Modelo 1 de 2024

1. En una joyería hay 120 piezas de El Señor de los Anillos entre Anillos Únicos, Broches Hoja y Colgantes de Arwen. Sabemos que hay 20 Anillos menos que la suma de los Broches y los Colgantes. También sabemos que los Anillos y los Colgantes suman lo mismo que el número de Broches multiplicado por un número indeterminado ($t \in \mathbb{R}$).

a) Plantea el sistema de ecuaciones que permite resolver el problema y estudia las soluciones dependiendo de los valores de *t*.

b) Resuelve razonadamente el sistema anterior para $t = 4$, si es posible.

<u>Solución:</u>

a) Nombramos las variables y planteamos el sistema:

$x =$ número de anillos únicos
$y =$ número de broches hoja
$z =$ número de colgantes de Arwen

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=120 \\ x=y+z-20 \\ x+z=ty \end{array}\right\} \Rightarrow M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -t & 1 \end{pmatrix} \text{ y } \widetilde{M}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 120 \\ 1 & -1 & -1 & -20 \\ 1 & -t & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Estudiamos el rango de M:

$$\det M = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -t & 1 \end{pmatrix} = -2t-2=0 \Rightarrow t=-1$$

Si $t \neq -1 \Rightarrow \text{rango} M = 3$ y si $t=-1 \Rightarrow \text{rango} M = 2$ ya que $\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \neq 0$

Estudiamos ahora el rango de $\widetilde{M}$ cuando $t=-1$:

$$\widetilde{M}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 120 \\ 1 & -1 & -1 & -20 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[-F_1+F_3]{-F_1+F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 120 \\ 0 & -2 & -2 & -140 \\ 0 & 0 & 0 & -120 \end{array}\right) \Rightarrow \text{rango}\widetilde{M}=3$$

Discusión:

Si $t \neq -1 \Rightarrow \text{rango} M = 3 = \text{rango}\widetilde{M} =$ número de incógnitas $\Rightarrow$ (TRF) SCD

Si $t = -1 \Rightarrow \text{rango} M = 2 < 3 = \text{rango}\widetilde{M} \Rightarrow$ (TRF) SI

b) Resolución para $t=4$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 120 \\ 1 & -1 & -1 & -20 \\ 1 & -4 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[-F_1+F_3]{-F_1+F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 120 \\ 0 & -2 & -2 & -140 \\ 0 & -5 & 0 & -120 \end{array}\right)\begin{array}{c} [1] \\ [2] \\ [3] \end{array}$$

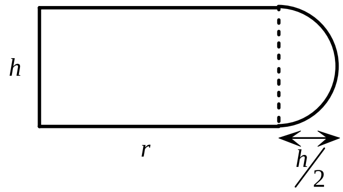
De [3]: $y=\dfrac{-120}{-5}=24$

Sustituimos en [2]: $z=\dfrac{-140+2\cdot 24}{-2}=46$

Sustituimos en [1]: $x=120-46-24=50$

Solución: hay 50 anillos únicos, 46 broches hoja y 24 colgantes de Arwen.

2. Una empresa desea construir un aparcamiento para sus empleados y necesita vallarlo de manera que la región resultante sea un rectángulo más medio círculo, tal y como se ve en la figura adjunta. El rectángulo tiene de lados $h, r \in \mathbb{R}$, de manera que el radio del semicírculo es $\frac{h}{2}$. La empresa tiene solamente presupuesto para comprar una valla de 80 metros de longitud, que ha de ser el perímetro del aparcamiento con la mayor área posible con ese perímetro de 80 metros.



a) Escribe el área del aparcamiento en función del valor h.
b) ¿Cuánto deben valer h y r para que el área del aparcamiento sea lo mayor posible?

Solución:
a) Sabemos que (condición sobre el perímetro):

$$80 = h + 2r + \frac{2\pi \frac{h}{2}}{2} \Rightarrow 160 = 2h + 4r + \pi h \Rightarrow r = \frac{160 - 2h - \pi h}{4} = 40 - \frac{1}{2}h - \frac{\pi}{4}h$$

La función a optimizar es el área:

$$A = A_{\text{rectángulo}} + A_{\text{semicírculo}} = hr + \frac{\pi\left(\frac{h}{2}\right)^2}{2} = h\left(40 - \frac{h}{2} - \frac{\pi h}{4}\right) + \frac{\pi h^2}{8} =$$

$$= 40h - \frac{h^2}{2} - \frac{\pi h^2}{8} = A(h)$$

b) Maximizamos $A(h)$:

$$A'(h) = 40 - h - \frac{\pi}{4}h = 40 - \left(\frac{\pi + 4}{4}\right)h$$

$$A'(h) = 0 \Rightarrow h = \frac{160}{\pi + 4}$$

$$A''(h) = -\left(\frac{\pi + 4}{4}\right)$$

$$A''\left(\frac{160}{\pi + 4}\right) < 0 \Rightarrow h = \frac{160}{\pi + 4} \text{ es un máximo relativo de } A(h)$$

