INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente **cuatro** preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.**

CALIFICACIÓN: Cada pregunta se calificará sobre 2.5 puntos.
TIEMPO: 90 minutos.

A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Se tienen listones de madera de tres longitudes diferentes: largos, intermedios y cortos. Puestos uno tras otro, tanto con dos listones largos y cuatro intermedios como con tres intermedios y quince cortos se consigue la misma longitud total. Un listón largo supera en 17 cm la medida de uno intermedio más uno corto. Y con nueve listones cortos hemos de añadir 7 cm para igualar la longitud de uno intermedio seguido por uno largo. Se pide calcular la longitud de cada tipo de listón.

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Para la función $f(x) = x^4 + \pi x^3 + \pi^2 x^2 + \pi^3 x + \pi^4$, se pide:

a) (0.5 puntos) Calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $x = \pi$.

b) (1 punto) Probar que $f(x)$ tiene, al menos, un punto con derivada nula en el intervalo $(-\pi, 0)$ utilizando justificadamente el teorema de Rolle. Probar de nuevo la misma afirmación utilizando adecuadamente, esta vez, el teorema de Bolzano.

c) (1 punto) Si $g(x) = f(-x)$, calcular el área entre las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ en el intervalo $[0, \pi]$.

A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dados los puntos $A(0, 0, 1)$ y $B(1, 1, 0)$, se pide:

a) (1 punto) Hallar una ecuación del plano que pasa por los puntos A y B y es perpendicular al plano $z = 0$.

b) (1.5 puntos) Hallar ecuaciones de dos rectas paralelas, r_1 y r_2, que pasen por los puntos A y B respectivamente, estén en el plano $x + z = 1$ y tales que la distancia entre ellas sea 1.

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sabiendo que $P(\overline{A}) = \dfrac{11}{20}$, $P(A|B) - P(B|A) = \dfrac{1}{24}$ y $P(A \cap \overline{B}) = \dfrac{3}{10}$, se pide:

a) (1.5 puntos) Calcular $P(A \cap B)$ y $P(B)$.

b) (1 punto) Calcular $P(C)$, siendo C otro suceso del espacio muestral, independiente de A y que verifica que $P(A \cup C) = \dfrac{14}{25}$.

B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Consideremos las matrices reales $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b & 2b & b \\ 2b & 3b & b \\ b & b & b \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, con $b \neq 0$.

Se pide:

a) (1.25 puntos) Encontrar todos los valores de b para los que se verifica $BCB^{-1} = A$.

b) (0.75 puntos) Calcular el determinante de la matriz AA^t.

c) (0.5 puntos) Resolver el sistema $B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ para $b = 1$.

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Calcule:

a) (1.25 puntos) $\displaystyle\int_1^e (x+2)\ln x dx$.

b) (1.25 puntos) $\displaystyle\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(\mathrm{tg} \frac{x}{2} \right)^{\left(\frac{1}{\cos x}\right)}$.

B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Al ordenador de una impresora 3D se le suministraron ayer las coordenadas de los cuatro vértices P_1, P_2, P_3 y P_4 de un tetraedro sólido, el cual construyó al momento. Se sabe que $P_1(1,1,1)$, $P_2(2,1,0)$ y $P_3(1,3,2)$, pero del cuarto punto $P_4(3,a,3)$ hoy no estamos seguros del valor de su segunda coordenada.

a) (1.5 puntos) A partir de la cantidad de material utilizado por la impresora sabemos que el volumen del tetraedro es $V = 1$. También sabemos que la longitud de ninguna de sus aristas supera la altura de la impresora, que es de 10. Determine los posibles valores de a.

b) (1 punto) Dado el punto $Q(3,3,3)$, se quiere imprimir ahora el paralelepípedo que tiene a los segmentos P_1P_2, P_1P_3 y P_1Q como aristas. ¿Cuáles serían los valores de las coordenadas de los ocho vértices del paralelepípedo que habría que suministrar al ordenador?

