué punto se cortan la recta y el plano?

**b)** Obtén el punto de la recta anterior distinto de $A$, que dista de $\pi$ igual que $A$, es decir, el simétrico de $A$ con respecto a $\pi$.

**5. a)** Sea el plano $\pi \equiv x-3y+z=0$ y los puntos $A(0,0,-1)$ y $B(1,1,1)$. Obtén el plano perpendicular a $\pi$ y que contiene a $A$ y $B$.

**b)** Calcula el área de la región delimitada por las funciones $f(x)=x^2-4x+5$ y $g(x)=3-x$.

**6. a)** Sea el tetraedro cuyos vértices son los puntos $A(a,0,1)$, $B(1,3,0)$, $C(0,1,0)$ y $D(1,1,1)$ y $D(1,1,1)$, con $a\in\mathbb{R}$. Halla los valores de $a$ para que el volumen de dicho tetraedro sea 1.

**b)** Enuncia el teorema de Bolzano. Utiliza este teorema para razonar que la función

$$f(x)=\frac{2e^x-8x-3}{x^2+2}$$

corta al eje de abscisas al menos una vez.

**7. a)** Despeja la matriz $X$ de la ecuación matricial $AX+B=X$, siendo $X$, $A$ y $B$ matrices cuadradas cualesquiera. Calcula $X$ para las matrices

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } B=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

**b)** Un piloto de Fórmula 1 tiene una probabilidad del 60 % de ganar una carrera cualquiera. Si participa en las próximas 4 carreras, ¿cuál es la probabilidad de que gane al menos dos?

| n | k \ p | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.6 | 0.7 | 0.8 | 0.9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 0 | 0.6561 | 0.4096 | 0.2401 | 0.1296 | 0.0625 | 0.0256 | 0.0081 | 0.0016 | 0.0001 |
| | 1 | 0.2916 | 0.4096 | 0.4116 | 0.3456 | 0.2500 | 0.1536 | 0.0756 | 0.0256 | 0.0036 |
| | 2 | 0.0486 | 0.1536 | 0.2646 | 0.3456 | 0.3750 | 0.3456 | 0.2646 | 0.1536 | 0.0486 |
| | 3 | 0.0036 | 0.0256 | 0.0756 | 0.1536 | 0.2500 | 0.3456 | 0.4116 | 0.4096 | 0.2916 |
| | 4 | 0.0001 | 0.0016 | 0.0081 | 0.0256 | 0.0625 | 0.1296 | 0.2401 | 0.4096 | 0.6561 |

**8. a)** En un determinado I.E.S. la probabilidad de que un alumno apruebe si va a clase es del 80 %, mientras que si no va a clase es del 50 %. El 90 % de los alumnos va a clase.

**a.1)** ¿Cuál es la probabilidad de que un alumno apruebe?

**a.2)** Si un alumno ha suspendido, ¿cuál es la probabilidad de que no haya ido a clase?

**b)** Una empresa embotelladora de agua produce botellas de 150 mL. La cantidad que realmente contienen sigue una distribución normal con media 150 mL y desviación típica 5 mL.

**b.1)** ¿Qué proporción de las botellas contiene más de 152 mL?

**b.2)** ¿Qué proporción de botellas tiene entre 149 y 152 mL?

| a | 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.04 | 0.05 | 0.06 | 0.07 | 0.08 | 0.09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **0.10** | 0.5398 | 0.5438 | 0.5478 | 0.5517 | 0.5557 | 0.5596 | 0.5636 | 0.5675 | 0.5714 | 0.5753 |
| **0.20** | 0.5793 | 0.5832 | 0.5871 | 0.5910 | 0.5948 | 0.5987 | 0.6026 | 0.6064 | 0.6103 | 0.6141 |
| **0.30** | 0.6179 | 0.6217 | 0.6255 | 0.6293 | 0.6331 | 0.6368 | 0.6406 | 0.6443 | 0.6480 | 0.6517 |
| **0.40** | 0.6554 | 0.6591 | 0.6628 | 0.6664 | 0.6700 | 0.6736 | 0.6772 | 0.6808 | 0.6844 | 0.6879 |
| **0.50** | 0.6915 | 0.6950 | 0.6985 | 0.7019 | 0.7054 | 0.7088 | 0.7123 | 0.7157 | 0.7190 | 0.7224 |
| **0.60** | 0.7257 | 0.7291 | 0.7324 | 0.7357 | 0.7389 | 0.7422 | 0.7454 | 0.7486 | 0.7517 | 0.7549 |

# Junio de 2023

**1.** Sean las matrices $X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}$, con $a,b,c\in\mathbb{R}$, $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

**a)** Determina las condiciones que tienen que cumplir los valores $a,b,c\in\mathbb{R}$ para que $AX=B$.

**b)** Si además queremos que $X$ sea simétrica, ¿qué se debe cumplir? ¿Cómo es la matriz $X$ resultante?

2. **a)** Enuncia el teorema de Bolzano.

**b)** Sea la función $f(x)=x^3+6x^2+3x-10$. Utiliza el teorema de Bolzano para justificar que esta función tiene al menos una raíz en el intervalo $[0,2]$.

**c)** ¿Podría $f$ tener más de una raíz en el intervalo $[0,2]$. Justifica tu respuesta.

3. Sean el punto $A(1,1,a)$ y el plano $\pi\equiv bx+y+z=1$ con $a,b\in\mathbb{R}$.

**a)** ¿Qué deben cumplir los valores $a,b\in\mathbb{R}$ para que el punto $A$ esté contenido en el plano $\pi$ y éste tenga como vector normal uno que es perpendicular al vector $\vec{u}=(1,2,0)$?

**b)** Con los valores $a,b\in\mathbb{R}$ del apartado anterior, obtén la ecuación de la recta perpendicular al plano $\pi$ y que pasa por el punto $A$.

**4.** a) Una empresa de mantenimiento da servicio a empresas de dos polígonos industriales (el polígono Campo y el polígono Llano). El 30 % de las reparaciones se realizan en el polígono Campo mientras que el 70 % se realiza en el polígono Llano. Además, en el polígono Campo el 10 % de las reparaciones son de tipo mecánico y el 90 % de tipo eléctrico. En el polígono Llano el 30 % de las reparaciones son de tipo mecánico y el resto de tipo eléctrico.