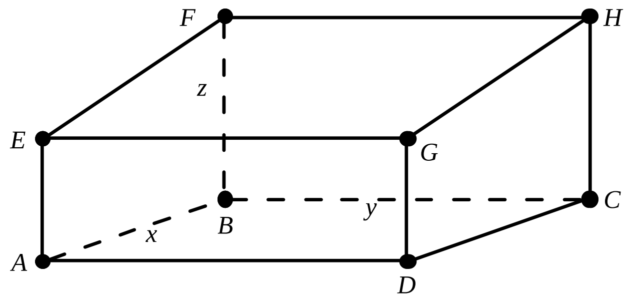
Para maximizar el aparcamiento:

$$h = \frac{160}{\pi + 4} \text{ m} \simeq 22,40 \text{ m} \;\text{ y }\; r = 40 - \frac{1}{2}\left(\frac{160}{\pi + 4}\right) - \frac{\pi}{4}\left(\frac{160}{\pi + 4}\right) \text{ m} \simeq 11,21 \text{ m}$$

3. Para transportar a su mascota, Frank ha fabricado una caja, según puede verse en la figura adjunta. La tapa de arriba de la caja viene definida por los puntos $E(3,0,2)$, $F(0,0,4)$, $G(3,a,b)$ y $H(0,6,4)$ con $a,b \in \mathbb{R}$.

a) ¿Qué deben cumplir los valores $a,b \in \mathbb{R}$ para que la parte de arriba de la caja forme un plano.

b) Suponiendo que la parte de arriba de la caja es un plano, determina los valores $a,b \in \mathbb{R}$ para que los lados EG y GH formen un ángulo de 90º y, E y G sean distintos.



Solución:

a) E, G, H y F determinan un plano $\Leftrightarrow \overrightarrow{EG}, \overrightarrow{EH}$ y $\overrightarrow{EF}$ son l.d. $\Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{EG}, \overrightarrow{EH}, \overrightarrow{EF}\right) = 0$

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{EG} = (3,a,b)-(3,0,2) = (0,a,b-2)\\ \overrightarrow{EH} = (0,6,4)-(3,0,2) = (-3,6,2)\\ \overrightarrow{EF} = (0,0,4)-(3,0,2) = (-3,0,2)\end{array}\right\} \Rightarrow \det\begin{pmatrix} 0 & a & b-2 \\ -3 & 6 & 2 \\ -3 & 0 & 2\end{pmatrix} = 18b-36 = 0 \Rightarrow b = \frac{36}{18} = 2$$

Así, para $(a,b) = (\lambda, 2)$ con $\lambda \in \mathbb{R}$, los puntos E, G, H y F determinan un plano.

b) E, G, H y F determinan un plano $\Rightarrow b = 2$

Si $\alpha = \sphericalangle\left\{\overrightarrow{EG}, \overrightarrow{GH}\right\} = 90^{\circ} \Rightarrow \overrightarrow{EG} \perp \overrightarrow{GH} \Rightarrow \overrightarrow{EG} \cdot \overrightarrow{GH} = 0$.

$$\overrightarrow{EG} \cdot \overrightarrow{GH} = (0,a,b-2)\cdot(-3,6-a,4-b) = 6a - a^2 + 4b - b^2 - 8 + 2b = 0$$

donde $\overrightarrow{GH} = (0,6,4)-(3,a,2) = (-3,6-a,4-b)$.

Como E, G, H y F determinan un plano $\Rightarrow b = 2$ y, por tanto, $6a - a^2 + 8 - 2^2 - 8 + 4 = 0 \Rightarrow a = \begin{cases} 0 \\ 6 \end{cases}$

Como $E \neq G \Rightarrow (3,0,2) \neq (3,a,b) \Rightarrow a \neq 0$.

Por tanto, para que se cumplan las tres condiciones, $a = 6$ y $b = 2$.

4. a) Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{si} \quad x<1 \\ e^{x-a} & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

con $a \in \mathbb{R}$. Estudia la continuidad de $f(x)$ e indica de qué tipo son sus discontinuidades (si las hubiera) para los distintos valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$.

b) Sean los planos $\pi_1 \equiv -x+y+2z=1$ y $\pi_2 \equiv 2y+z=-1$. Determina la ecuación del plano perpendicular a los planos π_1 y π_2, y que pasa por el punto $A(0,1,1)$.

Solución:

a) Continuidad de $f(x)$:

Cada una de las funciones componentes es continua en su domino, por ser funciones elementales bien definidas.

Continuidad en $x=1$: ¿$\exists \lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1)$?

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1-}\left(x^2+1\right)=2\\ \lim\limits_{x\to 1+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1+} e^{x-a}=e^{1-a}\end{array}\right\}\Rightarrow 2=e^{1-a}\ \text{(para que } \exists\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)) \Rightarrow \log 2=\log e^{1-a}\Rightarrow \log 2=1-a\Rightarrow$$

$$\Rightarrow a=1-\log 2$$

donde $\log$ es el logaritmo natural.

Por tanto, $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$, si $a=1-\log 2$, y si $a\neq 1-\log 2$, entonces $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}-\{1\}$.