B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Tenemos dos dados no trucados de seis caras, uno azul y uno rojo. Las caras están numeradas del 1 al 6. En un determinado juego, lanzamos los dos dados. Para calcular la puntuación obtenida, se sigue el siguiente procedimiento: si el número obtenido en el dado azul es par, se le suma el doble del número obtenido en el dado rojo; si el número obtenido en el dado azul es impar, se le suma el número obtenido en el dado rojo. Se pide:

a) (1 punto) Calcular la probabilidad de obtener una puntuación de 10. Calcular la probabilidad de obtener una puntuación impar.

b) (1.5 puntos) Calcular la probabilidad de haber obtenido un número par en el dado azul sabiendo que la puntuación final ha sido 8. Calcular la probabilidad de haber obtenido un número impar en el dado rojo sabiendo que la puntuación final ha sido un número par.

MATEMÁTICAS II

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN

En cada pregunta, aunque el procedimiento seguido sea diferente al propuesto en el documento de soluciones, cualquier argumento válido que conduzca a la solución será valorado con la puntuación asignada.
Los contenidos correspondientes al bloque F se evaluarán transversalmente en cualquiera de los ejercicios. Se penalizará en la calificación de cada respuesta la falta de justificación razonada o de precisión y se valorarán las estrategias, razonamientos y toma adecuada de decisiones.

A.1.

Correcto planteamiento del problema: 1.5 puntos (0.5 puntos por cada ecuación bien planteada). Resolución correcta del sistema planteado: 1 punto. En caso de resolución correcta de un sistema con alguna ecuación mal planteada, se valorará con hasta 0.5 puntos.

A.2.

a) Planteamiento: 0.25 puntos. Obtención de la ecuación de la recta: 0.25 puntos.
b) Planteamiento: 0.5 puntos (0.25 puntos por la versión que usa cada teorema). Resolución: 0.5 puntos (0.25 puntos por la versión que usa cada teorema).
c) Planteamiento: 0.5 puntos. Cálculo de primitivas: 0.25 puntos. Aplicación de la regla de Barrow: 0.25 puntos.

A.3.

a) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.
b) Planteamiento: 1 punto. Resolución: 0.5 puntos.

A.4.

a) Por cada probabilidad, 0.75 puntos (planteamiento: 0.5 puntos, resolución: 0.25 puntos).
b) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.

B.1.

a) Justificación de la existencia de B^{-1}: 0.5 puntos. Cálculo de b: 0.75 puntos (0.5 puntos por el planteamiento y 0.25 puntos por la solución correcta).
b) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.25 puntos.
c) Planteamiento: 0.25 puntos. Resolución: 0.25 puntos

B.2.

a) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.75 puntos.
b) Planteamiento: 1 punto. Solución del límite: 0.25 puntos.

B.3.

a) Planteamiento 0.5 puntos. Obtención de los dos valores de a: 0.5 puntos. Eliminación de $a = 15$ y comprobación de que $a = 3$ es válida: 0.5 puntos.
b) Planteamiento: 0.75 puntos. Resolución: 0.25 puntos.

B.4.

a) Para cada una de las dos probabilidades: planteamiento, 0.25 puntos; resolución, 0.25 puntos.
b) Para cada una de las dos probabilidades: planteamiento, 0.5 puntos; resolución, 0.25 puntos.

