REGLA DE L'HÔPITAL PARA $\left[\frac{0}{0}\right]$

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones derivables en un entorno E de a y tales que:

1) $f(a)=g(a)=0$

2) g' no se anula en E

Si existe el límite finito $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, entonces existe también $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$, y, además:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Otras formas de la regla de L'Hôpital:

El esquema

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

es válido para $x\to a$, $x\to a+$, $x\to a-$, $x\to+\infty$ y $x\to-\infty$, tanto si la indeterminación es del tipo $\left[\frac{0}{0}\right]$, como si es de la forma $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, e independientemente de que el límite sea finito o infinito.

Indeterminación $[0\cdot\infty]$: Para transformarla en una de la forma $\left[\frac{0}{0}\right]$ o $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ tendremos en cuenta que:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)g(x)\right]=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$$

Indeterminación $[\infty-\infty]$: Puede resolverse utilizando la regla de L' Hôpital; para ello, se suelen realizar las operaciones indicadas, obteniéndose indeterminaciones de la forma $\left[\frac{0}{0}\right]$ o $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Indeterminaciones $\left[\infty^0\right]$, $\left[0^0\right]$ y $\left[1^\infty\right]$: Para aplicar la regla de L'Hôpital, las transformamos en la forma $0\cdot\infty$ teniendo en cuenta que:

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}=\lim_{x\to a}e^{g(x)\cdot\ln f(x)}=e^{\lim_{x\to a} g(x)\cdot\ln f(x)}$$

RESOLUCIÓN DE INDETERMINACIONES

Indeterminación del tipo $\left[\frac{0}{0}\right]$

- Calcula los siguientes límites:

1) $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]$ (aplicando L'Hôpital) $=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=1$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^3}{x-\text{sen}\,x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6x^2}{1-\cos x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{12x}{\text{sen}\,x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{12}{\cos x}=\dfrac{12}{1}=12$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4^x-2^x}{\text{sen}\,4x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4^x\cdot\log 4-2^x\cdot\log 2}{4\cdot\cos 4x}=\dfrac{\log 4-\log 2}{4}=\dfrac{\log\frac{4}{2}}{4}=\dfrac{\log 2}{4}$

4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^x-e}{x^2-1}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^x}{2x}=\dfrac{e}{2}$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\,\text{arctg}\,x-x}{2x-\text{arcsen}\,x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\dfrac{1}{1+x^2}-1}{2-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}=\dfrac{2\dfrac{1}{1+0}-1}{2-\dfrac{1}{1}}=1$

6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\text{sen}\,x}{\log(\cos x)}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\dfrac{-\text{sen}\,x}{\cos x}}=\left(\lim\limits_{x\to 0}\cos x\right)\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{-\text{sen}\,x}\right)=1\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{-\text{sen}\,x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{sen}\,x}{-\cos x}=\dfrac{0}{1}=0$

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\text{sen}\,x}{x^3}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{sen}\,x}{6x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{6}=\dfrac{1}{6}$

8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\log(1+x)}{\left[x+\log(1+x)\right]^2}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\dfrac{1}{1+x}}{2\left(x+\log(1+x)\right)\left(1+\dfrac{1}{1+x}\right)}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\left[2x+2\log(1+x)\right](2+x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2+x}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{2x+2\log(1+x)}=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{0}{0}\right]=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to}\dfrac{1}{2+\dfrac{2}{1+x}}=$

$=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{8}$

Indeterminación del tipo $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$

- Calculamos los siguientes límites:

1) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x}{x^2+2}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{2x}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{2x^2}=0$

2) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x^2-1}{e^{2x}}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{4x}{e^{2x}\cdot 2}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{4}{e^{2x}\cdot 2\cdot 2}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{e^{2x}}=0$

3) $\lim_{x\to 0}\frac{\log x}{\operatorname{cotg} x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{\operatorname{sen}^2 x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2 x}{-x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\operatorname{sen} x\cdot\cos x}{-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 2x}{-1}=0$

Indeterminación del tipo $[0\cdot\infty]$

- Calculamos los siguientes límites:

1) $\lim_{x\to+\infty} x^2\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)=[\infty\cdot 0]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{x}\cdot\frac{-1}{x^2}}{\frac{-2x}{x^4}}=\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}$

donde hemos tenido en cuenta que $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}=1\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=1$ (aunque también se puede calcular volviendo a aplicar L'Hôpital.

2) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\operatorname{tg} x\right]=[0\cdot\infty]=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\frac{1}{\operatorname{tg} x}}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}}=\left[\frac{0}{0}\right]=$

$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\frac{-\operatorname{sen} x\cdot\operatorname{sen} x-\cos x\cdot\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\frac{-\operatorname{sen}^2 x-\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\frac{-\left(\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x\right)}{\operatorname{sen}^2 x}}=$

$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\frac{-1}{\operatorname{sen}^2 x}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{sen}^2 x}{-1}=\frac{1}{-1}=-1$

2) $\lim_{x\to 0}\left(\operatorname{cotg} x\cdot\operatorname{arcsen} x\right)=[\infty\cdot 0]=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{arcsen} x}{\frac{1}{\operatorname{cotg} x}}\right)=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{arcsen} x}{\operatorname{tg} x}\right)=\left[\frac{0}{0}\right]=$

$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{1}{\cos^2 x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\cos^2 0}{\sqrt{1}}=\frac{1}{1}=1$

Indeterminación del tipo $[\infty-\infty]$

- Calcula los siguientes límites:

1) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\operatorname{sen} x}\right)=[\infty-\infty]=$ (operando, se transforma en una indeterminación del tipo $\left[\frac{0}{0}\right]$)

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} x - x}{x\cdot \operatorname{sen} x}\right)=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x-1}{1\cdot \operatorname{sen} x + x\cdot\cos x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x-1}{\operatorname{sen} x + x\cdot\cos x}\right)=\left[\frac{0}{0}\right]$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x+1\cdot\cos x - x\cdot\operatorname{sen} x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x+\cos x - x\cdot\operatorname{sen} x}\right)=\frac{0}{2}=0$$

2) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{e}{e^x-e}\right)=[\infty-\infty]=$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{\frac{e}{e^x-e}}-\frac{1}{\frac{1}{x-1}}}{\frac{1}{\frac{1}{x-1}\cdot\frac{e}{e^x-e}}}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{e^x-e}{e}-\frac{x-1}{1}}{\frac{(x-1)\cdot(e^x-e)}{e}}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{e^x-e-e\cdot(x-1)}{e}}{\frac{(x-1)\cdot(e^x-e)}{e}}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{e^x-\cancel{e}-e\cdot x+\cancel{e}}{x\cdot e^x-e\cdot x-e^x+e}=\lim_{x\to 1}\frac{e^x-e\cdot x}{x\cdot e^x-e\cdot x-e^x+e}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{e^x-e}{1\cdot e^x+x\cdot e^x-e-e^x}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{e^x-e}{x\cdot e^x-e}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{e^x}{1\cdot e^x+x\cdot e^x}=\lim_{x\to 1}\frac{e^x}{e^x+x\cdot e^x}=\lim_{x\to 1}\frac{e^x}{e^x\cdot(1+x)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{1+x}=\frac{1}{2}$$

Nota: La mayoría de las veces no es necesario realizar esa transformación. Operando convenientemente transformamos la indeterminación del tipo $[\infty-\infty]$ en otra del tipo $\left[\frac{0}{0}\right]$.

3) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\log x}-\frac{1}{x-1}\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to 1}\left(\frac{x-1-\log x}{(x-1)\cdot\log x}\right)=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{1-\frac{1}{x}}{\log x+\frac{1}{x}\cdot(x-1)}=$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{x-1}{x}}{\frac{x\cdot\log x+x-1}{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x\cdot\log x+x-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\ln x+x\cdot\frac{1}{x}+1}=\frac{1}{0+1+1}=\frac{1}{2}$$

Indeterminación del tipo $\left[1^{\infty}\right]$

- Calculamos los siguientes límites:

1) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x+2^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\left[1^{\infty}\right]=e^{\frac{1+\log 2}{2}}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{e^x+2^x}{2}-1\right)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+2^x-2}{2x}=\left[\frac{0}{0}\right](\text{aplicando L'Hôpital})=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+2^x\log 2}{2}=\frac{1+\log 2}{2}$$

2) $\lim_{x\to 1}x^{1/(1-x)}=\left[1^{\infty}\right]$

Aplicamos la fórmula $\lim_{x\to a}f(x)^{g(x)}=e^{\lim_{x\to a}g(x)[f(x)-1]}$ donde $a\in\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$.

