Modelo de 2024 de Andalucía

Ejercicio 1:
Halla dos números mayores o iguales que 0, cuya suma sea 1, y el producto de uno de ellos por la raíz cuadrada del otro sea máximo.

Ejercicio 1:
Considera la función $f(x)=\dfrac{x^2+a}{x-b}$, para $x \neq b$.

a) Calcula a y b para que la gráfica de f pase por el punto $(1,-2)$ y tenga a la recta $y=x+4$ como asíntota oblicua.
b) En el caso $a=5$ y $b=4$, calcula la ecuación de la recta normal a la gráfica de f que pasa por el punto de abscisa $x=0$.

Ejercicio 2:
Sabiendo que $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $F(x)=e^{x^2}$ es una primitiva de f.

a) Comprueba que f es creciente.
b) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de la función f, el eje de abscisas y la recta $x=1$.

Ejercicio 2:
Considera la función $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\cos\left(\sqrt{x}\right)$. Calcula, si es posible, una primitiva de f cuya gráfica pase por el punto $(0,5)$. Sugerencia: haz el cambio de variable $t=\sqrt{x}$.

Ejercicio 3:
Considera la matriz $A=\begin{pmatrix} 0 & a & -b \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ con $a,b\in\mathbb{R}$.

a) Calcula A^{10}.
b) Calcula, si es posible, la matriz inversa de $I+A+A^2$, donde I denota la matriz identidad de orden 3.

Ejercicio 3:
Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, de define la matriz $M=A+(\lambda-1)B$.

a) Halla los valores de λ para los que la matriz M tiene rango menor que 3.
b) Para $\lambda=-1$, resuelve el sistema lineal homogéneo cuya matriz de coeficientes es M.

Ejercicio 4:
Considera el plano π, determinado por los puntos $A(-1,0,0)$, $B(0,1,1)$ y $C(2,1,0)$, y la recta

$$r \equiv \begin{cases} x - 2z - 3 = 0 \\ y - z - 2 = 0 \end{cases}$$

Halla los puntos de r cuya distancia a π es $\sqrt{14}$ unidades.

Ejercicio 4:

Considera el paralelogramo cuyos vértices consecutivos son los puntos $P(-1,2,3)$, $Q(-2,1,0)$, $R(0,5,1)$ y S.

a) Halla las coordenadas del punto S.
b) Calcula la ecuación de la recta que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular al plano que contiene a los puntos $P,\ Q$ y R

Ciprì

MODELO ANDALUCÍA 2024

1) $x, y =$ nºs buscados

$x, y \geq 0$

$x + y = 1$

$y\sqrt{x}$ máximo $\longrightarrow y = 1 - x$ sustituimos

$f(x) = (1-x)\sqrt{x}$ (función a optimizar)

$$f(x) = \sqrt{x} - x\sqrt{x} = \sqrt{x} - \sqrt{x^3} = x^{1/2} - x^{3/2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{3}{2}x^{1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{3\sqrt{x}}{2} = \frac{1}{2}x^{-1/2} - \frac{3}{2}x^{1/2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2 - 3\sqrt{x} \cdot 2\sqrt{x} = 0 \Rightarrow 2 - 6x = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$$

$$f''(x) = \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{1}{2}-1} - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = -\frac{1}{4}x^{-3/2} - \frac{3}{4}x^{-1/2} = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}} - \frac{3}{4\sqrt{x}}$$

$f''\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} < 0 \Rightarrow$ $\boxed{x = \frac{1}{3} \text{ es un máx. relativo de } f}$

de coordenadas $\left(\frac{1}{3}, f\left(\frac{1}{3}\right)\right) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{9}\right)$ [No hace falta]

Los números buscados son $\frac{1}{3}$ y $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

1) a) f pasa por $(1,-2) \Rightarrow f(1) = -2 \Rightarrow \frac{1^2 + a}{1-b} = -2 \Rightarrow a = -3 + 2b$

La recta $y = x + 4$ es una A.O. de $f(x) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \text{ y } \lim_{x\to\infty}[f(x) - x] = 4$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2+a}{x-b}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+a}{x(x-b)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+a}{x^2-bx} = 1$$ que

es cierto $\forall a, b \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to\infty}(f(x) - x) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+a}{x-b} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+a-x^2+xb}{x-b} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{a+xb}{x-b} = b = 4 \Rightarrow b = 4$$

Resolvemos el sistema: $\begin{cases} a = -3+2b \\ b = 4 \end{cases} \Rightarrow \boxed{(a,b) = (5,4)}$

b) $(a,b)=(5,4) \Rightarrow f(x)=\dfrac{x^2+5}{x-4}$ para $x\neq 4$

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=-\frac{5}{4} \\ f'(x)=\dfrac{2x(x-4)-(x^2+5)\cdot 1}{(x-4)^2} \\ f'(0)=-\frac{5}{16} \end{array}\right\}$$