Junio 2024 – Madrid

Cipri

A1 x = longitud de los listones largos (cm)

y = " " " " intermedios (cm)

z = " " " " cortos (cm)

$$\left.\begin{array}{l} 2x+4y=3y+15z \\ x=17+y+z \\ 9x+7=y+x \end{array}\right\} \begin{array}{l} 2x+y-15z=0 \\ x-y-z=17 \\ -x-y+9z=-7 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 17 \\ -1 & -1 & 9 & -7 \\ 2 & 1 & -15 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[-2F_1+F_3]{F_1+F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 17 \\ 0 & -2 & 8 & 10 \\ 0 & 3 & -13 & -34 \end{array}\right) \xrightarrow{3F_2+2F_3}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 17 \\ 0 & -2 & 8 & 10 \\ 0 & 0 & -2 & -38 \end{array}\right) \begin{array}{c} [1] \\ [2] \\ [3] \end{array}$$

De [3]: $z=\frac{-38}{-2}=19$

Sustituimos en [2]: $y=\frac{10-8\cdot 19}{-2}=71$

Sustituimos en [1]: $x=17+71+19=107$

Solución: los listones largos miden 107 cm, los intermedios 71 cm y los cortos 19 cm

A2 $f(x)=x^4+\pi x^3+\pi^2x^2+\pi^3x+\pi^4$

a) Recta tangente a f en $x=\pi$

$$y-f(\pi)=f'(\pi)(x-\pi)$$

$$f(\pi)=\pi^4+\pi\cdot\pi^3+\pi^2\cdot\pi^2+\pi^3\cdot\pi+\pi^4=5\pi^4$$

$$f'(x)=4x^3+3\pi x^2+2\pi^2x+\pi^3$$

$$f'(\pi)=4\pi^3+3\pi\cdot\pi^2+2\pi^2\cdot\pi+\pi^3=10\pi^3$$

$$\boxed{y-5\pi^4=10\pi^3(x-\pi)}$$

b) Teorema de Rolle

f es continua y derivable en $\mathbb{R}$, por ser una función polinómica, luego, en particular, f es continua en $[-\pi, 0]$ y derivable en $(-\pi, 0)$

Además, $f(-\pi) = (-\pi)^4 + \pi\cdot(-\pi)^3 + \pi^2\cdot(-\pi)^2 + \pi^3(-\pi) + \pi^4 = \pi^4$

$f(0) = \pi^4$

Así, por el teorema de Rolle, $\exists c \in (-\pi, 0)$ t.q. $f'(c) = 0$

Teorema de Bolzano (hay que aplicarlo a f')

f' es continua y derivable en $\mathbb{R}$, por ser una función polinómica, luego, en particular, f' es continua en $[-\pi, 0]$ y derivable en $(-\pi, 0)$

Además, $f'(-\pi) = -2\pi^2 < 0$

$f'(0) = \pi^3 > 0$

Así, por el teorema de Bolzano, $\exists c \in (-\pi, 0)$ t.q. $f'(c) = 0$

c) $g(x) = f(-x) = x^4 - \pi x^3 + \pi^2 x^2 - \pi^3 x + \pi^4$

$f(x) = x^4 + \pi x^3 + \pi^2 x^2 + \pi^3 x + \pi^4$

Extremos de integración:

$f(x) = g(x) \Rightarrow \cancel{x^4} - \pi x^3 + \cancel{\pi^2 x^2} - \pi^3 x + \cancel{\pi^4} = \cancel{x^4} + \pi x^3 + \cancel{\pi^2 x^2} + \pi^3 x + \cancel{\pi^4}$

$\Rightarrow 2\pi x^3 + 2\pi^3 x = 0 \Rightarrow x(2\pi x^3 + 2\pi^3) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^3 = \dfrac{-2\pi^3}{2\pi} = -\pi^2 \Rightarrow x = \sqrt[3]{-\pi^2} \notin [0, \pi] \end{cases}$

Área

$A = \left| \int_0^{\pi} [f(x) - g(x)]\, dx \right| = |F(\pi) - F(0)| = \frac{\pi}{2}\pi^4 + \pi^3\pi^2 = \boxed{\frac{3}{2}\pi^5 \ u^2}$