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{1-x}(x-1)=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{1-x}=\lim_{x\to 1}-\frac{-\cancel{(x-1)}}{\cancel{1-x}}=-1\Rightarrow \lim_{x\to 1}x^{1/1-x}=\left[1^{\infty}\right]=e^{-1}=\frac{1}{e}$$

De otra forma:

Supongamos que $\lim_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}=M \;\Rightarrow$ Tomando logaritmos, se tiene que:

$\log\left[\lim_{x\to 1}(x)^{\frac{1}{1-x}}\right]=\log M \;\Rightarrow$ aplicando las propiedades de los límites:

$\log\left[\lim_{x\to 1}(x)^{\frac{1}{1-x}}\right]=\lim_{x\to 1}\left[\log(x)^{\frac{1}{1-x}}\right] \;\Rightarrow$ aplicando las propiedades de los logaritmos:

$\lim_{x\to 1}\left[\log(x)^{\frac{1}{1-x}}\right]=\lim_{x\to 1}\left[\left(\frac{1}{1-x}\right)\cdot\log x\right]=\left[\infty\cdot 0\right]$ (operando) $=\lim_{x\to 1}\left(\frac{\log x}{1-x}\right)=\left[\frac{0}{0}\right]=$

$$=\lim_{x\to 1}\left(\frac{\frac{1}{x}}{-1}\right)=\lim_{x\to 1}\left(-\frac{1}{x}\right)=-1$$

Luego, $\log M=-1\Rightarrow M=e^{-1}=\frac{1}{e}$ y, por tanto, $\lim_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}=e^{-1}=\frac{1}{e}$

3) $\lim_{x\to+\infty}\left[\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right]^{x}=\left[0^{\infty}\right]$

Aplicamos la fórmula $\lim_{x\to a}f(x)^{g(x)}=e^{\lim_{x\to a}g(x)\log f(x)}$ donde $a\in\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$.

$$\lim_{x\to+\infty}x\log\left[\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right]=\left[\infty\cdot 0\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{-\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}}{-\frac{1}{x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left\{\frac{-\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}\cdot\cos\left(\frac{1}{x}\right)}\right\}=\lim_{x\to+\infty}\left[-\text{tg}\left(\frac{1}{x}\right)\right]=0$$

Así, $\lim_{x\to+\infty}\left[\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right]^{x}=\left[0^{\infty}\right]=e^{0}=1$

De otra forma:

Llamamos $M=\lim_{x\to+\infty}\left[\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right]^{x}$

Tomando logaritmos neperianos:

$$\log M=\log\left\{\lim_{x\to+\infty}\left[\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right]^{x}\right\}$$

Aplicando las propiedades de los límites:

$$\log\left\{\lim_{x\to+\infty}\left[\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right]^{x}\right\}=\lim_{x\to+\infty}\left\{\log\left[\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right]^{x}\right\}$$

Aplicando las propiedades de los logaritmos: $\log A^{B}=B\cdot\log A$

$$\lim_{x\to+\infty}\left\{\log\left[\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right]^{x}\right\}=\lim_{x\to+\infty}\left\{x\cdot\log\left[\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right]\right\}=\left[\infty\cdot 0\right]$$

Transformamos esta indeterminación en una del tipo $\left[\frac{0}{0}\right]$ o $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ mediante el cambio:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=\left[0\cdot\infty\right]\ \text{o}\ \left[\infty\cdot 0\right]\Rightarrow\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}\right]=\left[\frac{0}{0}\right]\ \text{o}\ \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left\{\frac{\log\left[\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right]}{\frac{1}{x}}\right\}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{-\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^{2}}\right)}{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}}{-\frac{1}{x^{2}}}=\lim_{x\to+\infty}\left\{\frac{-\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^{2}}\right)}{-\frac{1}{x^{2}}\cdot\cos\left(\frac{1}{x}\right)}\right\}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[-\operatorname{tg}\left(\frac{1}{x}\right)\right]=-\operatorname{tg}0=0\quad\Rightarrow\quad\log M=0\quad\Rightarrow\quad M=e^{0}=1$$

Luego, $\lim_{x\to+\infty}\left[\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right]^{x}=1$

Indeterminación del tipo $\left[\infty^{0}\right]$

Se resuelven también aplicando logaritmos neperianos.