**a.1)** ¿Cuál es la probabilidad de que en un momento dado se realice una reparación de tipo mecánico?

**a.2)** Si se ha realizado una reparación de tipo eléctrico, ¿qué probabilidad hay de que se haya realizado en el polígono Llano?

b) El famoso piloto de carreras Fernando Osnola es capaz de completar una vuelta a un circuito en un tiempo que sigue una distribución normal de media 1,5 minutos y desviación típica 0,15 minutos.

**b.1)** ¿Cuál es la probabilidad de que complete una vuelta en menos de 1,35 minutos?

**b.2)** ¿Cuál sería el tiempo exacto que es mayor que el 85,08 % de los tiempos realizados al completar una vuelta al circuito?

| a | 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.04 | 0.05 | 0.06 | 0.07 | 0.08 | 0.09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.90 | 0.8159 | 0.8186 | 0.8212 | 0.8238 | 0.8264 | 0.8289 | 0.8315 | 0.8340 | 0.8365 | 0.8389 |
| 1.00 | 0.8413 | 0.8438 | 0.8461 | 0.8485 | 0.8508 | 0.8531 | 0.8554 | 0.8577 | 0.8599 | 0.8621 |
| 1.10 | 0.8643 | 0.8665 | 0.8686 | 0.8708 | 0.8729 | 0.8749 | 0.8770 | 0.8790 | 0.8810 | 0.8830 |
| 1.20 | 0.8849 | 0.8869 | 0.8888 | 0.8907 | 0.8925 | 0.8944 | 0.8962 | 0.8980 | 0.8997 | 0.9015 |
| 1.30 | 0.9032 | 0.9049 | 0.9066 | 0.9082 | 0.9099 | 0.9115 | 0.9131 | 0.9147 | 0.9162 | 0.9177 |
| 1.40 | 0.9192 | 0.9207 | 0.9222 | 0.9236 | 0.9251 | 0.9265 | 0.9279 | 0.9292 | 0.9306 | 0.9319 |
| 1.50 | 0.9332 | 0.9345 | 0.9357 | 0.9370 | 0.9382 | 0.9394 | 0.9406 | 0.9418 | 0.9429 | 0.9441 |
| 1.60 | 0.9452 | 0.9463 | 0.9474 | 0.9484 | 0.9495 | 0.9505 | 0.9515 | 0.9525 | 0.9535 | 0.9545 |
| 1.70 | 0.9554 | 0.9564 | 0.9573 | 0.9582 | 0.9591 | 0.9599 | 0.9608 | 0.9616 | 0.9625 | 0.9633 |

**5. a)** Calcula la siguiente integral:

$$\int \frac{dx}{(1-3x)^{1/2}-(1-3x)^{2/3}}$$

Puedes utilizar el cambio de variable $1-3x=t^6$.

**b)** Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 0\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$. Sin calcular $A^{-1}$, razona por qué $A^{-1}$ existe, y discute si la matriz $A^{-1}B$ tiene inversa.

**6. a)** Calcula el siguiente límite:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{5x+1}{5x}\right)^{x^2}$$

**b)** Calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(2,1,3)$ y cuyo vector director es perpendicular a los vectores $\vec{u}=(2,2,0)$ y $\vec{v}=(0,0,-1)$.

**7. a)** Sea la función $f(x)=x^3+3x^2+x+3$. Obtén sus máximos y mínimos relativos.

**b)** Una urna contiene cuatro bolas numeradas del 1 al 4. Se extraen al azar dos bolas sin reemplazamiento y se obtiene una puntuación igual a la suma de los valores correspondientes.

**b.1)** ¿Cuál es la probabilidad de que la puntuación obtenida sea de 3?

**b.2)** ¿Cuál es la probabilidad de que la puntuación sea mayor de 3?

**8. a)** Sea la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$. Calcula el rango de $A$.

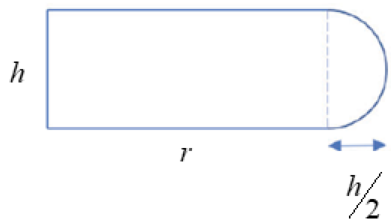
**b)** Sea la recta $r$ definida por la intersección de los planos $\pi_1 \equiv x+y+z=1$ y $\pi_2 \equiv y+2z=1$. Por otro lado, consideramos el plano $\pi_3 \equiv 2x+y=1$. Determina la posición relativa de la recta $r$ y el plano $\pi_3$. El resultado del apartado anterior te puede ayudar.

# Julio de 2023

**1.** Sea el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} -2x + y - z = -1 \\ -x + ay + z = 2 \\ 2x + y + az = 3 \end{cases}$ con $a \in \mathbb{R}$.

**a)** Discute cómo es el sistema en función de los valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$.
**b)** Resuelve razonadamente el sistema anterior para $a=1$, si es posible.

**2.** Una empresa desea construir un aparcamiento para sus empleados y necesita vallarlo de manera que la región resultante sea un rectángulo más medio círculo, tal y como se ve en la figura adjunta. El rectángulo tiene de lados $h, r \in \mathbb{R}$, de manera que el radio del semicírculo es $\frac{h}{2}$. La empresa tiene solamente presupuesto para comprar una valla de 80 metros de longitud, que ha de ser el perímetro del aparcamiento con la mayor área posible con ese perímetro de 80 metros.




**a)** Escribe el área del aparcamiento en función del valor $h$.
**b)** ¿Cuánto deben valer $h$ y $r$ para que el área del aparcamiento sea lo mayor posible?

**3.** **a)** Tenemos dos urnas con bolas. La urna A tiene 6 bolas rojas y 8 negras y la urna b tiene 8 bolas rojas y 10 bolas negras. Disponemos de un dado de 12 caras numeradas del 1 al 12. Lanzamos el dado y si sale un número múltiplo de 4 se extrae una bola de la urna A. Si sale otro número se extrae una bola de la urna B. Calcula, razonadamente:

**a.1)** La probabilidad de obtener una bola roja.
**a.2)** Sabiendo que la bola extraída es roja, la probabilidad de que haya sido extraída de la urna A.

**b)** Una empresa de mensajería sabe que la probabilidad de que el destinatario esté ausente (y no se pueda hacer la entrega) durante el reparto es del 25 %. Un repartidor de esta empresa ha de entregar 6 paquetes.