$\int [f(x) - g(x)]\, dx = \int (2\pi x^3 + 2\pi^3 x)\, dx =$

$= \frac{2\pi}{4} x^4 + \frac{2\pi^3}{2} x^2 + C = F(x)$

Cipri

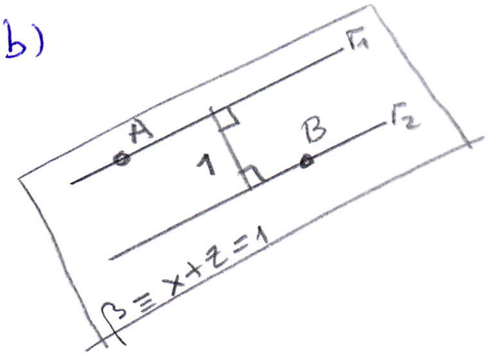
A3 a) $\pi \equiv \{A, \vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ donde $\vec{u}_1 = \vec{AB}$, $\vec{u}_2 \perp \alpha \equiv z = 0$

$$\vec{u}_1 = \vec{AB} = (1,1,0) - (0,0,1) = (1,1,-1)$$

$$\vec{u}_2 = \vec{n}_\alpha = (0,0,1)$$

$$\det\begin{pmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 1 & 0 \\ z-1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = x - y = 0 \Rightarrow \boxed{\pi \equiv x - y = 0}$$

b)



Como $r_1 \parallel r_2$, podemos tomar $\vec{u}_{r_1} = \vec{u}_{r_2} = (u_1, u_2, u_3)$

y como $r_1, r_2 \subset \beta \Rightarrow \vec{u}_{r_1} = \vec{u}_{r_2} \perp \vec{n}_\beta \Rightarrow$

$\Rightarrow (u_1, u_2, u_3) \cdot (1,0,1) = 0 \Rightarrow u_1 + u_3 = 0 \Rightarrow u_3 = -u_1$

$\Rightarrow \vec{u}_{r_1} = \vec{u}_{r_2} = (u_1, u_2, -u_1)$

Por otro lado, como $r_1 \parallel r_2 \Rightarrow d(r_1, r_2) = d(A, r_2) = \dfrac{|\vec{u}_{r_2} \times \vec{AB}|}{|\vec{u}_{r_2}|} = 1$

$\Rightarrow |\vec{u}_{r_2} \times \vec{AB}| = |\vec{u}_{r_2}|$

$$\vec{u}_{r_2} \times \vec{AB} = \det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & -u_1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = -u_1\vec{i} + u_1\vec{k} - u_1\vec{j} - u_2\vec{k} + u_1\vec{i} + u_1\vec{j} =$$

$$= (u_1 - u_2, 0, u_1 - u_2)$$

$$\left.\begin{array}{l} |\vec{u}_{r_2} \times \vec{AB}| = \sqrt{(u_1-u_2)^2 + (u_1-u_2)^2} \\ |\vec{u}_{r_2}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + (-u_1)^2} \end{array}\right\} \Rightarrow (u_1-u_2)^2 + (u_1-u_2)^2 = 2u_1^2 + u_2^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u_1^2 + u_2^2 - 2u_1u_2 + u_1^2 + u_2^2 - 2u_1u_2 = 2u_1^2 + u_2^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4u_1u_2 + u_2^2 = 0 \Rightarrow u_2(-4u_1 + u_2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} u_2 = 0 \\ -4u_1 + u_2 = 0 \Rightarrow u_2 = -4u_1 \end{cases}$$

Tenemos dos vectores, y, por tanto, dos pares de rectas que cumplen lo que se pide

$$\boxed{\vec{u}_{r_2} = (1,0,-1) \begin{cases} r_1 \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = 1 - \lambda \end{cases} \\ r_2 \equiv \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = 1 \\ z = 0 - \mu \end{cases} \end{cases}} \qquad \boxed{\vec{u}_{r_2} = (1,4,-1) \quad \begin{array}{l} r_1 \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 4\lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases} \\ r_2 \equiv \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = 1 + 4\mu \\ z = 0 - \mu \end{cases} \end{array}}$$

