Derivadas y aplicaciones

1. El número de bacterias en un cultivo experimental es un instante t es

$$N(t)=1000\left(25+te^{-\frac{t}{20}}\right) \quad \text{para } t\in[0,100]$$

¿Cuántas bacterias hay como máximo en dicho cultivo y en qué instante se alcanza dicho valor extremo?

2. Calcula, razonadamente, las ecuaciones de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de la función $f(x)=2xe^x+\dfrac{x^3-2}{x^2+4}$ en el punto de abscisa $x=0$.

3. Sabiendo que la función

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-(a+3)x+3a}{x-3} & \text{si} \quad x\neq 3 \\ 1 & \text{si} \quad x=3 \end{cases}$$

es derivable en $\mathbb{R}$:

a) Calcula, razonadamente, el valor de $a\in\mathbb{R}$.

b) Para dicho valor de a, calcula, razonadamente, $f'(3)$.

4. Dada la función $f(x)=x^2e^x \quad \forall x\in\mathbb{R}$. Determina, razonadamente, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como los extremos relativos.

5. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función dada por $f(x)=\left|8-x^2\right|$. Calcula, razonadamente, sus extremos relativos y la ecuación de la recta tangente y normal a la gráfica de $f(x)$ en $x=2$.

6. Calcula, razonadamente, los siguientes límites:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos(3x))}{\ln(\cos(2x))}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)-1+\cos x}{x^2}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln[\cos(2x)]}{x^2}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{tg}(2x)}{\operatorname{tg}(6x)}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(\ln x\cdot \operatorname{sen} x)$

f) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\frac{x\ln x}{e^x}$

g) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x-e^{-x}\right)^2}{x^2}$

SOLUCIONES

Ejercicio 1:

$$N'(t)=1000\left(e^{-\frac{t}{20}}+te^{-\frac{t}{20}}\cdot\left(-\frac{1}{20}\right)\right)=1000e^{-\frac{t}{20}}\left(1-\frac{t}{20}\right)$$

$$N'(t)=0\Rightarrow\begin{cases}e^{-\frac{t}{20}}=0\text{ Imposible}\\1-\dfrac{t}{20}=0\Rightarrow t=20\end{cases}$$

$$N''(t)=\frac{5}{2}\left[e^{-\frac{t}{20}}(t-40)\right]\text{ (ya simplificada)}$$

$N''(20)=-50e^{-1}<0\Rightarrow t=20$ es un máximo relativo de coordenadas $(20,3235)$, esto es, a los 20 segundos de comenzado el experimento el número de bacterias es máximo, y este número es, aproximadamente, de 3235 bacterias.

Ejercicio 2

La ecuación de la recta tangente es: $y-f(a)=f'(a)(x-a)$

$$\left.\begin{array}{l}f(0)=-\dfrac{1}{2}\\f'(x)=2e^x+2xe^x+\dfrac{3x^2(x^2+4)-(x^3-2)\cdot 2x}{(x^2+4)^2}\\f'(0)=2\end{array}\right\}\Rightarrow\boxed{y+\frac{1}{2}=2(x-0)}$$

La ecuación de la recta normal es: $y-f(a)=-\dfrac{1}{f'(a)}(x-a)\Rightarrow\boxed{y+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}(x-0)}$

Ejercicio 3

Como la función es derivable en $\mathbb{R}$, en particular lo es en $x=3$: $\exists\lim\limits_{x\to3}f(x)=f(3)$

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to3}f(x)=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-(a+3)x+3a}{x-3}=\left[\dfrac{0}{0}\right]\underset{(1)}{=}\lim\limits_{x\to3}\dfrac{2x-(a+3)}{1}=3-a\\f(3)=1\end{array}\right\}\Rightarrow 3-a=1\Rightarrow a=2$$

Por tanto, la función que obtenemos es $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-5x+6}{x-3} & \text{si}\quad x\neq3\\1 & \text{si}\quad x=3\end{cases}$, y su derivada en $x=3$ es:

$$f'(3)=\lim_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{\dfrac{x^2-5x+6}{x-3}-1}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{x^2-5x+6-x+3}{(x-3)^2}=\lim_{x\to3}\frac{x^2-6x+9}{(x-3)^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)^2}{(x-3)^2} = 1$$

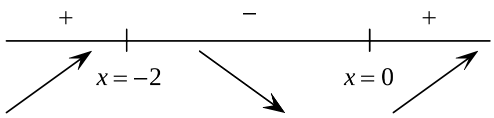
Ejercicio 4

Intervalos de crecimiento y decrecimiento: signo de f'

$f'(x) = 2xe^x + x^2e^x$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2xe^x + x^2e^x = 0 \Rightarrow e^x\left(2x + x^2\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} e^x = 0 \text{ Nunca} \\ 2x + x^2 = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} 0 \\ -2 \end{cases} \end{cases}$$

signo de f'



Por tanto, $f(x)$ es estrictamente $\begin{cases} \text{creciente en } (-\infty, -2) \cup (2, +\infty) \\ \text{decreciente en } (-2, 2) \end{cases}$

Extremos relativos:

Los posibles extremos relativos son $x = \begin{cases} 0 \\ -2 \end{cases}$

Calculamos la derivada segunda: $f''(x) = e^x\left(x^2 + 4x + 2\right)$

$f''(-2) > 0 \Rightarrow x = -2$ es un máximo relativo de coordenadas $\left(-2, 4e^{-2}\right)$

$f''(0) < 0 \Rightarrow x = 0$ es un mínimo relativo de coordenadas $(0,0)$

Ejercicio 5

Expresamos la función, como una función definida a trozos:

$$f(x) = \left|8 - x^2\right| = \begin{cases} -\left(8 - x^2\right) & \text{si } 8 - x^2 < 0 \\ 8 - x^2 & \text{si } 8 - x^2 > 0 \end{cases} = \begin{cases} -8 + x^2 & \text{si } x < -\sqrt{8} \\ 8 - x^2 & \text{si } -\sqrt{8} \le x \le \sqrt{8} \\ -8 + x^2 & \text{si } x > \sqrt{8} \end{cases}$$

Extremos relativos:

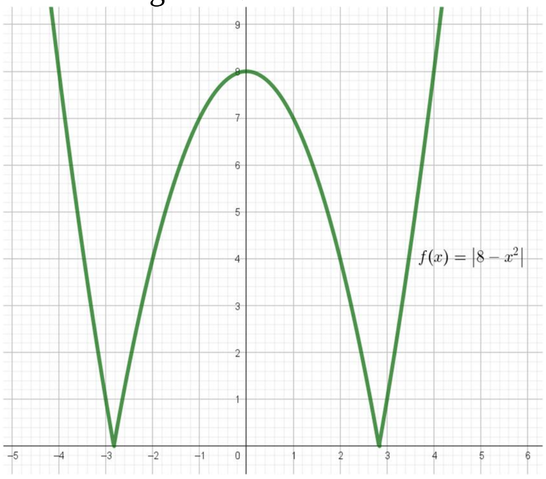
$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < -\sqrt{8} \\ -2x & \text{si } -\sqrt{8} \le x \le \sqrt{8} \\ 2x & \text{si } x > \sqrt{8} \end{cases}$$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ (posible extremo relativo)

$$f''(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < -\sqrt{8} \\ -2 & \text{si } -\sqrt{8} \le x \le \sqrt{8} \\ 2 & \text{si } x > \sqrt{8} \end{cases}$$

$f''(0) = -2 < 0 \Rightarrow x = 0$ es un máximo relativo de coordenadas $(0,8)$

Lo comprobamos con su representación gráfica:



Ejercicio 6

a) $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos(3x))}{\ln(\cos(2x))}=\left[\frac{0}{0}\right]\underset{(*)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-3\operatorname{sen}(3x)}{\cos(3x)}}{\frac{-2\operatorname{sen}(2x)}{\cos(2x)}}=\lim_{x\to 0}\frac{3\operatorname{tg}(3x)}{2\operatorname{tg}(2x)}=\left[\frac{0}{0}\right]\underset{(*)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{9\left(1+\operatorname{tg}^2(3x)\right)}{4\left(1+\operatorname{tg}^2(2x)\right)}=\frac{9}{4}$$

b) $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)-1+\cos x}{x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]\underset{(*)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}-\operatorname{sen} x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\operatorname{tg} x-\operatorname{sen} x}{2x}=\left[\frac{0}{0}\right]\underset{(*)}{=}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\left(1+\operatorname{tg}^2 x\right)-\cos x}{2}=\frac{-2}{2}=-1$$

c) $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln[\cos(2x)]}{x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]\underset{(*)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{2\operatorname{sen}(2x)}{\cos(2x)}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\operatorname{tg}(2x)}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]\underset{(*)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-2\left(1+\operatorname{tg}^2(2x)\right)}{1}=-2$$

d) $$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{tg}(2x)}{\operatorname{tg}(6x)}=\left[\frac{0}{0}\right]\underset{(*)}{=}\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{2\left(1+\operatorname{tg}^2(2x)\right)}{6\left(1+\operatorname{tg}^2(6x)\right)}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

e) $$\lim_{x\to 0}(\ln x\cdot\operatorname{sen} x)=[\infty\cdot 0]=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{\operatorname{sen} x}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\underset{(*)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}}=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x\cos x}\right)=\left[\frac{0}{0}\right]\underset{(*)}{=}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2\operatorname{sen} x\cos x}{\cos x-x\operatorname{sen} x}=-\frac{0}{1}=0$$

f) $$\lim_{x\to +\infty}\frac{x\ln x}{e^x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\underset{(*)}{=}\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln x+1}{e^x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\underset{(*)}{=}\lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{1}{x}}{e^x}=\left[\frac{0}{\infty}\right]=0$$

g) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(e^{x}-e^{-x}\right)^{2}}{x^{2}}=\left[\dfrac{0}{0}\right]\underset{(*)}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\left(e^{x}-e^{-x}\right)\left(e^{x}+e^{-x}\right)}{2x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]\underset{(*)}{=}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^{x}+e^{-x}\right)\left(e^{x}+e^{-x}\right)+\left(e^{x}-e^{-x}\right)\left(e^{x}-e^{-x}\right)}{2}=\frac{8}{2}=4$$

Donde en (*) hemos usado la regla de L'Hôpital.