**b.1)** ¿Cuál es la probabilidad de que no pueda entregar uno de ellos porque el destinatario esté ausente?
**b.2)** ¿Cuál es la probabilidad de que pueda entregar al menos uno de los paquetes?

| n | k \ p | 0.05 | 0.15 | 0.25 | 0.35 | 0.45 | 0.55 | 0.65 | 0.75 | 0.85 | 0.95 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 0 | 0.7351 | 0.3771 | 0.1780 | 0.0754 | 0.0277 | 0.0083 | 0.0018 | 0.0002 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 1 | 0.2321 | 0.3993 | 0.3560 | 0.2437 | 0.1359 | 0.0609 | 0.0205 | 0.0044 | 0.0004 | 0.0000 |
| | 2 | 0.0305 | 0.1762 | 0.2966 | 0.3280 | 0.2780 | 0.1861 | 0.0951 | 0.0330 | 0.0055 | 0.0001 |
| | 3 | 0.0021 | 0.0415 | 0.1318 | 0.2355 | 0.3032 | 0.3032 | 0.2355 | 0.1318 | 0.0415 | 0.0021 |
| | 4 | 0.0001 | 0.0055 | 0.0330 | 0.0951 | 0.1861 | 0.2780 | 0.3280 | 0.2966 | 0.1762 | 0.0305 |
| | 5 | 0.0000 | 0.0004 | 0.0044 | 0.0205 | 0.0609 | 0.1359 | 0.2437 | 0.3560 | 0.3993 | 0.2321 |
| | 6 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0002 | 0.0018 | 0.0083 | 0.0277 | 0.0754 | 0.1780 | 0.3771 | 0.7351 |

**4.** Sean el plano $\pi \equiv ax + y - z = 1$, con $a \in \mathbb{R}$, y los puntos $A(1,0,0)$ y $B(b,1,-1)$, con $b \in \mathbb{R}$.

**a)** Determina el valor de $a, b \in \mathbb{R}$ para que el vector $\overrightarrow{AB}$ sea perpendicular al plano $\pi$ y el punto $A$ esté contenido en el plano $\pi$.

**b)** Con los valores de $a, b \in \mathbb{R}$ obtenidos en el apartado anterior, escribe la ecuación de la recta que pasa por $A$ y es perpendicular al plano $\pi$.

**5. a)** Encontrar el área encerrada por la recta $x = -1$ y las gráficas de las funciones $f(x) = x^2 - 2x + 3$ y $g(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1$.

**b)** Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & a \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & a+1 & a+1 \end{pmatrix}$ con $a \in \mathbb{R}$. Estudia el rango de $A$ en función de los valores de $a$.

**6. a)** Calcula el siguiente límite:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 9}{3x - 9}$$

**b)** Sean el punto $A(1,2,1)$ y el plano $\pi \equiv x - y = 1$. Calcula la distancia del punto $A$ al plano $\pi$.

**7. a)** Resuelve la siguiente integral:

$$\int (x+3)e^{-2x}dx$$

**b)** En un juego de azar cada jugador tira un dado de seis caras. Si sale un 1 vuelve a tirar. Si sale otro resultado deja de tirar y la puntuación obtenida es el número de unos obtenidos durante las tiradas.

**b.1)** ¿Cuál es la probabilidad de no obtener ningún uno? ¿Cuál es la probabilidad de obtener una puntuación de uno? ¿Y la de obtener una puntuación de tres?

**b.2)** ¿Podrías dar la probabilidad de obtener una puntuación $n \in \mathbb{N}$?

**8.** **a)** Sabiendo que $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 6$ con $a,b,c,x,y,z \in \mathbb{R}$. Calcula el valor de $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ a+2 & b+6 & c+10 \\ 4x & 4y & 4z \end{vmatrix}$ e indica en cada paso las propiedades que utilizas.

**b)** Calcula el ángulo que forman los vectores $\vec{u} = (1,1,1)$ y $\vec{v} = (3,2,3)$.

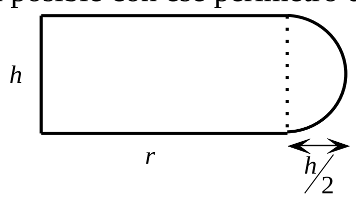
# Modelo 1 de 2024

**1.** En una joyería hay 120 piezas de El Señor de los Anillos entre Anillos Únicos, Broches Hoja y Colgantes de Arwen. Sabemos que hay 20 Anillos menos que la suma de los Broches y los Colgantes. También sabemos que los Anillos y los Colgantes suman lo mismo que el número de Broches multiplicado por un número indeterminado ($t \in \mathbb{R}$).

**a)** Plantea el sistema de ecuaciones que permite resolver el problema y estudia las soluciones dependiendo de los valores de *t*.

**b)** Resuelve razonadamente el sistema anterior para $t = 4$, si es posible.

**2.** Una empresa desea construir un aparcamiento para sus empleados y necesita vallarlo de manera que la región resultante sea un rectángulo más medio círculo, tal y como se ve en la figura adjunta. El rectángulo tiene de lados $h, r \in \mathbb{R}$, de manera que el radio del semicírculo es $\frac{h}{2}$. La empresa tiene solamente presupuesto para comprar una valla de 80 metros de longitud, que ha de ser el perímetro del aparcamiento con la mayor área posible con ese perímetro de 80 metros.



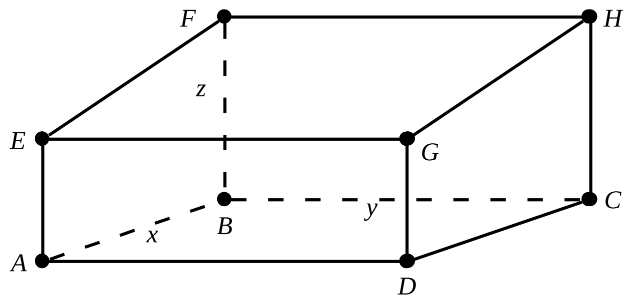

**a)** Escribe el área del aparcamiento en función del valor $h$.

**b)** ¿Cuánto deben valer $h$ y $r$ para que el área del aparcamiento sea lo mayor posible?

**3.** Para transportar a su mascota, Frank ha fabricado una caja, según puede verse en la figura adjunta. La tapa de arriba de la caja viene definida por los puntos $E(3,0,2)$, $F(0,0,4)$, $G(3,a,b)$ y $H(0,6,4)$ con $a,b \in \mathbb{R}$.