A4 $P(\overline{A}) = \frac{11}{20}$, $P(A/B) - P(B/A) = \frac{1}{24}$, $P(A \cap \overline{B}) = \frac{3}{20}$

a) • $P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{P(A \cap B)} = P(A) - P(A \cap \overline{B}) = \frac{9}{20} - \frac{3}{10} = \boxed{\frac{3}{20}}$$

• $P(A/B) - P(B/A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} - \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} =$

$$= \frac{\frac{3}{20}}{P(B)} - \frac{\frac{3}{20}}{\frac{9}{20}} = \frac{1}{24} \Rightarrow \frac{\frac{3}{20}}{P(B)} = \frac{1}{24} + \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{P(B)} = \frac{\frac{3}{20}}{\frac{1}{24} + \frac{1}{3}} = \boxed{\frac{2}{5}}$$

b) $P(A \cup C) = \frac{14}{25}$; A y C independientes

A y C independientes $\Leftrightarrow P(A \cap C) = P(A)P(C) = \frac{9}{20}P(C)$

$$\left.\begin{array}{l} P(A \cup C) = \frac{14}{25} \\ \qquad = P(A) + P(C) - P(A \cap C) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{14}{25} = \frac{9}{20} + P(C) - \frac{9}{20}P(C) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{P(C)} = \frac{\frac{14}{25} - \frac{9}{20}}{1 - \frac{9}{20}} = \boxed{\frac{1}{5}}$$

©ipri

B1 a) $A=\begin{pmatrix}3&-1&1\\1&1&1\\1&-1&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}b&2b&b\\2b&3b&b\\b&b&b\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$

$BCB^{-1}=A$ siempre que $\exists B^{-1}$

$BCB^{-1}B=AB$

$BC=AB$

$$BC=\begin{pmatrix}b&2b&b\\2b&3b&b\\b&b&b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2b&4b&3b\\4b&6b&3b\\2b&2b&3b\end{pmatrix}$$

$$AB=\begin{pmatrix}3&-1&1\\1&1&1\\1&-1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b&2b&b\\2b&3b&b\\b&b&b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2b&4b&3b\\4b&6b&3b\\2b&2b&3b\end{pmatrix}$$

luego $BC=AB\ \forall b\in\mathbb{R}$ siempre que $\exists B^{-1}$

$$\det B=\det\begin{pmatrix}b&2b&b\\2b&3b&b\\b&b&b\end{pmatrix}=b^3\det\begin{pmatrix}1&2&1\\2&3&1\\1&1&1\end{pmatrix}=-b^3=0\Rightarrow$$

$\Rightarrow b=0$

Por tanto, $\boxed{BCB^{-1}=A\quad\forall b\in\mathbb{R}-\{0\}}$

b) $$\det(AA^T)=\det\begin{pmatrix}11&3&7\\3&3&3\\7&3&11\end{pmatrix}=144$$

$$AA^T=\begin{pmatrix}3&-1&1\\1&1&1\\1&-1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1&1\\-1&1&-1\\1&1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11&3&7\\3&3&3\\7&3&11\end{pmatrix}$$

<u>De otra forma</u>

$\det(AA^T)=\det A\cdot\det A^T=(\det A)^2=12^2=144$

ya que $\det A=\det A^T$.

c) $B\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b=-1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[-F_1+F_3]{-2F_1+F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -7 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{c} [1] \\ [2] \\ [3] \end{array}$$

De [3]: $y = \frac{-2}{-1} = 2$

Sustituimos en [2]: $z = \frac{-7+2}{-1} = 5$

Sustituimos en [1]: $x = 3-5-2\cdot 2 = -6$

$$\boxed{\text{Solución } (x,y,z) = (-6,2,5)}$$

B2 a) $\int_1^e (x+2)\ln x\,dx = F(e) - F(1) =$

$= \frac{e^2}{2} + 2e - \frac{1}{4}e^2 - 2e - \left[\left(\frac{1}{2}+2\right)\ln 1 - \frac{1}{4} - 2\right] =$