Estudiamos la discontinuidad de $f(x)$ en $x=1$ para $a\neq 1-\log 2$.

Si $a\neq 1-\log 2$, entonces $\nexists\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ y, por tanto, $f(x)$ tiene una discontinuidad de salto finito.

b) $\pi(\text{plano})$ t.q. $\begin{cases}\pi\perp\pi_1 \text{ y } \pi\perp\pi_2\\ A(0,1,1)\in\pi\end{cases}$

Se tiene que $\pi\equiv\left\{A,\overrightarrow{n_\pi}\right\}$ donde $\overrightarrow{n_\pi}=\overrightarrow{n_{\pi_1}}\times\overrightarrow{n_{\pi_2}}$.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{n_{\pi_1}}=(-1,1,2)\\ \overrightarrow{n_{\pi_2}}=(0,2,1)\end{array}\right\}\Rightarrow \overrightarrow{n_\pi}=\overrightarrow{n_{\pi_1}}\times\overrightarrow{n_{\pi_2}}=\det\begin{pmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & 1 & 2\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}=-3\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}=(-3,1,-2)$$

$$\left.\begin{array}{r}\pi\equiv Ax+By+Cz+D=0\Rightarrow -3x+y-2z+D=0\\ A(0,1,1)\in\pi\end{array}\right\}\Rightarrow 0+1-2+D=0\Rightarrow D=1$$

Así, $\pi\equiv -3x+y-2z+1=0$.

5. a) En el primer curso de un grado en ingeniería industrial los alumnos deben cursar una asignatura de estadística y otra de física. Se sabe que la probabilidad de que un alumno apruebe estadística es del 60 % mientras que la probabilidad de que apruebe física es del 50 %. Además, se sabe que la probabilidad de que aprueben las dos es del 40 %.

a.1) ¿Cuál es la probabilidad de que un alumno apruebe estadística o física?

a.2) Si un alumno ha aprobado física, ¿cuál es la probabilidad de que haya aprobado estadística?

b) En el huerto urbano “Turdus merula” producen compost para abonar los cultivos. Han observado que la cantidad de compost que se produce cada temporada sigue una distribución normal de media 40 kg y varianza 4 kg^2.

b.1) ¿Cuál es la probabilidad de que en una temporada se produzcan más de 43 kg de compost?

b.2) ¿Cuál es la cantidad exacta de compost que es menor que el 79,95 % más grande de las cantidades de compost producidas en otras temporadas?

a	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.7	0.758036	0.761148	0.764238	0.767305	0.770350	0.773373	0.776373	0.779350	0.782305	0.785236
0.8	0.788145	0.791030	0.793892	0.796731	0.799546	0.802337	0.805105	0.807850	0.810570	0.813267
0.9	0.815940	0.818589	0.821214	0.823814	0.826391	0.828944	0.831472	0.833977	0.836457	0.838913
1.0	0.841345	0.843752	0.846136	0.848495	0.850830	0.853141	0.855428	0.857690	0.859929	0.862143
1.1	0.864334	0.866500	0.868643	0.870762	0.872857	0.874928	0.876976	0.879000	0.881000	0.882977
1.2	0.884930	0.886861	0.888768	0.890651	0.892512	0.894350	0.896165	0.897958	0.899727	0.901475
1.3	0.903200	0.904902	0.906582	0.908241	0.909877	0.911492	0.913085	0.914657	0.916207	0.917736
1.4	0.919243	0.920730	0.922196	0.923641	0.925066	0.926471	0.927855	0.929219	0.930563	0.931888
1.5	0.933193	0.934478	0.935745	0.936992	0.938220	0.939429	0.940620	0.941792	0.942947	0.944083

Solución:

a) Nombramos los sucesos:

$$\begin{cases} E = \text{aprobar Estadística} \\ F = \text{aprobar Física} \end{cases} \quad A = \text{aprobar}$$

a.1) $P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F) = 0,6 + 0,5 - 0,4 = 0,7$

a.2) $P\left(E/F\right) = \dfrac{P(E \cap F)}{P(F)} = \dfrac{0,4}{0,5} = 0,8$

b) $X =$ producción de compost (en kg)

b.1) $P(X > 43) = P\left(Z > \dfrac{43-40}{2}\right) = P(Z > 1,5) = 1 - P(Z < 1,5) = 1 - 0,933193 = 0,066867$

b.2) Hay que determinar el percentil 79,95

$$z_{0,7995} \simeq 0,83 \Rightarrow x = \frac{z-\mu}{\sigma} \Rightarrow x = x\sigma + \mu = 0,83 \cdot 2 + 40 = 41,66$$

Por tanto, la cantidad de compost que es menor que el 79,95 % más grande de las cantidades de compost producidas en otras temporadas es aproximadamente de 41,66 kg.

6. a) Calcula la siguiente integral:

$$\int \frac{dx}{(1-3x)^{1/2} - (1-3x)^{2/3}}$$

Puedes utilizar el cambio de variable $1-3x = t^6$.

b) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Sin calcular A^{-1}, razón por qué A^{-1} existe, y discute si la matriz $A^{-1}B$ tiene inversa.