**a)** ¿Qué deben cumplir los valores $a,b \in \mathbb{R}$ para que la parte de arriba de la caja forme un plano.

**b)** Suponiendo que la parte de arriba de la caja es un plano, determina los valores $a,b \in \mathbb{R}$ para que los lados $EG$ y $GH$ formen un ángulo de 90º y, $E$ y $G$ sean distintos.




**4.** **a)** Sea la función

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & \text{si} \quad x<1 \\ e^{x-a} & \text{si} \quad x\geq 1 \end{cases}$$

con $a\in\mathbb{R}$. Estudia la continuidad de $f(x)$ e indica de qué tipo son sus discontinuidades (si las hubiera) para los distintos valores del parámetro $a\in\mathbb{R}$.

**b)** Sean los planos $\pi_1 \equiv -x+y+2z=1$ y $\pi_2 \equiv 2y+z=-1$. Determina la ecuación del plano perpendicular a los planos $\pi_1$ y $\pi_2$, y que pasa por el punto $A(0,1,1)$.

**5.** **a)** En el primer curso de un grado en ingeniería industrial los alumnos deben cursar una asignatura de estadística y otra de física. Se sabe que la probabilidad de que un alumno apruebe estadística es del 60 % mientras que la probabilidad de que apruebe física es del 50 %. Además, se sabe que la probabilidad de que aprueben las dos es del 40 %.

**a.1)** ¿Cuál es la probabilidad de que un alumno apruebe estadística o física?

**a.2)** Si un alumno ha aprobado física, ¿cuál es la probabilidad de que haya aprobado estadística?

**b)** En el huerto urbano "Turdus merula" producen compost para abonar los cultivos. Han observado que la cantidad de compost que se produce cada temporada sigue una distribución normal de media 40 kg y varianza 4 kg$^2$.

**b.1)** ¿Cuál es la probabilidad de que en una temporada se produzcan más de 43 kg de compost?

**b.2)** ¿Cuál es la cantidad exacta de compost que es menor que el 79.95 % más grande de las cantidades de compost producidas en otras temporadas?

| $a$ | 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.04 | 0.05 | 0.06 | 0.07 | 0.08 | 0.09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.7 | 0.758036 | 0.761148 | 0.764238 | 0.767305 | 0.770350 | 0.773373 | 0.776373 | 0.779350 | 0.782305 | 0.785236 |
| 0.8 | 0.788145 | 0.791030 | 0.793892 | 0.796731 | 0.799546 | 0.802337 | 0.805105 | 0.807850 | 0.810570 | 0.813267 |
| 0.9 | 0.815940 | 0.818589 | 0.821214 | 0.823814 | 0.826391 | 0.828944 | 0.831472 | 0.833977 | 0.836457 | 0.838913 |
| 1.0 | 0.841345 | 0.843752 | 0.846136 | 0.848495 | 0.850830 | 0.853141 | 0.855428 | 0.857690 | 0.859929 | 0.862143 |
| 1.1 | 0.864334 | 0.866500 | 0.868643 | 0.870762 | 0.872857 | 0.874928 | 0.876976 | 0.879000 | 0.881000 | 0.882977 |
| 1.2 | 0.884930 | 0.886861 | 0.888768 | 0.890651 | 0.892512 | 0.894350 | 0.896165 | 0.897958 | 0.899727 | 0.901475 |
| 1.3 | 0.903200 | 0.904902 | 0.906582 | 0.908241 | 0.909877 | 0.911492 | 0.913085 | 0.914657 | 0.916207 | 0.917736 |
| 1.4 | 0.919243 | 0.920730 | 0.922196 | 0.923641 | 0.925066 | 0.926471 | 0.927855 | 0.929219 | 0.930563 | 0.931888 |
| 1.5 | 0.933193 | 0.934478 | 0.935745 | 0.936992 | 0.938220 | 0.939429 | 0.940620 | 0.941792 | 0.942947 | 0.944083 |

**6.** **a)** Calcula la siguiente integral:

$$\int \frac{dx}{(1-3x)^{1/2}-(1-3x)^{2/3}}$$

Puedes utilizar el cambio de variable $1-3x=t^6$.

**b)** Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\2&0&0\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\2&1&1\end{pmatrix}$. Sin calcular $A^{-1}$, razón por qué $A^{-1}$ existe, y discute si la matriz $A^{-1}B$ tiene inversa.

**7. a)** Resuelve la siguiente integral:

$$\int (x+3)e^{-2x}dx$$

**b)** En un juego de azar cada jugador tira un dado de seis caras. Si sale un 1 vuelve a tirar. Si sale otro resultado deja de tirar y la puntuación obtenida es el número de unos obtenidos durante las tiradas.

**b.1)** ¿Cuál es la probabilidad de no obtener ningún uno? ¿Cuál es la probabilidad de obtener una puntuación de uno? ¿Y la de obtener una puntuación de tres?

**b.2)** ¿Podrías dar la probabilidad de obtener una puntuación $n\in\mathbb{N}$?

**8. a)** Sea la matriz $A=\begin{pmatrix}a&1&1\\2&a&0\\0&1&1\end{pmatrix}$. Determina para qué valores de $a\in\mathbb{R}$ la matriz $A$ es invertible.

**b)** Sean los planos $\pi_1\equiv ax+y+2z=1$ y $\pi_2\equiv by+z=-1$, con $a,b\in\mathbb{R}$. ¿Qué deben cumplir $a,b\in\mathbb{R}$ para que los planos no sean perpendiculares?

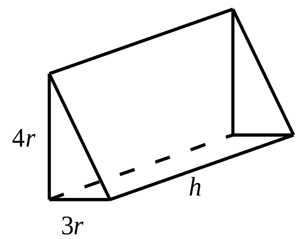
# Modelo 2 de 2024

**1.** Tres lápices, un cuaderno y una agenda han costado 5 euros, lo mismo que dos cuadernos y una agenda.

**a)** Plantea el sistema de ecuaciones que permita determinar cuánto vale un lápiz, un cuaderno y una
agenda.

**b)** ¿Podemos saber el precio de cada artículo si ninguno es gratis y en céntimos todos son múltiplos de 50? En caso de que se pueda, obtén los precios correspondientes. En caso de que no se puede, justifica por qué no.