- Calculamos los siguientes límites:

1) $\lim_{x\to+\infty}\left(\log x\right)^{\frac{1}{e^{x}}}=\left[\infty\cdot 0\right]=e^{0}=1$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{x}}\log\left(\log x\right)=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{\log x}\cdot\frac{1}{x}}{e^{x}}=\left[\frac{0}{\infty}\right]=0$$

2) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\left(\operatorname{tg}x\right)^{\cos x}\right]=\left[\infty^{0}\right]$

Llamamos $M=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\left(\operatorname{tg}x\right)^{\cos x}\right]$

Tomando logaritmos neperianos:

$$\log M=\log\left\{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\left(\operatorname{tg}x\right)^{\cos x}\right]\right\}$$

Aplicando las propiedades de los límites:

$$\log\left\{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[(\operatorname{tg} x)^{\cos x}\right]\right\}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\log(\operatorname{tg} x)^{\cos x}\right]$$

Aplicando la propiedad de los logaritmos: $\log A^B = B\cdot\log A$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\log(\operatorname{tg} x)^{\cos x}\right]=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\cos x\cdot\log(\operatorname{tg} x)\right]=[0\cdot\infty]$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\log(\operatorname{tg} x)}{\frac{1}{\cos x}}\right]=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg} x}}{\frac{0\cdot\cos x-1\cdot(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x}}\right]=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg} x}}{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}}\right]=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\frac{1}{\cos^2 x\cdot\operatorname{tg} x}}{\frac{\operatorname{tg} x}{\cos x}}\right]=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\cos x}{\cos^2 x\cdot\operatorname{tg}^2 x}\right]=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\cos x}{\frac{\cos^2 x\cdot\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}}\right]=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}\right]=\frac{0}{1}=0$$

$\Rightarrow \quad \log M = 0 \quad \Rightarrow \quad M = e^0 = 1$

Luego, $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[(\operatorname{tg} x)^{\cos x}\right]=1$

3) $\lim_{x\to+\infty}\left[(2^x-1)^{\frac{2}{x+1}}\right]=\left[\infty^0\right]$

Llamamos $M = \lim_{x\to+\infty}\left[(2^x-1)^{\frac{2}{x+1}}\right]=$

Tomando logaritmos neperianos:

$$\log M = \log\left\{\lim_{x\to+\infty}\left[(2^x-1)^{\frac{2}{x+1}}\right]\right\}$$

Aplicando las propiedades de los límites:

$$\log\left\{\lim_{x\to+\infty}\left[(2^x-1)^{\frac{2}{x+1}}\right]\right\}=\lim_{x\to+\infty}\left[\log(2^x-1)^{\frac{2}{x+1}}\right]$$

Aplicando la propiedad de los logaritmos: $\log A^B = B\cdot\log A$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\log(2^x-1)^{\frac{2}{x+1}}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2}{x+1}\cdot\log(2^x-1)\right]=[0\cdot\infty]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\log(2^x-1)}{\frac{1}{\frac{2}{x+1}}}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\log(2^x-1)}{\frac{x+1}{2}}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2\cdot\log(2^x-1)}{x+1}\right]=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2\cdot 2^x\cdot\log 2}{2^x-1}\right]=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2\cdot\log 2\cdot 2^x\cdot\log 2}{2^x\cdot\log 2}\right]=2\cdot\log 2=\log 2^2=\log 4$$

$\Rightarrow \quad \log M = \log 4 \quad \Rightarrow \quad M = 4$

Luego, $M = \lim_{x\to+\infty}\left[\left(2^x-1\right)^{\frac{2}{x+1}}\right]=4$

Indeterminación del tipo $\left[0^0\right]$

Se resuelven también tomando logaritmos neperianos.