Solución:

a) Integral

$$\int \frac{dx}{(1-3x)^{1/2} - (1-3x)^{2/3}} = \begin{bmatrix} 1-3x = t^6 \\ -3xdx = 6t^5 dt \Rightarrow dx = -2t^5 dt \end{bmatrix} = \int \frac{-2t^5 dt}{(t^6)^{1/2} - (t^6)^{2/3}} =$$

$$= -2\int \frac{t^5 dt}{t^3 - t^4} = -2\int \frac{\cancel{t^3} t^2 dt}{\cancel{t^3}(1-t)} = -2\int \frac{t^2 dt}{1-t} \underset{(1)}{=} -2\int\left(-t-1-\frac{1}{t-1}\right)dt = -2\left(-\frac{t^2}{2} - t - \log|t-1|\right) =$$

$$= t^2 + 2t + 2\log|t-1| = \sqrt[3]{1-3x} + 2\cdot\sqrt[6]{1-3x} + 2\log\left|\sqrt[6]{1-3x}-1\right| + C$$

donde en (1) hemos tenido en cuenta que:

$$\begin{array}{rl} t^2 & \underline{|1-t} \\ \underline{-t^2+t} & -t-1 \\ \underline{t} & \\ \underline{-t+1} & \\ 1 & \end{array} \qquad \Rightarrow \begin{cases} t^2 = (1-t)(-t-1)+1 \\ \dfrac{t^2}{1-t} = -t-1+\dfrac{1}{1-t} \\ \dfrac{t^2}{1-t} = -t-1-\dfrac{1}{t-1} \end{cases}$$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

b.1) ¿$\exists A^{-1}$?

$\exists A^{-1} \Leftrightarrow \det A \neq 0$ y $\det A = -2 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$

b.2) $\exists\left(A^{-1}B\right)^{-1}$

$$\left.\begin{array}{l} \left(A^{-1}B\right)^{-1} = B^{-1}\left(A^{-1}\right)^{-1} = B^{-1}A \\ \text{Ahora bien, } \nexists B^{-1} \text{ ya que } B \text{ tiene una fila de ceros} \end{array}\right\} \Rightarrow \nexists\left(A^{-1}B\right)^{-1}$$

7. a) Resuelve la siguiente integral:

$$\int (x+3)e^{-2x}dx$$

b) En un juego de azar cada jugador tira un dado de seis caras. Si sale un 1 vuelve a tirar. Si sale otro resultado deja de tirar y la puntuación obtenida es el número de unos obtenidos durante las tiradas.

b.1) ¿Cuál es la probabilidad de no obtener ningún uno? ¿Cuál es la probabilidad de obtener una puntuación de uno? ¿Y la de obtener una puntuación de tres?

b.2) ¿Podrías dar la probabilidad de obtener una puntuación $n \in \mathbb{N}$?

Solución:

a) Integral

$$\int (x+3)e^{-2x}dx = \begin{bmatrix} u = x+3 & \rightarrow & du = dx \\ dv = e^{-2x}dx & \rightarrow & v = -\dfrac{1}{2}e^{-2x} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}(x+3)e^{-2x} - \int -\frac{1}{2}e^{-2x}dx = \frac{1}{2}(x+3)e^{-2x} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right) = \frac{1}{2}(x+3)e^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + C$$

b.1) No obtener ningún uno (puntuación = 0). Esto ocurre si en la primera tirada sales un resultado diferente de 1

$$P(\text{ningún } 1) = \frac{5}{6}$$

Obtener una puntuación de uno (un 1 en la primera tirada): la probabilidad de obtener un 1 en una tirada es $\frac{1}{6}$:

$$P(\text{puntuación de } 1) = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{6^2}$$

Obtener una puntuación de tres (tres unos en las tres tiradas): la probabilidad de obtener un 1 sigue siendo $\frac{1}{6}$:

$$P(\text{puntuación de } 3) = \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{6^4}$$

b.2) La probabilidad de obtener una puntuación de n implica obtener n unos en las primeras n tiradas y luego obtener un resultado diferente de 1 en la $(n+1)-$ésima tirada:

$$\left.\begin{array}{l} P(\text{obtener } 1) = \dfrac{1}{6} \\ P(\text{resultado diferente de } 1) = \dfrac{5}{6} \end{array}\right\} \Rightarrow P(\text{puntuación de } n) = \left(\frac{1}{6}\right)^n \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{6^{n+1}}$$

8. a) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 2 & a & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Determina para qué valores de $a \in \mathbb{R}$ la matriz A es invertible.

b) Sean los planos $\pi_1 \equiv ax + y + 2z = 1$ y $\pi_2 \equiv by + z = -1$, con $a, b \in \mathbb{R}$. ¿Qué deben cumplir $a, b \in \mathbb{R}$ para que los planos no sean perpendiculares?