$\boxed{\text{Recta normal a } f \text{ en } x=0 \quad y+\frac{5}{4}=\frac{16}{5}(x-0)}$

(2) a) Como F es una primitiva de f, se tiene que $f(x)=F'(x)$, luego

$$f(x)=F'(x)=2xe^{x^2}$$

$$f'(x)=2e^{x^2}+2x\cdot 2xe^{x^2}=(2+4x^2)e^{x^2}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \begin{cases} 2+4x^2=0 \Rightarrow x=\pm\sqrt{-\frac{2}{4}} \notin \mathbb{R} \\ e^{x^2}=0 \quad \text{Nunca} \end{cases}$$

Así, F es siempre creciente o siempre decreciente

Ahora bien, como $f'(0)=2>0 \Rightarrow$ $\boxed{\text{f es estrictamente creciente en } \mathbb{R}}$

b) Límites de integración

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=2xe^{x^2} \\ g(x)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow x=0 \Rightarrow \text{los límites de integración son 0 y 1}$$

Área

$$\boxed{A=\int_0^1 2xe^{x^2}\,dx=e^{x^2}\Big|_0^1=e-1 \quad u^2}$$

(2) $F(x)=\int \cos(\sqrt{x})\,dx=\left[\begin{array}{l} t=\sqrt{x} \\ dt=\frac{1}{2\sqrt{x}}dx \end{array}\right]=\int \cos t\cdot 2t\,dt=$

$=2\int t\cos t\,dt=\left[\begin{array}{l} u=t \longrightarrow du=dt \\ dv=\cos t\,dt \rightarrow v=\operatorname{sen} t \end{array}\right]=$

$=2\left(t\operatorname{sen} t-\int \operatorname{sen} t\,dt\right)=2\left(t+\operatorname{sen} t+\cos t\right)+C=$

$=2\left(\sqrt{x}\operatorname{sen}\sqrt{x}+\cos\sqrt{x}\right)+C$

Como la primitiva tiene que pasar por $(0,5)$

$$F(0)=5 \Rightarrow F(0)=2+C=5 \Rightarrow C=3$$

luego la primitiva pedida es:

$$\boxed{F(x)=2\left(\sqrt{x}\,\text{sen}\sqrt{x}+\cos\sqrt{x}\right)+3}$$

3 $A=\begin{pmatrix} 0 & a & -b \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$A^2=AA=\begin{pmatrix} 0 & a & -b \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a & -b \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & ab \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & ab \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a & -b \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, $\boxed{A^{10}=A^3\cdot A^3\cdot A^3\cdot A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=0}$

b) $$I+A+A^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & a & -b \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 0 & ab \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & a & -b+ab \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det\left(I+A+A^2\right)=\det\begin{pmatrix} 1 & a & -b+ab \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=1\neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists\left(I+A+A^2\right)^{-1}$$

Cálculo de $\left(I+A+A^2\right)^{-1}$

$$\boxed{\left(I+A+A^2\right)^{-1}}=\frac{\operatorname{Adj}\left[\left(I+A+A^2\right)^T\right]}{\det\left[\left(I+A+A^2\right)^{-1}\right]}=\frac{\operatorname{Adj}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ -b+ab & b & 1 \end{pmatrix}}{1}=$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & 0 \\ -b+ab & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & 1 \\ -b+ab & b \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ b & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -b+ab & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -b+ab & b \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ a & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -a & ab+b-ab \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & -a & b \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

<u>Por Gauss-Jordan</u>

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & a & -b+ab & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-bF_3+F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & a & -b+ab & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\xrightarrow{(b-ab)F_3+F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & a & 0 & 1 & 0 & b-ab \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-aF_2+F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -a & b \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

3 a) $M = A + (\lambda-1)B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + (\lambda-1)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda-1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ \lambda-1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda-1 \\ 1 & \lambda-1 & 1 \\ \lambda-1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det M = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \lambda-1 \\ 1 & \lambda-1 & 1 \\ \lambda-1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \lambda-1+\lambda-1+\lambda-1-(\lambda-1)(\lambda-1)(\lambda-1)-1-1 =$$
$$= -\lambda^3+3\lambda^2-4 = 0$$

	-1	3	0	-4
-1		1	-4	4
	-1	4	-4	0
2		-2	4	
	-1	2	0	
2		-2		
	-1	0		

$$\lambda = \begin{cases} -1 \\ +2 \\ +2 \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Para que rango } M < 3 \text{ tiene que ser } \lambda = \begin{cases} -1 \\ 2 \end{cases}}$$

b) $\lambda = -1 \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, rango $M < 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ el sistema no puede ser compatible determinado, por lo que es compatible indeterminado.