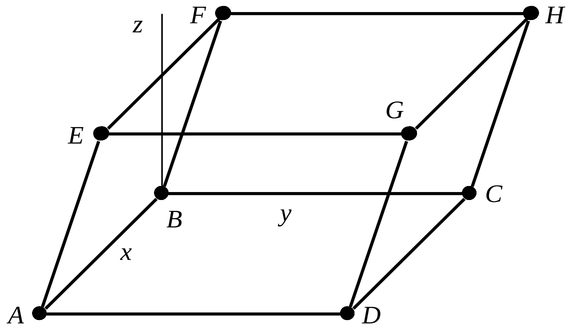
**2.** Una carpintera debe diseñar una caja con forma de prisma de altura *h* y cuya base sea un triángulo rectángulo de base $3r$ y altura $4r$, tal y como se puede ver en la figura adjunta. Además, la carpintera debe asegurarse de que el área de la superficie sea de 36 cm$^2$ y su volumen lo mayor posible.




**a)** Escribe el volumen de la caja en función del valor *r*.

**b)** ¿Cuánto deben valer $h$ y $r$ para que el volumen de la caja sea lo mayor posible?

**3.** Un arquitecto desea diseñar un edificio con la forma de paralelepípedo que se ve en la figura de abajo:




Sean los vectores $\overrightarrow{BA}=(a,b,0)$, $\overrightarrow{BC}=(0,80,0)$ y $\overrightarrow{BF}=(0,10,c)$, con $a,b,c\in\mathbb{R}^+$. Todos los valores están en metros.

**a)** Según el diseño de la figura anterior, el vector $\overrightarrow{BA}$ ha de ser perpendicular a los vectores $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{BF}$. ¿Qué den cumplir los valores $a,b,c\in\mathbb{R}^+$ para que esto ocurra?

**b)** Teniendo en cuenta las condiciones del apartado anterior, calcula los valores de $a,b,c\in\mathbb{R}^+$, para que la longitud de $A$ a $B$ sea de 40 m y el volumen del edificio sea de 3 200 metros cúbicos.

**4.** **a)** Una fábrica posee dos robots (A y B) para soldar piezas en la línea de producción. El robot A procesa el 60 % de las piezas mientras que el robot B procesa el 40 % restante. El 10 % de las piezas procesadas por el robot A presenta algún defecto de soldadura mientras que el 5 % de las piezas procesadas por el robot B presenta algún defecto.

**a.1)** ¿Cuál es la probabilidad de que una pieza producida en esa línea de producción presente un defecto de soldadura?

**a.2)** Si una pieza se ha producido sin defectos, ¿cuál es la probabilidad de que la haya procesado el robot A?

**b)** En un examen de oposición solamente el 30 % de los candidatos aprueba. Un tribunal evalúa a 6 opositores.

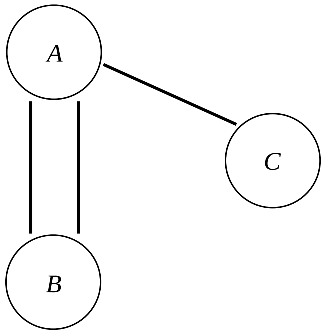
**b.1)** ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente tres opositores no aprueben?

**b.2)** ¿Cuál es la probabilidad de que al menos un opositor apruebe?

| **n** | **k \ p** | **0.10** | **0.20** | **0.30** | **0.40** | **0.50** | **0.60** | **0.70** | **0.80** | **0.90** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **6** | **0** | 0.5314 | 0.2621 | 0.1176 | 0.0467 | 0.0156 | 0.0041 | 0.0007 | 0.0001 | 0.0000 |
| | **1** | 0.3543 | 0.3932 | 0.3025 | 0.1866 | 0.0937 | 0.0369 | 0.0102 | 0.0015 | 0.0001 |
| | **2** | 0.0984 | 0.2458 | 0.3241 | 0.3110 | 0.2344 | 0.1382 | 0.0595 | 0.0154 | 0.0012 |
| | **3** | 0.0146 | 0.0819 | 0.1852 | 0.2765 | 0.3125 | 0.2765 | 0.1852 | 0.0819 | 0.0146 |
| | **4** | 0.0012 | 0.0154 | 0.0595 | 0.1382 | 0.2344 | 0.3110 | 0.3241 | 0.2458 | 0.0984 |
| | **5** | 0.0001 | 0.0015 | 0.0102 | 0.0369 | 0.0938 | 0.1866 | 0.3025 | 0.3932 | 0.3543 |
| | **6** | 0.0000 | 0.0001 | 0.0007 | 0.0041 | 0.0156 | 0.0467 | 0.1176 | 0.2621 | 0.5314 |

**5.** **a)** Hallar el volumen de un cuerpo de revolución obtenido al hacer girar alrededor del eje OX el recinto acotado por la gráfica de la función $f(x) = 3x$ entre las abscisas $x = 0$ y $x = 2$.

**b)** El grafo siguiente muestra las conexiones por carretera entre las poblaciones $A$, $B$ y $C$. Halla la matriz $G$ asociada al grafo y calcula $G + G^2$. ¿Cuántas formas posibles existen de ir de $A$ a $C$ haciendo como máximo una escala (es decir, recorriendo un camino de dos aristas o menos)?




**6.** **a)** Calcula el área de la región delimitada por $f(x) = 6x - 4$ y $g(x) = x^2 + 4$.

**b)** Sean el punto $A(2,1,1)$ y la recta $r \equiv \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z+3}{2}$. Calcula la distancia del punto $A$ a la recta $r$.

**7.** **a)** Las ganancias (en millones de euros) de una empresa durante el primer año vienen dadas por la función $f(t) = 4 - t(1-t)e^{t^2}$, donde $t \in [0,1]$ representa el tiempo en años. Sin calcularlo directamente, justifica que existe un extremo relativo en el período de tiempo $[0,1]$. ¿Se trata de una ganancia máxima o mínima? ¿Por qué?

**b)** En un concesionario de coches se sabe que la probabilidad de que un coche sea diésel es de 0,20 mientras que la de que sea de color rojo es de 0,10. Ambos sucesos son independientes.

b.1) ¿Cuál es la probabilidad de que un coche sea diésel y de un color distinto al rojo?

b.2) ¿Cuál es la probabilidad de que un coche sea diésel o rojo?