<u>Solución:</u>

a) $\exists A^{-1} \Leftrightarrow \det A \neq 0$

$$\det A = \det \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 2 & a & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = a^2 + 2 - 2 = a^2 = 0 \Rightarrow a = 0$$

Así, $\exists A^{-1} \Leftrightarrow a \neq 0$.

b) ¿ $a, b \in \mathbb{R}$ t.q. $\pi_1 \not\perp \pi_2$?

$$\pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{n_{\pi_1}} \perp \overrightarrow{n_{\pi_2}} \Leftrightarrow \overrightarrow{n_{\pi_1}} \cdot \overrightarrow{n_{\pi_2}} = 0 \Leftrightarrow (a,1,2) \cdot (0,b,1) = 0 \Rightarrow b + 2 = 0 \Rightarrow b = -2$$

Así, para $a \in \mathbb{R}$ y $b \neq -2$, los planos no son perpendiculares.

Modelo 2 de 2024

1. Tres lápices, un cuaderno y una agenda han costado 5 euros, lo mismo que dos cuadernos y una agenda.

a) Plantea el sistema de ecuaciones que permita determinar cuánto vale un lápiz, un cuaderno y una agenda.

b) ¿Podemos saber el precio de cada artículo si ninguno es gratis y en céntimos todos son múltiplos de 50? En caso de que se pueda, obtén los precios correspondientes. En caso de que no se puede, justifica por qué no.

Solución:

a) Nombramos las variables y planteamos el sistema:

$$\begin{cases} x = \text{precio de un lápiz} \\ y = \text{ precio de un cuaderno} \\ z = \text{ precio de una agenda} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + y + z = 5 \\ 2y + z = 5 \end{cases}$$

b) Ahora nos proporcionan una condición adicional, que es:

$$\begin{cases} x = \dot{50} = 50a \\ y = \dot{50} = 50b \\ z = \dot{50} = 50c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + y + z = 500 \\ 2y + z = 500 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 3x \\ z = 500 - 6x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 50a \\ y = 3 \cdot 50b \Rightarrow b = 3a \\ z = 50c \Rightarrow 50c = 500 - 6 \cdot 50a = 500 - 300a \Rightarrow c = 10 - 6a \end{cases}$$

Una posible solución es:

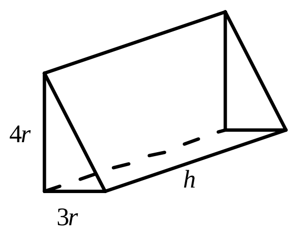
$$a = 1 \text{ €} \Rightarrow \begin{cases} x = 50 \text{ cent.} \\ b = 6 \Rightarrow y = 150 \text{ cent.} \\ c = 10 - 6 \cdot 1 = 4 \Rightarrow z = 200 \text{ cent.} \end{cases}$$

Por tanto, un lápiz cuesta 50 cent., un cuaderno 150 cent. y una agenda 200 cent.

De la ecuación $c = 10 - 6a$ y teniendo en cuenta que $c > 0$ se deduce que:

$$10 - 6a > 0 \Rightarrow \frac{10}{6} > a \Rightarrow \frac{5}{3} > a \Rightarrow a = 1 \text{ es la única solución posible.}$$

2. Una carpintera debe diseñar una caja con forma de prisma de altura h y cuya base sea un triángulo rectángulo de base $3r$ y altura $4r$, tal y como se puede ver en la figura adjunta. Además, la carpintera debe asegurarse de que el área de la superficie sea de 36 cm^2 y su volumen lo mayor posible.



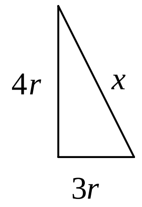
a) Escribe el volumen de la caja en función del valor r.

b) ¿Cuánto deben valer *h* y *r* para que el volumen de la caja sea lo mayor posible?

Solución:

a) Sabemos que $V = A_{\text{base}} \cdot h = \dfrac{3r \cdot 4r}{2} \cdot h = 6r^2 h$

Vamos a expresar h en función de r, teniendo en cuenta que $S = 36$ cm^2:



$x = \sqrt{(3r)^2 + (4r)^2} = \sqrt{25r^2} = 5r$

(se podría haber puesto directamente, sabiendo que (3, 4, 5) es una terna pitagórica)

$$S = 36 = \underbrace{2 \cdot 6r^2}_{\text{área de los dos triángulos}} + \underbrace{4rh}_{\text{área de la parte de atrás}} + \underbrace{3rh}_{\text{área de la base}} + \underbrace{5rh}_{\text{área de la parte delantera}} = 12r^2 + 12rh \Rightarrow 3 = r^2 + rh \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = \frac{3 - r^2}{r}$$