El sistema es:

$$\begin{cases} x+y-2z=0 \\ x-2y+z=0 \\ -2x+y+z=0 \end{cases} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[2F_1+F_3]{-F_1+F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2+F_3}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} [1] \\ [2] \\ \end{array}$$

Llamamos $z = \lambda \in \mathbb{R}$

Sustituimos en [2]: $y = \frac{-3\lambda}{-3} = \lambda$

Sustituimos en [1]: $x = 2\lambda - \lambda = \lambda$

$\boxed{\text{Solución: } (x,y,z) = (\lambda,\lambda,\lambda) \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}}$

4) Plano π

$\pi \equiv \{A, \vec{u_1} = \overrightarrow{AB}, \vec{v} = \overrightarrow{AC}\}$

$\overrightarrow{AB} = (0,1,1)-(-1,0,0) = (1,1,1)$

$\overrightarrow{AC} = (2,1,0)-(-1,0,0) = (3,1,0)$

$$\pi \equiv \det\begin{pmatrix} x+1 & 1 & 3 \\ y & 1 & 1 \\ z & 1 & 0 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \pi \equiv x-3y+2z+1=0$$

Ecuaciones paramétricas de r

$$r \equiv \begin{cases} x-2z-3=0 \\ y-z-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2z+3 \\ y = z+2 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 3+2\lambda \\ y = 2+\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}$$

Punto genérico de r

$P(3+2\lambda, 2+\lambda, \lambda) \in r$

Distancia

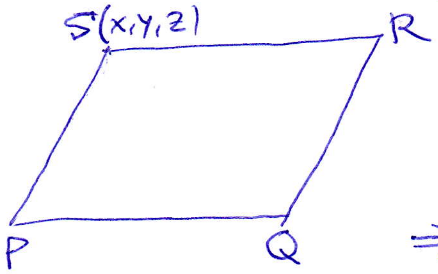
$$d(P,\pi) = \frac{|3+2\lambda-3(2+\lambda)+2\lambda+1|}{\sqrt{1^2+(-3)^2+2^2}} = \frac{|\lambda-2|}{\sqrt{14}} = \sqrt{14} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\lambda - 2| = 14 \Rightarrow \begin{cases} \lambda - 2 = 14 \Rightarrow \lambda = 16 \\ \lambda - 2 = -14 \Rightarrow \lambda = -12 \end{cases}$$

Si $\lambda = 16 \Rightarrow P_1(3+32, 2+16, 16) \Rightarrow \boxed{P_1(35, 18, 16)}$

Si $\lambda = -12 \Rightarrow P_2(3-24, 2-12, -12) \Rightarrow \boxed{P_2(-21, -10, -12)}$

4) a) PQRS paralelogramo $\Leftrightarrow \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$ y $\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{QR}$



$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{PQ} = (-2,1,0) - (-1,2,3) = (-1,-1,-3) \\ \overrightarrow{SR} = (0,5,1) - (x,y,z) = (-x, 5-y, 1-z) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (-1,-1,-3) = (-x, 5-y, 1-z) \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 6 \\ z = 4 \end{cases} \Rightarrow \boxed{S(1,6,4)}$$

Comprobamos que $\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{QR}$

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{PS} = (1,6,4) - (-1,2,3) = (2,4,1) \\ \overrightarrow{QR} = (0,5,1) - (-2,1,1) = (2,4,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{PS} = \overrightarrow{QR} = (2,4,1)$$

Así, $\boxed{S(1,6,4)}$

b) $\pi \equiv$ plano determinado por P, Q y R $\equiv \{P, \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}\}$

$\overrightarrow{PQ} = (-1,-1,-3)$

$\overrightarrow{PR} = (0,5,1) - (-1,2,3) = (1,3,-2)$

$$\pi \equiv \det \begin{pmatrix} x+1 & -1 & 1 \\ y-2 & -1 & 3 \\ z-3 & -3 & -2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{\pi \equiv 11x - 5y - 2z + 27 = 0}$$

Como $r \perp \pi \Rightarrow \vec{u}_r = \vec{n}_\pi = (11, -5, -2)$

La ecuación de la recta es:

$$\boxed{r \equiv \{O, \vec{n}_\pi\} = \begin{cases} x = 11\lambda \\ y = -5\lambda \\ z = -2\lambda \end{cases} \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}}$$