- Calculamos los siguientes límites:

1) $\lim_{x\to0+} x^{\operatorname{sen} x} = \left[0^0\right] = e^{\lim_{x\to0+}\operatorname{sen} x\log x} = e^0 = 1$

$$\lim_{x\to0+}\operatorname{sen} x\log x = \left[0\cdot\infty\right] = \lim_{x\to0+}\frac{\log x}{\frac{1}{\operatorname{sen} x}} = \lim_{x\to0+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}} = \lim_{x\to0+}\frac{\operatorname{sen}^2 x}{-x\cos x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to0+}\frac{2\operatorname{sen} x\cos x}{-\cos x + x\operatorname{sen} x} =$$

$$=\frac{0}{-1}=0$$

2) $\lim_{x\to0}\left(\operatorname{sen} x\right)^x = \left[0^0\right]$

Llamamos $M = \lim_{x\to0}\left(\operatorname{sen} x\right)^x$

Tomando logaritmos neperianos:

$\log M = \log\left[\lim_{x\to0}\left(\operatorname{sen} x\right)^x\right]$

Aplicando las propiedades de los límites:

$\log\left[\lim_{x\to0}\left(\operatorname{sen} x\right)^x\right] = \lim_{x\to0}\left[\log\left(\operatorname{sen} x\right)^x\right]$

Aplicando la propiedad de los logaritmos: $\log A^B = B\cdot\log A$

$\lim_{x\to0}\left[\log\left(\operatorname{sen} x\right)^x\right] = \lim_{x\to0}\left[x\cdot\log\left(\operatorname{sen} x\right)\right] = \left[0\cdot(-\infty)\right]$

Transformamos esta indeterminación en una del tipo $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ mediante el siguiente cambio:

$$=\lim_{x\to0}\left[\frac{\log\left(\operatorname{sen} x\right)}{\frac{1}{x}}\right] = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to0}\left[\frac{\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}}{\frac{-1}{x^2}}\right] = \lim_{x\to0}\left[\frac{x^2\cdot\cos x}{-\operatorname{sen} x}\right] = \left[\frac{0}{0}\right]$$

Nota: $D\left[\frac{1}{x}\right] = D\left[x^{-1}\right] = -1\cdot x^{-2} = \frac{-1}{x^2}$

$$=\lim_{x\to0}\left[\frac{2x\cdot\cos x + x^2\cdot(-\operatorname{sen} x)}{-\cos x}\right] = \frac{0}{-1} = 0 \Rightarrow \quad \log M = 0 \quad \Rightarrow \quad M = e^0 = 1$$

Luego, $M = \lim_{x\to0}\left(\operatorname{sen} x\right)^x = 1$

2) $\lim_{x\to0} x^{\log\left(2-e^x\right)} = \left[0^0\right]$

Llamamos

$M = \lim_{x\to0} x^{\log\left(2-e^x\right)}$

Tomando logaritmos neperianos:

$$\log M = \log\left[\lim_{x\to 0} x^{\log(2-e^x)}\right]$$

Aplicando las propiedades de los límites:

$$\log\left[\lim_{x\to 0} x^{\log(2-e^x)}\right] = \lim_{x\to 0}\left[\log\ x^{\log(2-e^x)}\right]$$

Aplicando la propiedad de los logaritmos: $\log A^B = B\cdot\log A$

$$\lim_{x\to 0}\left[\log\ x^{\log(2-e^x)}\right] = \lim_{x\to 0}\left[\log\left(2-e^x\right)\cdot\log\ x\right] = \left[0\cdot(-\infty)\right]$$

Transformamos esta indeterminación en una del tipo $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ mediante el siguiente cambio:

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{\log x}{\dfrac{1}{\log\ \left(2-e^x\right)}}\right] = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to 0}\left[\frac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{\dfrac{-(-e^x)}{2-e^x}}{\log^2\left(2-e^x\right)}}\right] = \lim_{x\to 0}\left[\frac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{e^x}{\left(2-e^x\right)\cdot\log^2\left(2-e^x\right)}}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{\left(2-e^x\right)\cdot\log^2\left(2-e^x\right)}{x\cdot e^x}\right] = \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{-e^x\cdot\log^2\left(2-e^x\right) + \left(2-e^x\right)\cdot 2\cdot\log\left(2-e^x\right)\cdot\dfrac{\left(-e^x\right)}{\left(2-e^x\right)}}{e^x + x\cdot e^x}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{-e^x\cdot\log^2\left(2-e^x\right) - 2\cdot e^x\cdot\log\left(2-e^x\right)}{e^x + x\cdot e^x}\right] = \frac{-1\cdot\log^2 1 - 2\cdot\log^2 1}{1+0} = \frac{0}{1} = 0$$

ya que $\log(1) = 0 \;\Rightarrow\; \log M = 0 \;\Rightarrow\; M = e^0 = 1$

Luego,

$$M = \lim_{x\to 0} x^{\log(2-e^x)} = 1$$

3) $\lim_{x\to\pi}\left(1-\cos 2x\right)^{\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}} = \left[0^0\right]$ (para finalizar uno difícil)