Así, $V = A_{\text{base}} \cdot h = \dfrac{3r \cdot 4r}{2} \cdot h = 6r^2 h = 6r^2 \dfrac{3 - r^2}{r} = 18r - 6r^3 = V(r)$

b) Maximizamos $V(r)$:

$$V'(r) = 18 - 18r^2$$

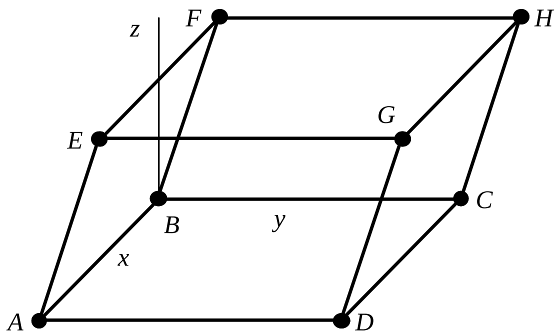
$$V'(r) = 0 \Rightarrow 18 - 18r^2 = 0 \Rightarrow r = 1$$

$$V''(r) = -36r$$

$$V''(1) - 36 < 0 \Rightarrow x = 1 \text{ es un máximo relativo de } V(r)$$

Para que las dimensiones de la caja sean máximas, $r = 1$ cm y $h = 2$ cm.

3. Un arquitecto desea diseñar un edificio con la forma de paralelepípedo que se ve en la figura de abajo:



Sean los vectores $\overrightarrow{BA} = (a, b, 0)$, $\overrightarrow{BC} = (0, 80, 0)$ y $\overrightarrow{BF} = (0, 10, c)$, con $a, b, c \in \mathbb{R}^+$. Todos los valores están en metros.

- **a)** Según el diseño de la figura anterior, el vector $\overrightarrow{BA}$ ha de ser perpendicular a los vectores $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{BF}$. ¿Qué den cumplir los valores $a, b, c \in \mathbb{R}$ para que esto ocurra?
- **b)** Teniendo en cuenta las condiciones del apartado anterior, calcula los valores de $a, b, c \in \mathbb{R}$, para que la longitud de A a B sea de 40 m y el volumen del edificio sea de 3 200 metros cúbicos.

Solución:

a) Si $\overrightarrow{BA}$ ha de ser perpendicular a los vectores $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{BF}$, entonces $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ y $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BF}=0$

$$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=(a,b,0)\cdot(0,80,0)=80b=0\Rightarrow b=0$$

$$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BF}=(a,b,0)\cdot(0,10,c)=10b=0\Rightarrow b=0$$

Así, $(a,0,c)\in\mathbb{R}^3$ verifican lo que se pide.

b) $d(A,B)=40\text{ m}=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{BA}\right|=\sqrt{a^2+b^2}$

Por otra parte, $V_{PARALELEPÍPEDO}=\left|\left[\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BF}\right]\right|=\left|\det\begin{pmatrix} a & b & 0\\ 0 & 80 & 0\\ 0 & 10 & c\end{pmatrix}\right|=80ac=3200\text{ m}^3\Rightarrow ac=40$

Si tomamos $b=0$ (que es lo que nos ha salido en el apartado b), entonces:

$$\begin{cases} 1600=a^2+b^2\Rightarrow a=\sqrt{1600}=40\\ b=0\\ ac=40\Rightarrow 40c=40\Rightarrow c=1\end{cases}$$

Por tanto, $(a,b,c)=(40,0,1)$.

4. a) Una fábrica posee dos robots (A y B) para soldar piezas en la línea de producción. El robot A procesa el 60 % de las piezas mientras que el robot B procesa el 40 % restante. El 10 % de las piezas procesadas por el robot A presenta algún defecto de soldadura mientras que el 5 % de las piezas procesadas por el robot B presenta algún defecto.

a.1) ¿Cuál es la probabilidad de que una pieza producida en esa línea de producción presente un defecto de soldadura?

a.2) Si una pieza se ha producido sin defectos, ¿cuál es la probabilidad de que la haya procesado el robot A?

b) En un examen de oposición solamente el 30 % de los candidatos aprueba. Un tribunal evalúa a 6 opositores.

b.1) ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente tres opositores no aprueben?

b.2) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos un opositor apruebe?

n	k \ p	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90
6	0	0.5314	0.2621	0.1176	0.0467	0.0156	0.0041	0.0007	0.0001	0.0000
	1	0.3543	0.3932	0.3025	0.1866	0.0937	0.0369	0.0102	0.0015	0.0001
	2	0.0984	0.2458	0.3241	0.3110	0.2344	0.1382	0.0595	0.0154	0.0012
	3	0.0146	0.0819	0.1852	0.2765	0.3125	0.2765	0.1852	0.0819	0.0146
	4	0.0012	0.0154	0.0595	0.1382	0.2344	0.3110	0.3241	0.2458	0.0984
	5	0.0001	0.0015	0.0102	0.0369	0.0938	0.1866	0.3025	0.3932	0.3543
	6	0.0000	0.0001	0.0007	0.0041	0.0156	0.0467	0.1176	0.2621	0.5314

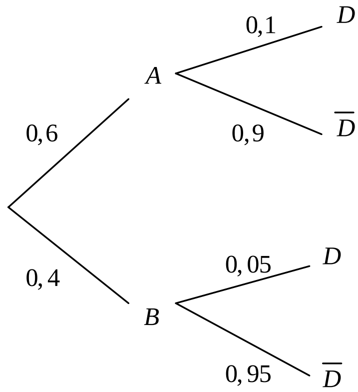
Solución:

a) Nombramos los sucesos:

$D =$ la pieza tiene un defecto de soldadura

$A =$ la pieza procede del robot A

$B =$ la pieza procede del robot B



a.1) Se tiene que:

$$P(D) = P(A)P\left(D/A\right) + P(B)P\left(D/B\right) =$$
$$= 0,6\cdot 0,1 + 0,4\cdot 0,05 = 0,08$$

a.2) Sabemos que $P\left(\overline{D}/A\right) = 1 - P\left(D/A\right)$, luego:

$$P\left(\overline{D}/A\right) = 1 - P\left(D/A\right) = 1 - 0,1 = 0,9$$

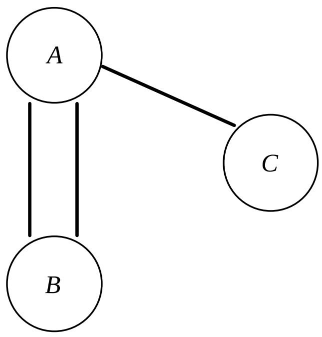
b) Sea $X =$el opositor aprueba. Se tiene que $X \longrightarrow \mathcal{B}(6\ ,\ 0,7)$.

b.1) $P(X = 3) = 0,1852$ (mirando en la tabla)

b.2) $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,0007 = 0,993$

5. a) Hallar el volumen de un cuerpo de revolución obtenido al hacer girar alrededor del eje OX el recinto acotado por la gráfica de la función $f(x) = 3x$ entre las abscisas $x = 0$ y $x = 2$.

b) El grafo siguiente muestra las conexiones por carretera entre las poblaciones A, B y C. Halla la matriz G asociada al grafo y calcula $G + G^2$. ¿Cuántas formas posibles existen de ir de A a C haciendo como máximo una escala (es decir, recorriendo un camino de dos aristas o menos)?



Solución:

a) Se tiene que:

$$V = \pi \int_0^2 (3x)^2\, dx = \pi \int_0^2 9x^2 dx = 9\pi \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^2 = 9\pi\left(\frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right) = 24\pi \text{ u}^3$$

b) Calculamos la matriz de adyacencia asociada al grafo:

$$G = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Calculamos G^2 y $G+G^2$:

$$G^2=GG=\begin{pmatrix}0&2&1\\2&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&2&1\\2&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&0&0\\0&4&2\\0&2&1\end{pmatrix}$$

$$G+G^2=\begin{pmatrix}0&2&1\\2&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5&0&0\\0&4&2\\0&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&2&1\\2&4&2\\1&2&1\end{pmatrix}$$

Para ver cuántas formas posibles hay en total para ir de A a C haciendo como máximo una escala, hay que mirar el elemento $(1,3)$ o el $(3,1)$ de la matriz $G+G^2$, esto es, hay una única forma.

6. a) Calcula el área de la región delimitada por $f(x)=6x-4$ y $g(x)=x^2+4$.

b) Sean el punto $A(2,1,1)$ y la recta $r\equiv\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+3}{2}$. Calcula la distancia del punto A a la recta r.

<u>Solución:</u>

a) Calculamos los extremos de integración:

$$f(x)=g(x)\Rightarrow 6x-4=x^2+4\Rightarrow x^2-6x+8=0\Rightarrow x=\begin{cases}2\\4\end{cases}$$

Así:

$$A=\left|\int_2^4\left[f(x)-g(x)\right]dx\right|=\left|\int_2^4\left(x^2-6x+8\right)dx\right|=\left|\left[\frac{x^3}{3}-\frac{6x^2}{2}+8x\right]_2^4\right|=\left|\frac{16}{3}-\frac{20}{3}\right|=\frac{4}{3}\ \text{u}^2$$

b) Sabemos que $d(A,r)=\dfrac{\left|\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{AP}\right|}{\left|\overrightarrow{u_r}\right|}$:

$$\left.\begin{array}{l}P(1,0,-3)\\A(2,1,1)\end{array}\right\}\overrightarrow{AP}=(1,0,-3)-(2,1,1)=(-1,-1,-4)$$

$$\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{AP}=(1,-2,2)\times(-1,-1,-4)=\det\begin{pmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&-1&2\\-1&-1&-4\end{pmatrix}=(6,2,-2)$$

$$d(A,r)=\frac{\left|\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{AP}\right|}{\left|\overrightarrow{u_r}\right|}=\frac{\sqrt{6^6+2^2+(-2)^2}}{\sqrt{1^2+(-1)^2+(-2)^2}}=\frac{\sqrt{66}}{3}\ \text{u}$$

7. a) Las ganancias (en millones de euros) de una empresa durante el primer año vienen dadas por la función $f(t)=4-t(1-t)e^{t^2}$, donde $t\in[0,1]$ representa el tiempo en años. Sin calcularlo directamente, justifica que existe un extremo relativo en el período de tiempo $[0,1]$. ¿Se trata de una ganancia máxima o mínima? ¿Por qué?

b) En un concesionario de coches se sabe que la probabilidad de que un coche sea diésel es de 0,20 mientras que la de que sea de color rojo es de 0,10. Ambos sucesos son independientes.

b.1) ¿Cuál es la probabilidad de que un coche sea diésel y de un color distinto al rojo?
b.2) ¿Cuál es la probabilidad de que un coche sea diésel o rojo?