**8.** **a)** Calcula las matrices $A$ y $B$ que cumplan que $A + 2B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$ y $2A - B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 7 & -8 \end{pmatrix}$.

**b)** Determina el valor de $a \in \mathbb{R}$ para que los vectores $\vec{u} = (a,1,0)$ y $\vec{v} = (a,0,0)$ formen un ángulo de 45 º. Supón también que $a \neq 0$.

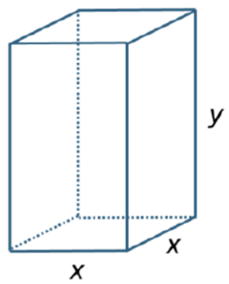
# Junio de 2024

**1.** Considera el siguiente sistema de ecuaciones, donde $a \in \mathbb{R}$: $\begin{cases} ax + 2y + z = 1 \\ 2x + ay + z = a \\ 5x + 2y + z = 1 \end{cases}$.

**a)** Discute el sistema de ecuaciones según los valores de $a$, e identifica el número de soluciones en cada caso.

**b)** Resuelve, razonadamente, el sistema de ecuaciones para $a = 1$.

**2.** Con el objetivo de reducir el coste, una cooperativa de aceite quiere diseñar unos envases con forma de prisma de base cuadrada con un volumen de 1 dm$^3$ (tal como se muestra en la figura adjunta) pero que tengan la mínima superficie.




**a)** Determina la función de la superficie del envase en función de $x$ (incluidas las dos bases).
**b)** Calcula, razonadamente, los valores de $x$ e $y$, para que la superficie sea mínima.
**c)** Con los datos obtenidos en los apartados anteriores, determina la superficie de cada envase y su coste, sabiendo que el material tiene un precio de 5 euros el dm$^2$.

**3.** Carla está diseñando el tejado de una casa con GeoGebra. Para ello, debe unir una viga que tiene de extremos los puntos de coordenadas $A(2,-1,3)$ y $B(-2,4,5)$.
**a)** Determina la ecuación de la recta que representa la viga.
**b)** ¿Cuál es la longitud de la viga?
**c)** Si se quiere colocar una placa metálica triangular de vértices los puntos $A$, $B$ y $C(0,0,1)$. Determina el área de la placa triangular.

**4. a)** Calcula el siguiente límite: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-1}{x^2+3}$.

b) Estudia el rango de la matriz $A=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\2&0&2&1\\a&1&0&1\end{pmatrix}$ en función de los valores de $a\in\mathbb{R}$.

**5. a)** Calcula la siguiente integral: $\int x\sqrt{2x+3}\,dx$. Puedes utilizar el cambio de variable $t=\sqrt{2x+3}$.

**b)** Sean los vectores $\vec{u}=(1,a,0)$ y $\vec{v}=(-1,0,2)$, con $a\in\mathbb{R}$. Determina el valor de $a$ para que el ángulo entre los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sea de 60º.

**6. a)** Calcula los coeficientes $a,b,c\in\mathbb{R}$ de la función $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ tal que tenga un extremo relativo en el punto de abscisa $x=2$ y un punto de inflexión en $P(1,2)$. Justifica tu respuesta.
**b)** Sean los sucesos $A$ y $B$ tales que $P(A)=0,2$, $P(A\cap B)=0,1$ y $P(A\cup B)=0,3$. Calcula:

**b1)** $P(B)$ y $P(A\cap\overline{B})$, con $\overline{B}$ el suceso complementario de $B$.

**b2)** $P\left(A/_{B}\right)$ y $P\left(B/_{A}\right)$.

**7.** **a)** Sea la matriz $A=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, con $a \in \mathbb{R}$. ¿Existe algún valor de $a$ para el que la matriz $A$ y su inversa sean iguales? Si es así, indica cuáles. Justifica tu respuesta.

**b)** Calcula la ecuación de la recta que contiene al punto $A(1,0,0)$ y que es perpendicular a los vectores $\vec{u}=(1,2,1)$ y $\vec{v}=(1,0,0)$.

**8.** **a)** En un club se juegan tres deportes. Cada socio solo puede apuntarse a un único deporte. El 60 % juega al tenis, el 25 % practica natación y el resto, golf. En los campeonatos locales, han obtenido algún premio el 21 % de los socios que juegan al tenis, el 30 % de los que practican natación y el 12 % de los que practican el golf.

**a.1)** Calcula la probabilidad de que uno de los socios, seleccionado al azar, haya obtenido algún premio.

**a.2)** Sabiendo que un socio ha obtenido algún premio en los campeonatos locales, calcula la probabilidad de que practique natación.

**b)** El tiempo que una persona sana invierte en recorrer 5 km sigue una distribución normal de media 60 minutos y una desviación típica de 8 minutos.

**b.1)** ¿Cuál es la probabilidad de que una persona sana invierta menos de 50 minutos?

**b.2)** ¿Cuál es la probabilidad de que una persona sana invierta entre 50 y 66 minutos?

| z | 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.04 | 0.05 | 0.06 | 0.07 | 0.08 | 0.09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.50 | 0.6915 | 0.6950 | 0.6985 | 0.7019 | 0.7054 | 0.7088 | 0.7123 | 0.7157 | 0.7190 | 0.7224 |
| 0.60 | 0.7257 | 0.7291 | 0.7324 | 0.7357 | 0.7389 | 0.7422 | 0.7454 | 0.7486 | 0.7517 | 0.7549 |
| 0.70 | 0.7580 | 0.7611 | 0.7642 | 0.7673 | 0.7704 | 0.7734 | 0.7764 | 0.7794 | 0.7823 | 0.7852 |
| 0.80 | 0.7881 | 0.7910 | 0.7939 | 0.7967 | 0.7995 | 0.8023 | 0.8051 | 0.8078 | 0.8106 | 0.8133 |
| 0.90 | 0.8159 | 0.8186 | 0.8212 | 0.8238 | 0.8264 | 0.8289 | 0.8315 | 0.8340 | 0.8365 | 0.8389 |
| 1.00 | 0.8413 | 0.8438 | 0.8461 | 0.8485 | 0.8508 | 0.8531 | 0.8554 | 0.8577 | 0.8599 | 0.8621 |
| 1.10 | 0.8643 | 0.8665 | 0.8686 | 0.8708 | 0.8729 | 0.8749 | 0.8770 | 0.8790 | 0.8810 | 0.8830 |
| 1.20 | 0.8849 | 0.8869 | 0.8888 | 0.8907 | 0.8925 | 0.8944 | 0.8962 | 0.8980 | 0.8997 | 0.9015 |
| 1.30 | 0.9032 | 0.9049 | 0.9066 | 0.9082 | 0.9099 | 0.9115 | 0.9131 | 0.9147 | 0.9162 | 0.9177 |

# Julio de 2024

**1.** Una heladería vende helados de una, dos y tres bolas a uno, dos y tres euros, respectivamente. El viernes ha vendido 157 helados obteniendo 278 euros. También sabemos que el número de helados de una bola vendidos es $k$ veces el número de helados de tres bolas, con $k > 0$.