Llamamos $M = \lim_{x\to\pi}\left(1-\cos 2x\right)^{\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}}$

Tomando logaritmos neperianos:

$$\log M = \log\left\{\lim_{x\to\pi}\left(1-\cos 2x\right)^{\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}}\right\}$$

Aplicando las propiedades de los límites:

$$\log\left\{\lim_{x\to\pi}\left(1-\cos 2x\right)^{\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}}\right\}=\lim_{x\to\pi}\left[\log\left(1-\cos 2x\right)^{\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}}\right]$$

Aplicando la propiedad de los logaritmos: $\log A^B = B\cdot\log A$

$$\lim_{x\to\pi}\left[\log\left(1-\cos 2x\right)^{\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}}\right]=\lim_{x\to\pi}\left[\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\cdot\log\left(1-\cos 2x\right)\right]=\left[0\cdot(-\infty)\right]$$

Transformamos esta indeterminación en una del tipo $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$:

$$=\lim_{x\to\pi}\left[\frac{\log\left(1-\cos 2x\right)}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right]=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\pi}\left[\frac{\frac{\operatorname{sen}2x\cdot(2)}{1-\cos 2x}}{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2}}\right]=\lim_{x\to\pi}\left[\frac{4\cdot\operatorname{sen}2x\cdot\cos^2\frac{x}{2}}{1-\cos 2x}\right]=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to\pi}\left[\frac{8\cdot\cos 2x\cdot\cos^2\frac{x}{2}+2\cdot\cos\frac{x}{2}\cdot\left(-\operatorname{sen}\frac{x}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\cdot 4\cdot\operatorname{sen}2x}{2\cdot\operatorname{sen}2x}\right]=$$

$$=\lim_{x\to\pi}\left[\frac{8\cdot\cos 2x\cdot\cos^2\frac{x}{2}-4\cdot\cos\frac{x}{2}\cdot\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cdot\operatorname{sen}2x}{2\cdot\operatorname{sen}2x}\right]=\text{ (operando)}$$

$$\cos\frac{x}{2}\cdot\operatorname{sen}\frac{x}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}=\sqrt{\frac{(1+\cos x)\cdot(1-\cos x)}{4}}=\sqrt{\frac{1-\cos^2 x}{4}}=\sqrt{\frac{\operatorname{sen}^2 x}{4}}=\frac{\operatorname{sen}x}{2}$$

$$=\lim_{x\to\pi}\left[\frac{8\cdot\cos 2x\cdot\cos^2\frac{x}{2}-4\cdot\frac{\operatorname{sen}x}{2}\cdot\operatorname{sen}2x}{2\cdot\operatorname{sen}2x}\right]=\lim_{x\to\pi}\left[\frac{8\cdot\cos 2x\cdot\cos^2\frac{x}{2}-2\cdot\operatorname{sen}x\cdot\operatorname{sen}2x}{2\cdot\operatorname{sen}2x}\right]=$$

$$=\lim_{x\to\pi}\left[\frac{4\cdot\cos 2x\cdot\cos^2\frac{x}{2}-\operatorname{sen}x\cdot\operatorname{sen}2x}{\operatorname{sen}2x}\right]=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to\pi}\left[\frac{-8\cdot\operatorname{sen}2x\cdot\cos^2\frac{x}{2}+2\cdot\cos\frac{x}{2}\cdot\left(-\operatorname{sen}\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}\cdot 4\cdot\cos 2x-\cos x\cdot\operatorname{sen}2x-\operatorname{sen}x\cdot\cos 2x\cdot(2)}{2\cdot\cos 2x}\right]=0$$

$$\Rightarrow \log M=0\Rightarrow M=e^0=1$$

Luego, $M=\lim_{x\to\pi}\left(1-\cos 2x\right)^{\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}}=1$