Solución:
a) Se tiene que f es continua y derivable en $\mathbb{R}$, por ser suma, productos y composiciones de funciones continuas y derivables en $\mathbb{R}$, luego, en particular es continua en $[0,1]$ y derivable en $(0,1)$.

Además, $f(0)=4=f(1)$.

Así, aplicando el teorema de Rolle, $\exists c\in(0,1): f'(c)=0$.

Como, además, $0<t<1\Rightarrow\begin{cases}1-t>0\\ t(1-t)e^{t^2}>0\end{cases}\Rightarrow f(t)<4\quad\forall t\in(0,1)$

y, como consecuencia, f tiene en c un extremo relativo (de coordenadas $(c,f(c))$, que tiene que ser un mínimo relativo.

Otra posible solución además de la expuesta más arriba:

(1) Aplicamos el teorema de Rolle y calculamos la derivada segunda de f:

$$f'(t)=-(1-2t)e^{t^2}-\left(t-t^2\right)e^{t^2}\cdot 2t=\left(-1+2t-2t^2+2t^3\right)e^{t^2}$$

$$f'(c)=\left(-1+2c-2c^2+2c^3\right)e^{c^2}=0 \text{ (por el teorema de Rolle)}$$

$$f''(t)=\left(2-4t+6t^2\right)e^{t^2}+\left(-1+2t-2t^2+2t^3\right)e^{t^2}\cdot 2t$$

$$f''(c)=\left(2-4c+6c^2\right)e^{c^2}+\underbrace{\left(-1+2c-2c^2+2c^3\right)e^{c^2}}_{=0}\cdot 2c=\left(2-4c+6c^2\right)e^{c^2}$$

Si $c\in(0,1)\Rightarrow\begin{cases}e^{t^2}>0\\ 2-4c+6c^2>0\end{cases}\Rightarrow f''(c)>0$

Así, f tiene un extremo relativo en c de coordenadas $(c,f(c))$, que es un mínimo relativo.

b) Nombramos los sucesos:

$$\left.\begin{array}{l} D=\text{coche diésel}\Rightarrow P(D)=0,2\\ R=\text{coche de color rojo}\Rightarrow P(R)=0,1\end{array}\right\} D \text{ y } R \text{ son independiente}$$

b.1) $P\left(D\cap\overline{R}\right)=P(D)P\left(\overline{R}\right)=0,2\cdot(1-0,1)=0,18$

ya que si D y R son independientes, entonces D y $\overline{R}$ también lo son.

b.2) $P(D\cup R)=P(D)+P(R)-P(D\cap R)=0,2+0,1-(0,2\cdot 0,1)=0,28$

8. a) Calcula las matrices A y B que cumplan que $A+2B=\begin{pmatrix}2&3\\-4&1\end{pmatrix}$ y $2A-B=\begin{pmatrix}-1&1\\7&-8\end{pmatrix}$.

b) Determina el valor de $a\in\mathbb{R}$ para que los vectores $\vec{u}=(a,1,0)$ y $\vec{v}=(a,0,0)$ formen un ángulo de 45 º. Supón también que $a\neq 0$.

Solución:
a) Cálculo de A y B:

$$\left.\begin{array}{l} A+2B=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \\ 2A-B=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 7 & -8 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \xrightarrow{\cdot 2} \left.\begin{array}{l} A+2B=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \\ 4A-2B=\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 14 & -16 \end{pmatrix} \end{array}\right\}$$

sumamos: $$5A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 14 & -16 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 10 & -15 \end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow A=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 10 & -15 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Como

$$2A-B=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 7 & -8 \end{pmatrix}\Rightarrow B=2A-\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 7 & -8 \end{pmatrix}=2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 7 & -8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 7 & -8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución: $(A,B)=\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\right)$

b) $$\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\ |\vec{v}|\cos 45^{\circ}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} \vec{u}\cdot\vec{v}=(a,1,0)\cdot(a,0,0)=a^2 \\ |\vec{u}|=\sqrt{a^2+1} \\ |\vec{v}|=\sqrt{a^2}=|a| \end{array}\right.\Rightarrow a^2=|a|\sqrt{a^2+1}\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} 2a^2=a\sqrt{a^2+1}\sqrt{2}\Rightarrow 2a=\sqrt{2\left(a^2+1\right)}\Rightarrow 4a^2=2a^2+2\Rightarrow 2a^2=2\Rightarrow a=\pm 1 \\ 2a^2=-a\sqrt{a^2+1}\sqrt{2}\Rightarrow ...\Rightarrow a=\pm 1 \end{array}\right.$$

Por tanto, $a=\pm 1$.