**a)** Plantea un sistema de ecuaciones lineales cuya resolución permita determinar el número de helados vendidos de cada tipo.

**b)** Estudia para qué valores del parámetro k el sistema tiene solución única. Para los casos en los que el sistema tiene solución única, ¿es posible que en alguno de ellos se hayan vendido el mismo número de helados de una bola que de tres bolas? Justifica tu respuesta.

**2.** Sea la función $f(x)=\begin{cases} x^2+2x+1 & \text{si} \quad x<3 \\ \dfrac{2x}{x-4} & \text{si} \quad x\geq 3 \end{cases}$.

**a)** Estudia la continuidad de la función y, en caso de existir, indica y clasifica el tipo de discontinuidades.

**b)** Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x=2$.

**3.** Se quiere instalar un toldo que pase por el punto de coordenadas $A(2,1,1)$ y que sea perpendicular a una barra metálica de ecuación $r\equiv\begin{cases} 2x-y+z=3 \\ x-z=1 \end{cases}$.

**a)** Determina la ecuación del plano que define el toldo.

**b)** Si se quiere colocar un foco en el punto de coordenadas $F(2,-2,1)$. ¿A qué distancia se encuentra del plano que define el toldo?

**4. a)** Calcula la siguiente integral: $\int \frac{2x^2}{x^2+1}dx$

**b)** Sea la matriz $A=\begin{pmatrix} a & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, con $a\in\mathbb{R}$. Calcula el determinante de $A$ y de $AA$. ¿Cuál crees que será el determinante del producto de $n$ veces (con $n>2$ y entero)? Justifica y razona tu respuesta.

**5. a)** Calcula el volumen de la región generada al girar la función $f(x)=x$ entre los puntos $x=2$ y $x=3$ con respecto al eje $X$.

**b)** Estudia la posición relativa de los siguientes planos: $\pi_1\equiv x+y=1$, $\pi_2\equiv x+y+z=2$ y $\pi_3\equiv z=0$

**6. a)** Calcula el siguiente límite:

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^3+2x^2+x+2}{x^2+2x}$$

**b)** En un mazo hay 40 cartas. De estas, 4 están marcadas solo con un punto verde, 5 solo con un punto rojo y 7 están marcadas con los dos puntos (verde y rojo).

**b.1)** ¿Cuál es la probabilidad de sacar dos cartas sin reemplazamiento y que ambas tengan un punto verde?

**b.2)** Si saco una carta y tiene un punto verde, ¿cuál es la probabilidad de que tenga también un punto rojo?

En ambos apartados se considera que una carta tiene un punto verde si tiene solo un punto verde o también si tiene un punto verde y otro rojo.

**7.** **a)** Sea el determinante $\begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$. Calcula razonadamente el valor del siguiente determinante: $\begin{vmatrix} x+a & y+b & z+c \\ 2a & 2b & 2c \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

**b)** Obtén la ecuación de la recta que es paralela a la recta $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z}{-2}$ y contine al punto $A(0,1,0)$.

**8. a)** Se tienen tres cajas A, B y C. En la caja A hay dos cartas de espadas y tres de copas. En la caja B, tres cartas de espadas y dos de copas y en la caja C, cuatro de espadas y una de copas. Se tira un dado de seis caras y, si el resultado es impar, se saca una carta de la caja A; si el resultado es 4 o 6, se saca una carta de la caja B y, si el resultado es 2, se saca una carta de la caja C.

**a.1)** Calcula la probabilidad de que se obtenga una carta de copas.

**a.2)** Sabiendo que la carta extraída es de copas, ¿cuál es la probabilidad que se haya extraído de la caja B?

**b)** La probabilidad de que un paracaidista novato caiga en el punto correcto es de 0,25. Si se lanza 5 veces, determina:

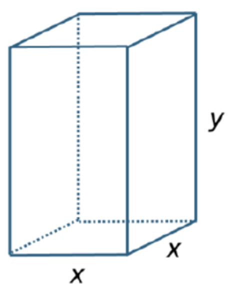
**b.1)** ¿Cuál es la probabilidad de que caiga en el punto correcto exactamente dos veces?

**b.2)** ¿Cuál es la probabilidad de que caiga en el punto correcto al menos una vez?

| | | *p* | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **n** | **k** | **0.1** | **0.15** | **0.2** | **0.25** | **0.3** | **0.35** | **0.4** | **0.45** | **0.5** |
| 5 | 0 | 0.5905 | 0.4437 | 0.3277 | 0.2373 | 0.1681 | 0.1160 | 0.0778 | 0.0503 | 0.0313 |
| | 1 | 0.3281 | 0.3915 | 0.4096 | 0.3955 | 0.3602 | 0.3124 | 0.2592 | 0.2059 | 0.1563 |
| | 2 | 0.0729 | 0.1382 | 0.2048 | 0.2637 | 0.3087 | 0.3364 | 0.3456 | 0.3369 | 0.3125 |
| | 3 | 0.0081 | 0.0244 | 0.0512 | 0.0879 | 0.1323 | 0.1811 | 0.2304 | 0.2757 | 0.3125 |
| | 4 | 0.0005 | 0.0022 | 0.0064 | 0.0146 | 0.0284 | 0.0488 | 0.0768 | 0.1128 | 0.1563 |
| | 5 | 0.0000 | 0.0001 | 0.0003 | 0.0010 | 0.0024 | 0.0053 | 0.0102 | 0.0185 | 0.0313 |

# Modelo 0 de 2025

**Ejercicio 1.** Con el objetivo de reducir el coste, una cooperativa de aceite quiere diseñar unos envases con forma de prisma de base cuadrada con un volumen de 1 $dm^3$ (tal como se muestra en la figura adjunta) pero que tengan la mínima superficie.