$= \boxed{\frac{e^2}{4} + \frac{9}{4}}$

$$\int (x+2)\ln x\,dx = \begin{bmatrix} u = \ln x \longrightarrow du = \frac{1}{x}dx \\ dv = (x+2)dx \to v = \frac{x^2}{2}+2x \end{bmatrix} =$$

$$= \left(\frac{x^2}{2}+2x\right)\ln x - \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}\,dx = \left(\frac{x^2}{2}+2x\right)\ln x - \frac{1}{2}\frac{1}{2}x^2 - 2x + C = F(x)$$

b) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(tg\,\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{\cos x}} = [1^\infty] = \boxed{e^{-1} = \frac{1}{e}}$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos x}\left(tg\left(\frac{x}{2}\right) - 1\right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{tg\left(\frac{x}{2}\right)-1}{\cos x} = \left[\frac{0}{0}\right] \underset{(1)}{=}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\left[1+tg^2\left(\frac{x}{2}\right)\right]\cdot\frac{1}{2}}{-\operatorname{sen} x} = \frac{1}{-1} = -1$$ donde en (1) hemos aplicado L'Hôpital

De otra forma (tomando logaritmos): $\log = \ln$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(tg\,\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{\cos x}} = L \Rightarrow \log \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(tg\,\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{\cos x}} = \log L \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left[tg\left(\frac{x}{2}\right)\right]^{\frac{1}{\cos x}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \log\left[tg\left(\frac{x}{2}\right)\right]^{\frac{1}{\cos x}} =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos x} \log tg\left(\frac{x}{2}\right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\log tg\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos x} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{①}{=}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{tg\left(\frac{x}{2}\right)}\left[1+tg^2\left(\frac{x}{2}\right)\right]\cdot\frac{1}{2}}{-\operatorname{sen} x} = \frac{1\cdot[1+1]\cdot\frac{1}{2}}{-1} = -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left[tg\left(\frac{x}{2}\right)\right]^{\frac{1}{\cos x}} = \boxed{e^{-1} = \frac{1}{e}}$$

B3 a) $V_{TETRAEDRO} = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}, \overrightarrow{P_1P_4}\right]\right| =$

$\overrightarrow{P_1P_2} = (1,0,-1)$

$\overrightarrow{P_1P_3} = (0,2,1)$

$\overrightarrow{P_1P_4} = (2,a-1,2)$

$$= \frac{1}{6}\left|\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & a-1 & 2 \end{pmatrix}\right| =$$

$$= \frac{1}{6}|9-a| = 1 \Rightarrow$$

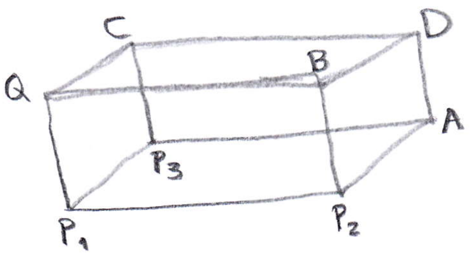
$$\Rightarrow |9-a| = 6 \begin{cases} 9-a = 6 \Rightarrow a = 3 \\ 9-a = -6 \Rightarrow a = 15 \end{cases}$$

¿Los dos valen? La altura tiene que ser < 10.