**a)** Determina la función de la superficie del envase en función de $x$ (incluidas las dos bases).

**b)** Calcula, razonadamente, los valores de $x$ e $y$, para que la superficie sea mínima.

**c)** Con los datos obtenidos en los apartados anteriores, determina la superficie de cada envase y su coste, sabiendo que el material tiene un precio de 5 euros el dm$^2$.

**Ejercicio 2:** Elige y resuelve unos de los dos apartados siguientes:

**Apartado a)** Carla está diseñando el tejado de una casa con GeoGebra. Para ello, debe unir una viga que tiene de extremos los puntos de coordenadas $A(2,-1,3)$ y $B(-2,4,5)$.

**a.1)** Determina la ecuación de la recta que representa la viga.

**a.2)** ¿Cuál es la longitud de la viga?

**a.3)** Si se quiere colocar una placa metálica triangular de vértices los puntos $A$, $B$ y $C(0,0,1)$. Determina el área de la placa triangular.

**Apartado b)** Resuelve los siguientes problemas:

**b.1)** Sean los vectores $\vec{u}=(1,a,0)$ y $\vec{v}=(-1,0,2)$, con $a\in\mathbb{R}$. Determina el valor de $a$ para que el ángulo entre los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sea de 60º.

**b.2)** Calcula la ecuación de la recta que contiene al punto $A(1,0,0)$ y que es perpendicular a los vectores $\vec{u}=(1,2,1)$ y $\vec{v}=(1,0,0)$.

**Ejercicio 3:** Elige y resuelve unos de los dos apartados siguientes:

**Apartado a)** Considera el siguiente sistema de ecuaciones, donde $a\in\mathbb{R}$: $\begin{cases} ax+2y+z=1 \\ 2x+ay+z=a \\ 5x+2y+z=1 \end{cases}$.

**a.1)** Discute el sistema de ecuaciones según los valores de $a$, e identifica el número de soluciones en cada caso.

**a.2)** Resuelve, razonadamente, el sistema de ecuaciones para $a=1$.

**Apartado b)** Sea la matriz $A=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, con $a\in\mathbb{R}$. ¿Existe algún valor de $a$ para el que la matriz $A$ y su inversa sean iguales? Si es así, indica cuáles. Justifica tu respuesta.

**Ejercicio 4:** Elige y resuelve unos de los dos apartados siguientes:

**Apartado a)** Resuelve los problemas siguientes:

**a.1)** Sean los sucesos $A$ y $B$ tales que $P(A)=0{,}2$, $P(A\cap B)=0{,}1$ y $P(A\cup B)=0{,}3$. Calcula:

- $P(B)$ y $P(A\cap\overline{B})$, con $\overline{B}$ el suceso complementario de $B$.
- $P\left(A/B\right)$ y $P\left(B/A\right)$

**a.2)** En un mazo hay 40 cartas. De estas, 4 están marcadas solo con un punto verde, 5 solo con un punto rojo y 7 están marcadas con los dos puntos (verde y rojo).

- ¿Cuál es la probabilidad de sacar dos cartas sin reemplazamiento y que ambas tengan un punto verde?

- Si saco una carta y tiene un punto verde, ¿cuál es la probabilidad de que tenga también un punto rojo?

En ambos apartados se considera que una carta tiene un punto verde si tiene solo un punto verde o también si tiene un punto verde y otro rojo.

**Apartado b)** Resuelve los siguientes problemas:

**b.1)** En un club se juegan tres deportes. Cada socio solo puede apuntarse a un único deporte. El 60 % juega al tenis, el 25 % practica natación y el resto, golf. En los campeonatos locales, han obtenido algún premio el 21 % de los socios que juegan al tenis, el 30 % de los que practican natación y el 12 % de los que practican el golf.

- Calcula la probabilidad de que uno de los socios, seleccionado al azar, haya obtenido algún premio.
- Sabiendo que un socio ha obtenido algún premio en los campeonatos locales, calcula la probabilidad de que practique natación.

**b.2)** El tiempo que una persona sana invierte en recorrer 5 km sigue una distribución normal de media 60 minutos y una desviación típica de 8 minutos.

- ¿Cuál es la probabilidad de que una persona sana invierta menos de 50 minutos?
- ¿Cuál es la probabilidad de que una persona sana invierta entre 50 y 66 minutos?

| z | 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.04 | 0.05 | 0.06 | 0.07 | 0.08 | 0.09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.50 | 0.6915 | 0.6950 | 0.6985 | 0.7019 | 0.7054 | 0.7088 | 0.7123 | 0.7157 | 0.7190 | 0.7224 |
| 0.60 | 0.7257 | 0.7291 | 0.7324 | 0.7357 | 0.7389 | 0.7422 | 0.7454 | 0.7486 | 0.7517 | 0.7549 |
| 0.70 | 0.7580 | 0.7611 | 0.7642 | 0.7673 | 0.7704 | 0.7734 | 0.7764 | 0.7794 | 0.7823 | 0.7852 |
| 0.80 | 0.7881 | 0.7910 | 0.7939 | 0.7967 | 0.7995 | 0.8023 | 0.8051 | 0.8078 | 0.8106 | 0.8133 |
| 0.90 | 0.8159 | 0.8186 | 0.8212 | 0.8238 | 0.8264 | 0.8289 | 0.8315 | 0.8340 | 0.8365 | 0.8389 |
| 1.00 | 0.8413 | 0.8438 | 0.8461 | 0.8485 | 0.8508 | 0.8531 | 0.8554 | 0.8577 | 0.8599 | 0.8621 |
| 1.10 | 0.8643 | 0.8665 | 0.8686 | 0.8708 | 0.8729 | 0.8749 | 0.8770 | 0.8790 | 0.8810 | 0.8830 |
| 1.20 | 0.8849 | 0.8869 | 0.8888 | 0.8907 | 0.8925 | 0.8944 | 0.8962 | 0.8980 | 0.8997 | 0.9015 |
| 1.30 | 0.9032 | 0.9049 | 0.9066 | 0.9082 | 0.9099 | 0.9115 | 0.9131 | 0.9147 | 0.9162 | 0.9177 |