$a=3$ $\quad |\overrightarrow{P_1P_4}| = \sqrt{2^2+2^2+2^2} = \sqrt{12} < 10 \Rightarrow a=3$ ✓

$a=15$ $\quad |\overrightarrow{P_1P_4}| = \sqrt{2^2+14^2+2^2} = 2\sqrt{51} > 10 \Rightarrow a=15$ ✗

b)



$\overrightarrow{P_1P_3} = \overrightarrow{P_2A} \Rightarrow (0,2,1) = (a_1-2, a_2-1, a_3) \Rightarrow$

$A(a_1,a_2,a_3)$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 = 2 \\ a_2 = 3 \\ a_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A(2,3,1)}$$

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{QB} \Rightarrow (1,0,-1) = (b_1-3,\, b_2-3,\, b_3-3) \Rightarrow$$

$B(b_1, b_2, b_3)$

$$\Rightarrow \begin{cases} b_1 = 4 \\ b_2 = 3 \\ b_3 = 2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{B(4,3,2)}$$

$$\overrightarrow{P_1P_3} = \overrightarrow{QC} \Rightarrow (0,2,1) = (c_1-3,\, c_2-3,\, c_3-3) \Rightarrow$$

$C(c_1, c_2, c_3)$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1 = 3 \\ c_2 = 5 \\ c_3 = 4 \end{cases} \Rightarrow \boxed{C(3,5,4)}$$

$$\overrightarrow{P_2A} = \overrightarrow{BD} \Rightarrow (2,3,1) - (2,1,0) = (d_1-4,\, d_2-3,\, d_3-2) \Rightarrow$$

$D(d_1, d_2, d_3)$

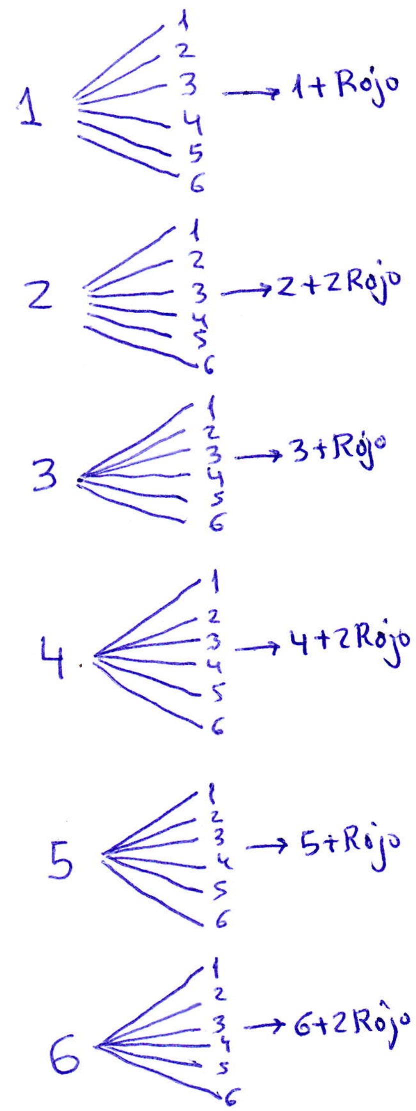
$$\Rightarrow (0,2,1) = (d_1-4,\, d_2-3,\, d_3-2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d_1 = 4 \\ d_2 = 5 \\ d_3 = 3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{D(4,5,3)}$$

B4

Dado

Azul Rojo



a) a1) $\boxed{P(10) = P(2\cap 4) + P(4\cap 3) + P(5\cap 5) + P(6\cap 2) = 4\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{9}}$

a2) $\boxed{P(\text{Impar}) = P(1\cap 2) + P(1\cap 4) + P(1\cap 6) + P(3\cap 2) + P(3\cap 4) + P(3\cap 6) + P(5\cap 2) + P(5\cap 4) + P(5\cap 6) = 9\cdot\frac{1}{36} = \frac{1}{4}}$

b) b1) $\boxed{P\left(\text{Azul par}/8\right) = \frac{P(\text{Azul par} \cap 8)}{P(8)} = \frac{\frac{3}{36}}{\frac{5}{36}} = \frac{3}{5}}$

b2) $\boxed{P\left(\text{Rojo impar}/\text{Total par}\right) = \frac{P(\text{Rojo impar} \cap \text{Total par})}{P(\text{Total par})} = \frac{P(\text{Rojo impar})}{P(\text{Total par})} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3}}$